一组不互相同构的三生成元群的概率定律连续体 $x^n = 1$

V.S. Atabekyan *　A.A. Bayramyan †　V.H. Mikaelian ‡

摘要

在本文中，我们构造了一个连续的非同构三生成元群族，在这些群中恒等式 $x^n = 1$ 以概率 1 成立，但在每个群中普遍不成立。这解决了关于群恒等式的概率满足和普遍满足之间关系的一个近期问题。我们的构造使用了阶为 n 的循环群的 n 周期积以及满足形式为 $[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1$ 恒等式的一类二生成元相对自由群。我们证明，在这些乘积中的每一个中，满足 $x^n = 1$ 的概率等于 1，尽管在这些群中的任何一个内该恒等式普遍不成立。

介绍。

群论与概率论之间的相互作用已经成为现代代数中的一个活跃研究领域。概率论在群论中的一个应用是对提供群的替代特征的概率陈述的研究。最早的结果之一是以下观察：如果有限（或紧致）群中随机选择的两个元素可交换的概率大于 $\frac{5}{8}$，那么该群是阿贝尔群（见 [1]）。一个相关结果表明，如果 G 是一个有限群，在这个群中随机选择两个元素生成可解子群的概率

*avarujan@ysu.am

†arman.bayramyan@ysu.am

‡vmikaelian@ysu.am

超过 $\frac{11}{30}$，则 G 本身也是可解的 [2]。这类结果可以通过在有限生成群上引入概率测度来扩展。一个自然的方法是固定一组生成元，并考虑该群的凯莱图中 k-球上的均匀测度序列，然后取极限当 $k \to \infty$ 时。以下我们按照 [3] 给出有限生成群的一般定义。令 $M = \{\mu_k\}$ 为有限生成群 G 上的一系列概率测度，令 w 为自由群 F_m 中的任意一个词，该自由群的秩为 m。我们定义 G 满足关于测度序列 M 的群恒等式（法则）$w = 1$ 的概率为数

$$\mathbb{P}_M(w = 1 \text{ in } G) = \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}\mu_k(w = 1 \text{ in } G). \tag{1}$$

如果

$$\mathbb{P}_M(w = 1 \text{ in } G) = 1,$$

那么我们说词 w 是群 G 的一个 M- 概率群恒等式（几乎恒等式）。概率 $\mathbb{P}_M(w = 1 \text{ in } G)$ 的值传达了关于群 G 的某些信息。例如，如 [5] 和 [3] 所示，如果 $\mathbb{P}([x, y] = 1 \text{ in } G) > 0$ 或 $\mathbb{P}(x^2 = 1 \text{ in } G) > 0$，则该群是几乎可交换的（另见 [4]）。关于这个主题的详细调查结果可以在 [3] 中找到。在 [3] 中提出了以下问题（见问题 13.3）：设 $w \in F_m$ 是一个任意单词，G 是一个由生成集 S 生成的有限生成群，并且 $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \ldots, R_n^{(d)}$ 是关于 S 在 G 上的独立随机游走。如果

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(w(R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \ldots, R_n^{(d)}) = 1 \text{ in } G\big) = 1,$$

是否意味着 $w = 1$ 是 G 中的恒等式？根据 S.I. Adian 的著名工作 [7]，对于所有 $m \geq 2$ 和奇数 $n \geq 665$，自由 Burnside 群 $B(m, n)$ 上的对称随机游走是瞬时的。基于这一结果，可以在由形式为 A^n 的关系定义的群类中寻找该问题的一个潜在反例。这个问题已经在 [8] 和 [9] 中被考虑过，在这两篇文献中，作者们使用不同的方法构造了有限生成的反例来反对所陈述的问题。特别是，在 [9] 中构造了一个 3 生成元群，在这个群里对于所有足够大的奇数 n 来说，$x^n = 1$ 是概率恒等式，但该群包含一个无限循环子群。这意味着恒等式 $x^n = 1$ 在整个群里并不成立。在这项工作中，我们将通过构建一个连续的非同构 3 生成元群族来加强这一结果，每个群都具有恒等元

素 $x^n=1$ 的概率等于 1 的性质。同时，在这些群中的任何一个中，该恒等式都不成立。为简化起见，我们将考虑简单的对称随机游走作为随机游走 $R_n^{(i)}$（参见 [10]），并作为 G 上的概率测度，我们将在群 G 的凯莱图上固定一组自然的概率测度序列。令 $B_G(k)$ 表示以群 G 的单位元为中心，关于某个固定的对称生成集 S 的 Cayley 图中半径为 k 的球体，并设 $M=\mu_k$，其中 μ_k 是在 $B_G(k)$ 上的均匀分布，意味着如果 $g\in B_G(k)$ 则 $\mu_k(g)=\frac{1}{|B_G(k)|}$，否则 $\mu_k(g)=0$。我们的方法基于 S.I. Adian 提出的两个构造：在 [11] 中发展的 n-周期乘积的概念，以及在 [12] 和 [13, Ch. VII] 中构建的独立群恒等式的无限系统。更具体地说，我们考虑形如 $\{[x^{pn},y^{pn}]^n=1\}$ 的恒等式系统，其中 $n\geq 1003$ 是一个固定的奇数，而 p 遍历一组固定的素数 $\mathcal{P}$。设 $\mathcal{F}(n,\mathcal{P})$ 表示具有自由生成元 b_1,b_2 的秩为 2 的自由群，该自由群满足所有恒等式 $\{[x^{pn},y^{pn}]^n=1\}$，适用于 $p\in\mathcal{P}$。根据 S.I. Adian 的结果 [13]，对于不同的素数集合 $\mathcal{P}$，群 $\mathcal{F}(n,\mathcal{P})$ 是非同构的。接下来，我们考虑 n-周期性产品 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}=\mathcal{F}(n,\mathcal{P})*^{nZ_n}$，其中 Z_n 是一个由生成元 a 构成的阶为 n 的循环群。显然，$\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 是一个 3-生成元群。现在我们来表述我们的主要结果：

定理 1. *对于任何足够大的固定奇数 n，以下成立：*

1. *在群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}=\mathcal{F}(n,\mathcal{P})*^{nZ_n}$ 中，单位元 $x^n=1$ 是一个 M-概率性单位元。*
2. *在群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 中，恒等式 $x^n=1$ 不成立。*
3. *存在一个连续的非同构 3 生成元群族，形式为 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}=\mathcal{F}(n,\mathcal{P})*^{nZ_n}$，对应于不同的素数子集 $\mathcal{P}$。*

定理 1中的群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 以显著加强的形式对上述问题给出了否定的答案。本文的组织结构如下。在第 1节中，我们概述了构成我们构造基础的群 $\mathcal{F}(n,\mathcal{P})$ 的关键属性。第 2节回顾了一些关于 n 周期乘积的相关事实。在第 3节中，我们展示了 n-挠群的必要性质。第 4节提供了 3 生成自由伯恩赛德群的增长估计，这是证明主要定理的关键部分。在第 5节中，我们将这些工具结合起来以证明主要定理。当前的结果与 [14, 15, 16] 有关，在其中我们找到了一个连续的 3 生成可解非霍普夫（非元幂零）群，它们生成不同的群变种。

这是一个广泛的群类，对于其中 Higman 的问题 16 在 [17] 中给出了肯定的回答。在整个论文中假设 n 是一个足够大的奇数。对于每个结果，我们指定了其有效的 n 范围。

1 无限独立群 恒等式系统，含有两个变量

B. Neumann 于 1937 年提出有限基问题，询问是否存在无限不可约的群恒等式系统，即其中没有一个关系是其他关系的结果的系统。1969 年，S.I. Adian 构造了具有两个变量的此类系统的示例，解决了这个问题（[12]）。这一结果后来被包含在他的 1975 年专著 [13] 中，在此他证明了对于任意奇数 $n \geq 1003$，以下双变量恒等式族是不可约的：

$$\{[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1\}, \tag{2}$$

其中参数 p 遍历所有素数（参见 [13, Chapter VII]，定理 2.1）。从这个结果可以得出，对于任意奇数 $n \geq 1003$，存在一系列不同的簇 $\mathcal{A}_n(\mathcal{P})$ 对应于素数集合的不同子集 $\mathcal{P}$。因此，在不同集合 $\mathcal{P}$ 的簇 $\mathcal{A}_n(\mathcal{P})$ 中秩为 2 的相对自由群 $\mathcal{F}(n, \mathcal{P})$ 是非同构的。这些群的其他性质已在 [18] 中进行了研究。如 [13, Section 2, Chapter VII] 所示（另见 [18]），该群具有以下表示：

$$\mathcal{F}(n, \mathcal{P}) = \left\langle b_1, b_2 \,|\, A^n = 1, A \in \mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \right\rangle, \tag{3}$$

其中词语 $A \in \mathcal{E}_\alpha$ 以特定方式选择，并被称为标记的基本周期（关于基本周期的详细定义，集合 $\mathcal{K}_\alpha, \overline{\mathcal{M}}_\alpha$ 等，请参见 [12]，[13]，[18]）。为了简化表示，我们将固定配对的 $(n, \mathcal{P})$ 记为 $\mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}(n, \mathcal{P})$。以下三个引理是在 [18] ($n \geq 1003$) 中建立的：

引理 1 (引理 8, [18]). *对于群 $\mathcal{F}$ 中不等于 1 的任意单词 X，存在单词 T 和 A，使得在某个整数 r 下 $X = TA^rT^{-1}$ 在 $\mathcal{F}$ 中，其中 $A \in \mathcal{E}$ 或 A 是某些秩的未标记基本周期，并且 A^q 出现在某类 $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$ 的单词中。*

引理 2 (引理 4, [18]). 如果 A 是某个秩 γ 的标记基本周期，并且 A^q 出现在类 $\mathcal{K}_{\gamma-1}$ 中的某些词中，那么 A 在群 $\mathcal{F}$ 中的阶为 n。

引理 3 (引理 5, [18]). 如果 A 是某个秩 γ 的未标记基本周期，并且 A^q 出现在类 $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$ 中的某个词中，那么 A 在 $\mathcal{F}$ 中具有无限阶。

从引理 1、2和 3直接得出：

引理 4. 群 $\mathcal{F}$ 的每个元素要么与无限阶元素的某个幂共轭，要么与有限阶为 n 的元素的某个幂共轭。

2 n-周期产品

n-周期群乘积的概念是由阿迪安在 [11] 中引入的。他证明了 n 周期乘积与奇指数 $n \geq 665$ 的操作具有几个重要性质：它是精确的、关联的，并且满足子群的遗传性。这些性质也是直接和自由乘积的特点，为著名的马尔采夫问题提供了一个解决方案（详见 [19]）。这种操作，用 $\prod_{i\in I}^{n} G_i$ 表示，对于奇数 $n \geq 665$ 定义为由一组给定群 $\{G_i\}$ 的自由乘积通过一个特定的正规子群形成的商群，该正规子群是由形式为 $A^n = 1$ 的关系系统决定的。以下两个引理来自 [11]，揭示了奇数 $n \geq 665$ 的 n-周期产品的关键性质。

引理 5 (定理 1, [11]). 群 $G_i, i \in I$ 可以规范地嵌入到 $\prod_{i\in I}^{n} G_i$ 中作为子群。

引理 6 (定理 7, [11]). 对于每一个元素 $x \in \prod_{i\in I}^{n} G_i$，要么 $x^n = 1$ 在 $\prod_{i\in I}^{n} G_i$ 中，或者 x 与某个子群 G_i 的一个元素共轭，该子群是群 $\prod_{i\in I}^{n} G_i$ 的子群。

如 [20] 所示，引理 6的陈述特征是关于 n-周期性乘积的，即，给定群族的 n-周期性乘积由引理 6中指出的性质唯一确定。

3 n-挠群

令 S 是一个群字母表，$\mathcal{R}$ 是在这个字母表上的单词集，并且令 $n > 1$ 是一个固定的自然数。考虑由表示定义的群 G

$$G = \langle S \mid R^n = 1,\ R \in \mathcal{R}\rangle. \tag{4}$$

定义 1. *我们说群 (4) 是一个 n-挠群（参见 [21]，定义 1.1）或指数为 n 的部分伯恩赛德群（参见 [22]，定义 I.1），如果对于任何元素 $y \in G$，要么 $y^n = 1$ 要么 y 具有无限阶。*

最简单的 n-挠群示例是阶数为 n 的循环群和无限循环群。显然，任何秩的自由伯恩赛德群和绝对自由群都是任意自然数 n 的 n-挠群。从等式 (3) 可知，每个群 $\mathcal{F}(n,\mathcal{P})$ 都具有形式 (4) 的表示。

因此，根据定义 1和引理 4我们得出：

引理 7. *群 $\mathcal{F}(n,\mathcal{P})$ 是 n-挠群。*

以下陈述已在 [21] 中证明。

引理 8 (定理 1.1, [21]). *n-周期性的任何一组 n-挠群的乘积本身是一个 n-挠群 ($n \geq 665$)。*

结合定义 1与引理 7和 8，我们立即得到：

引理 9. *群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}} = \mathcal{F}(n,\mathcal{P}) *^{\mathrm{n}} Z_n$ 是 n-挠群 ($n \geq 1003$)。*

设 G 是一个任意的 n-挠群（即指数为 n 的部分伯恩赛德群），其中 n 是足够大的奇数（例如 $n > 10^{80}$）。根据命题 III.4 在 [22] 中，任何指数为 n 的部分伯恩赛德群 G 都可以用公理形式 $G = B_C(S,n) = \langle S \mid R^n = 1,\ R \in C\rangle$ 表示，其中 C 是字母表 S 中的某个部分伯恩赛德集（参见定义 II.45 和 II.46，[22]）。另一方面，根据定理 III.3 在 [22] G 中也允许具有以下形式的特殊分级表示

$$G = G_C(\infty) = \langle S \mid A^n = 1,\ A \in R\rangle, \tag{5}$$

这被称为 G 的极小部分伯恩赛德表示（MPBP）（参见定义 II.47，[22]）。对于群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$，我们固定生成集 $S = \{a, b_1, b_2\}$，并考虑相应的 MPBP 表示 (5)。由于第 II–IV 章中 [22] 的所有陈述都适用于部分伯恩赛德群，它们也适用于 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$。我们将需要在 [22] 中为任意部分伯恩赛德群证明的以下引理。我们在这里特别针对群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 进行陈述。

引理 10 (引理 IV.3，[22]). *令 W 是字母表 S 上的任意一个单词。假设 U 是最短的一个单词，使得 W 在群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 中与 U 的某个幂共轭。如果字母 $s \in S^{\pm 1}$ 出现在 U 中，则它也必须出现在 W 中。*

由于群 $\mathcal{F}$ 由元素 b_1, b_2 生成，以下陈述直接来自于引理 10。

引理 11. *令 U 为表示 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 中长度最短的元素 $u \in \mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 的循环简约词。如果 u 与某个元素 $w \in \mathcal{F} < \mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 共轭，则词 U 是生成元 b_1, b_2 中的一个词。*

如果我们用正则约简替换 U 的循环约简条件，我们得到以下结果：

引理 12. *令 U 表示 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 中某个元素 $u \in \mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 的最短简约词。如果 u 与某个元素 $w \in \mathcal{F}$ 共轭，则存在字母表 $\{b_1, b_2\}$ 中的一个词 U_1 和字母表 S 中的一个词 V，使得 $U = VU_1V^{-1}$。因此，*

$$|U|_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}} = |U_1|_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}} + 2|V|_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}} = |U_1|_{\mathcal{F}} + 2|V|_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}.$$

4 关于秩为 3 的自由伯恩赛德群的增长

正如 S.I.Adian 所展示的，自由伯恩赛德群 $B(m, n)$ 在奇数 $n \geq 665$ 和 $m > 1$ [13, Ch. VI, Theorem 2.15] 的情况下具有指数增长。此外，$B(m, n)$ 具有一致的指数增长（参见 [23]，推论 3）。Adian 的专著中已经为 $m = 2$ 建立了显式的增长率估计。在本节中，为了我们的需求，我们将此估计扩展到 $m = 3$。$m = 3$ 的估计与 $m = 2$ 的情况类似获得。为完整起见，我们给出了所需估计的证明。令 $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ 表示 $B(3, n)$ 的一组生成元，$\gamma = \gamma_{B(3,n);S}$ 是 $B(3, n)$ 的增长函数。

命题 1. 对于所有奇数 $n \geq 665$ 和自然数 s

$$\gamma(s) > \frac{3}{2}(4.9)^s - 1.$$

证明。该群字母表由 6 个字母组成：$\{a_1, a_2, a_3, a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3^{-1}\}$。令 $\overline{\gamma}(s)$ 表示长度为 s 的元素在 $B(3,n)$ 中的数量，令 $\beta(s)$ 表示不包含形式为 A^8 的子词的长度为 s 的简约词的数量。根据定义 4.34 ([13, Ch.I]) 所有这些词都是绝对简约的。因此，这些不同的单词代表了 $B(3,n)$ 的不同元素。因此，如同定理 2.15 的证明 [13, Ch.VI] 中所述，我们得出结论

$$\overline{\gamma}(s) \geq \beta(s).$$

对于 $s \geq 8i$，记 $\delta_i(s)$ 为形式为 XB^8 的约化字的数量，其中 $i = |B|, s = |XB^8|$，并且 X 不包含形式为 A^8 的子词。显然，

$$\delta_i(s) \leq \beta(s - 8i)6^i.$$

为了估计 $\beta(s+1)$，即不包含形式为 A^8 的子词的简约词的数量，我们注意到长度为 $s+1$ 的每个简约词是通过将字母表中的 5 个不是最后一个字母的逆元的字母附加到长度为 s 的词上得到的。此外，如果形式为 A^8 的词没有出现在词 Y 中，则此类词只能出现在 Ya 的末尾，其中 a 是任意字母。因此，

$$\beta(s+1) \geq 5\beta(s) - \sum_{i=1}^{[\frac{s+1}{8}]} \delta_i(s+1) \geq 5\beta(s) - \sum_{i=1}^{[\frac{s+1}{8}]} \beta(s+1-8i) \cdot 6^i, \tag{6}$$

其中 $[\frac{s+1}{8}]$ 是 $\frac{s+1}{8}$ 的整数部分。现在我们通过归纳法证明

$$\beta(s+1) > 4.9\beta(s) \tag{7}$$

，其中归纳的对象是 s。对于 $0 < s < 7$，不等式显然是成立的，因为在这种情况下 $\beta(s+1) = 5\beta(s)$ 成立。假设对于 $s < t$ 不等式成立。然后对于 $1 \leq i \leq [\frac{t+1}{8}]$

$$\beta(t) > 4.9\beta(t-1) > \cdots > (4.9)^{8i-1}\beta(t-(8i-1)),$$

因此

$$\beta(t-(8i-1)) < \frac{\beta(t)}{(4.9)^{8i-1}}.$$

从后一个不等式和 (6)，我们得到

$$\beta(t+1) \geq 5\beta(t) - \sum_{i=1}^{[\frac{t+1}{8}]} \frac{\beta(t)\cdot 6^i}{(4.9)^{8i-1}} \geq \beta(t)\left(5 - 4.9\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{6}{(4.9)^8}\right)^i\right) > 4.9\beta(t).$$

由于 $\beta(1) = 6$，从 (7) 我们获得

$$\beta(s) \geq 6\cdot(4.9)^{s-1},$$

从而

$$\overline{\gamma}(s) \geq 6\cdot(4.9)^{s-1}$$

对于任意的 $s > 0$。最后，我们得到

$$\gamma(s) = 1 + \sum_{i=1}^{s}\overline{\gamma}(i) \geq 1 + 6\sum_{i=1}^{s}(4.9)^{i-1} \geq 1 + \frac{3}{2}((4.9)^s - 1) > \frac{3}{2}(4.9)^s - 1.$$

5 定理的证明 1

定理 1的陈述 2 的证明。 恒等式 $x^n = 1$ 在群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 中不成立，因为它在其子群 $\mathcal{F}$ 中失效。

定理 1的陈述 1 的证明。 让我们证明 $x^n = 1$ 是群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 中的一个 M-概率恒等式。令 $B_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(r)$ 表示群 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 的凯莱图中关于生成集 $\{b_1^{\pm1}, b_2^{\pm1}, a^{\pm1}\}$ 的半径为 r 的球，并且令 $B_{\mathcal{F}}(r)$ 表示群 $\mathcal{F}$ 的凯莱图中关于其生成集 $\{b_1^{\pm1}, b_2^{\pm1}\}$ 的半径为 r 的球。给定群 G 的增长函数将表示为 $\gamma_G(r) = |B_G(r)|$。我们可以利用秩为 3 的自由群的增长来从上方估计 $\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(r)$:

$$\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(r) \leq \gamma_{F_3}(r) = 1 + \frac{3(5^r-1)}{2} < \frac{3}{2}\cdot 5^r.$$

另一方面，由于 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 是一个 3 生成元的 n-挠群（参见 (4)），因此 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 允许有一个到自由伯恩赛德群 $B(3,n)$ 的满同态。因此，$\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(r)$ 不小于 $\gamma_{B(3,n)}(r)$。使用在第 4节中获得的 $\gamma_{B(3,n)}$ 的估计值，我们得到：

$$\frac{3}{2}\cdot(4.9)^r-1<\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(r)<\frac{3}{2}\cdot 5^r.$$

令 D 为所有元素 $g\in\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 的集合，其中 $g^n\neq 1$ 在 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 中。在球 $B_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(k)$ 中不满足方程 $x^n=1$ 的元素数量等于 $|B_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(r)\cap D|$。因此，由引理 12，我们有：

$$B_G(r)\cap D=\bigcup_{i=0}^{r}\left\{UXU^{-1}\mid X\in B_{\mathcal{F}}(i),U\in B_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}\left(\frac{r-i}{2}\right)\right\}. \tag{8}$$

考虑到 (8)，我们得到

$$\mid B_G(r)\cap D\mid\leq\sum_{i=0}^{r}\gamma_{\mathcal{F}}(i)\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}\left(\frac{r-i}{2}\right)\leq\sum_{i=0}^{r}2\cdot 3^i\cdot\frac{3}{2}5^{\frac{r-i}{2}}=$$

$$=3\sqrt{5}^r\sum_{i=0}^{r}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^i=3\sqrt{5}^r\frac{(\frac{3}{\sqrt{5}})^{r+1}-1}{\frac{3}{\sqrt{5}}-1}.$$

因此，对于 Cayley 图 $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ 中 r 球内 $x^n=1$ 成立的概率，我们有：

$$\frac{|B_G(r)\cap D|}{|B_G(r)|}\leq\frac{2\cdot 3^{r+1}}{(3-\sqrt{5})\cdot((4.9)^{r-1}-1)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0.$$

从而，定理 1的陈述 1 得证。

定理 1的陈述 3 的证明。 假设对于某个 $\mathcal{P}\neq\mathcal{P}'$，群 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}'}$ 是同构的。那么，根据引理 5，群 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 包含一个与 $\mathcal{F}(n,\mathcal{P}')$ 同构的子群。换句话说，$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 包含两个元素 u_1',u_2'，它们生成一个与 $\mathcal{F}(n,\mathcal{P}')$ 同构的子群。此外，由于对于 $\mathcal{P}'\neq\mathcal{P}''$，群 $\mathcal{F}(n,\mathcal{P}')$ 和 $\mathcal{F}(n,\mathcal{P}'')$ 不同构，相应的生成元对 (u_1',u_2') 和 (u_1'',u_2'') 是不同的（$\langle u_1',u_2'\rangle\simeq\mathcal{F}(n,\mathcal{P}')$，$\langle u_1'',u_2''\rangle\simeq\mathcal{F}(n,\mathcal{P}'')$）。在可数群 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 中，元

素的不同对的集合 (u_1', u_2') 是可数的。因此，与给定群 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 同构的群集至多是可数的。由于各种素数集合的子集 $\mathcal{P}$ 所对应的非同构群集合 $\mathcal{F}(n, \mathcal{P})$ 是不可数的（见 [13, Chapter VII]，命题 2.17），因此对于不同的 $\mathcal{P}$，非同构群集合 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 也是不可数的。

致谢

V.S. Atabekyan 和 V.H.Mikaelian 的工作得到了亚美尼亚高等教育与科学委员会的支持，研究项目编号为 25RG-1A187，A.A. Bayramyan 的工作同样得到了亚美尼亚高等教育与科学委员会的支持，研究项目编号为 23AA-1A028。

参考文献

[1] W. H. Gustafson. What is the Probability that Two Group Elements Commute?, The American Mathematical Monthly, 80(9), 1031 – 1034, 1973. https://doi.org/10.1080/00029890.1973.11993437

[2] R.M. Guralnick and J.S. Wilson, The probability of generating a finite soluble group, Proc. London Math. Soc. (3) 81 (2000), no.2., 405–427.

[3] Amir, G., Blachar, G., Gerasimova, M., Kozma, G. (2023). Probabilistic Laws on Infinite Groups (arXiv:2304.09144). arXiv. http://arxiv.org/abs/2304.09144

[4] Y. Antoln, A. Martino and E. Ventura. Degree of commutativity of infinite groups. https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.07269

[5] Matthew C.H.Tointon. Commuting probabilities of infinite groups. Journal of the London Mathematical Society,101(3):1280 – 1297, 2020.

[6] Y. Antoln, A. Martino and E. Ventura. Degree of commutativity of infinite groups, Proc. Amer. Math. Soc. 145(2) (2017), 479–485.

[7] S.I. Adian, Random walks on free periodic groups, Math. USSR-Izv., 21:3 (1983), 425 − 434

[8] G. Goffer, B. E. Greenfeld, A. Yu. Olshanskii, (2024). Asymptotic Burnside laws. https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.09630

[9] V. S. Atabekyan, A. A. Bayramyan, Probabilistic Identities in n-Torsion Groups, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences) 59:6 (2024), 455-459.

[10] W.Woess, Random Walks on Infinite Graphs and Groups. Cambridge University Press (2000)

[11] S. I. Adian, Periodic products of groups, Proc. Steklov Inst. Math., 142 (1979), 1-19.

[12] S. I. Adian, Infinite irreducible systems of group identities, Math. USSR-Izv., 4:4 (1970), 721 − 739

[13] S. I. Adian, The Burnside Problem and Identities in Groups, Springer-Verlag, 1979.

[14] V.H. Mikaelian, On finitely generated soluble non-Hopfian groups, an application to a problem of Neumann, International Journal of Algebra and Computation, 17 (2007), 5-6, 1107–1113.

[15] V.H. Mikaelian, On finitely generated soluble non-Hopfian groups, Journal of Mathematical Sciences (Springer), 166 (2010), 6, 743–755.

[16] V.H. Mikaelian, Subvariety structures in certain product varieties of groups, Journal of Group Theory, 21 (2018), 5, 865–884.

[17] H. Neumann, Varieties of Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer, Berlin, 1967.

[18] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian, Izv. RAN. Ser. Mat., 81:5 (2017), 3 − 14.

[19] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, Periodic product of groups, Journal of contemporary mathematical analysis, 52 (3) (2017), 111 − 117 .

[20] S.I. Adian, V.S. Atabekyan, Characteristic properties and uniform non-amenability of n-periodic products of groups , Izv. Math., 79:6 (2015), 1097–1110.

[21] S. I. Adian, V. S. Atabekyan. n-torsion groups. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 54 (6) (2019), 319 − 327.

[22] N. S. Boatman, Partial-Burnside groups (Dissertation), 2012, http://hdl.handle.net/1803/14921

[23] V. S. Atabekyan, Uniform non-amenability of subgroups of free Burnside groups of odd period, Math. Notes, 85:4 (2009), 496–502.