

微波处理捕获钙离子中的里德堡态

H. BAO¹, A. SCHULZE-MAKUCH¹ and F. SCHMIDT-KALER^{1,2}

¹ *QUANTUM, Institut für Physik, Universität Mainz, D-55128 Mainz, Germany*

² *Helmholtz-Institut Mainz, D-55128 Mainz, Germany*

PACS 32.80.Ee – Rydberg states

PACS 33.40.+f – Multiple resonances

PACS 37.10.Ty – Ion trapping

摘要 – 我们使用光学和微波场来激发被捕获的冷 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子中的里德堡态。我们采用单个离子，在主量子数 $n=49$ 的能级中通过光谱学观察 S 和 P 角动量状态的里德堡态的着装。我们将实验光谱与多级计算的着装态进行了比较，发现有很好的 consistency。这些结果对于控制处于里德堡态的单个离子与离子阱中的电场之间的相互作用以及在里德堡态下的离子晶体中定制相互作用非常重要。

介绍和动机. – 里德堡原子具有独特的性质，其中价电子被激发到很高的主量子数 n 。原子波包的大小随 n^2 增加，相应的电偶极矩也按 n^4 的比例增加。弗里茨·伦敦推导出了由瞬时诱导偶极子之间的时间波动产生的分散力的量子力学理论，尽管这些偶极子在时间上是波动的，但仍导致了范德瓦尔斯势。对于被囚禁的里德堡离子，这种范德瓦尔斯相互作用仍然相当小：一对相距 4μ 米且 $n=50$ 的 Sr^+ 离子对的能量 $J \simeq 8.5$ kHz。然而，如果相互作用不是在波动偶极子之间，而是永久诱导偶极子之间的德拜力，则相互作用强度增加了几乎三个数量级至 $J \simeq 3.1$ MHz。对于中性里德堡原子，这种偶极-偶极相互作用可以通过使用斯塔克效应来调节，这一点早在 Daniel Kleppner [1] 和 Thomas F. Gallagher [2] 的研究中就被探讨过。在中性原子中，静态电场用于混合里德堡状态的手征，从而诱导出巨大的偶极-偶极相互作用。对于被限制在泡尔陷阱中的原子离子，在 x 、 y 和 z 方向上的电势捕获是谐振的，而离子则位于该电势的中心。应用一个静态附加电场只会改变谐振电势的中心，使得离子波包移动到一个新的零电场强度下的平衡位置。因此，静态电场不适合用来诱导被困离子里德堡态的手征中的偶极矩。

此前的工作 [3] 使用一对被困的 Sr^+ 离子已经表明，可以使用微波电场来修饰里德堡 S- 和 P- 能态集，并开启偶极子-偶极子相互作用。这种相互作用已被用于实现高速纠缠门，参见文献 [4]。然而，此双离子门操作的观察不忠实度为 23 % [3] 主要由施加微波场时功率不稳定主导。确实，被微波修饰过的里德堡状态能级依赖于微波拉比频率，因此良好的功率稳定性对实现高保真度的操作至关重要。在这封信中，我们使用单个 Ca^+ 离子，并通过激光激发至里德堡态，同时通过注入的微波电场修饰这些状态。我们观察到了奥特勒-汤恩斯分裂，并将我们的实验结果与计算进行比较。这种对比对于理解具有约 3.3 毫米波长的微波场如何与位于陷阱结构中心的离子相互作用是必不可少的，在该陷阱中，金属电极之间的距离仅为 0.75 毫米。我们推测注入的 TEM(0,0) 模态 MW 光束受到近场效应的强烈影响。这一推理符合我们在离子位置观察到的 MW 的寄生偏振效果。

该信函组织如下：在概述实验设置后，我们描述了用于获得光学和微波光谱的光谱序列。中心部分是对理论模型的详细比较，在此过程中我们考虑了由于保罗势引起的着装效应和四极位移。这导致了一个结论以及如

何在未来改进离子晶体上微波着装场应用的展望。

实验设置. — 单个离子被捕获在线性分段泡尔阱中, 该阱由用于通过直流电压捕获离子的 11 对镀金电极和一对用于射频驱动的电极组成, 这些电极在陷阱轴周围对称排列。从射频电极到陷阱结构中心的距离为 $750\ \mu\text{m}$ 。直流电极上的段由 $30\ \mu\text{m}$ 的绝缘间隙分隔开, 而段本身的宽度则从 $500\ \mu\text{m}$ 变化到 $1000\ \mu\text{m}$ 。直流电压的量级为 ± 10 伏特, 射频电压的振幅约为 500 伏特_{pp}。用于产生动态限制的射频电场是 $\omega_{RF} = 2\pi \times 14.1\ \text{MHz}$ 。三个方向上的结果拉普拉斯陷阱频率是 $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\} = 2\pi \times \{1.78, 2.10, 1.07\}\ \text{MHz}$ 。我们使用接近 397 纳米的激光源对 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子进行多普勒冷却, 使其平均声子数接近 10 , 略微红移至跃迁 $4S_{1/2} \rightarrow 4P_{3/2}$ 。我们在四极跃迁 $4S_{1/2} \leftrightarrow 4D_{5/2}$ 上使用近 729 纳米的激光进行了解谱边带冷却。在接近振动基态时, 任何里德堡激发的位移或展宽都会被抑制。我们使用两个接近 213 纳米和 287 纳米的激光源。此外, 我们可以应用接近 90 千兆赫的微波。这是由低相位噪声 MW 发生器产生的第 7^{th} 谐波, 通过喇叭天线发射, 并通过偏轴抛物面镜引导进入陷阱真空室的视窗。我们使用基于电线的偏振器控制偏振。所有激光源和微波源都可以通过计算机控制开关以驱动光谱序列。我们收集由激光诱导的荧光光并通过高 NA 物镜将其导向 EMCCD 相机进行检测。

钙的能量水平和光谱学序列. — $^{40}\text{Ca}^+$ 的能级, 见图 1(a), 允许在离子处于明亮状态 $|B\rangle = |4S_{1/2}\rangle$ 时进行检测。接近 $397\ \text{nm}$ 的激光源激发至 $|4P_{1/2}\rangle$ 状态, 并且荧光被检测到。如果通过接近 $729\ \text{nm}$ 的激光将离子转移到长寿命 (1.17 秒) 的亚稳态暗状态 $|D\rangle = |3D_{5/2}, m = -5/2\rangle$, 则不会发射共振荧光。从亚稳态出发, 并使用接近 213 纳米和 287 纳米的激光源, 我们通过中间状态 $|I\rangle = |5P_{3/2}, m = -3/2\rangle$ 耦合到了 Rydberg S 态 $|R_S\rangle = |49S_{1/2}, m = -1/2\rangle$ 。接近 213 纳米的激光被调谐到与状态 $|I\rangle$ 共振。由于该状态具有较短的寿命 (34.8 纳秒), 这将迅速将离子泵浦至 $|B\rangle$ 。随后, 当使用接近 397 纳米的激光激发时, 离子会发出荧光并被测量为明亮。然而, 如果一个强度较大的第二个激光接近 287 纳米, 并被调谐到与从 $|I\rangle$ 到 $|R_S\rangle$ 的跃迁共振, 则 Autler-Townes (AT) 效应 [5–7] 将使首次激发失谐, 从而降低光学泵浦速率。离子电子态将保持在 $|D\rangle$ 状态。此外, 如果 $|R_S\rangle$ 态通过一个 $\sim 90\ \text{GHz}$ 微波与 $49P_{1/2}$

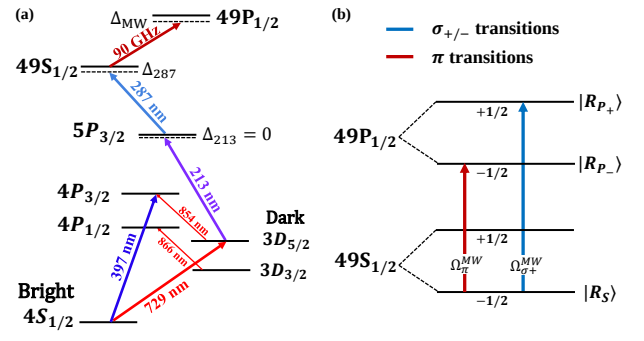


图 1: 能级和跃迁为 $^{40}\text{Ca}^+$ 。(a) 处于状态 $|B\rangle = |4S_{1/2}\rangle$ 的离子被近 397 纳米的激光激发, 并通过激光诱导荧光检测到。近 866 纳米和 854 纳米的激光源将离子从亚稳态 D 能级泵浦至 $|B\rangle$ 。近 729 纳米的激光用于相干地将离子状态转移到亚稳态 $|D\rangle = |3D_{5/2}, m = -5/2\rangle$ 。电磁诱导透明 (EIT) 阶梯结构在状态 $|D\rangle$ 、中间态 $|I\rangle = |5P_{3/2}, m = -3/2\rangle$ 和由接近 $213\ \text{nm}$ 和 $287\ \text{nm}$ 的激光耦合的里德堡 S 态 $|R_S\rangle = |49S_{1/2}, m = -1/2\rangle$ 之间建立。里德堡 S 态和 P 态被接近 $90\ \text{GHz}$ 的微波场所调控。(b) Rydberg 态的 Zeeman 子能级及微波耦合: 状态 $|R_S\rangle$ 通过激光源被激发, 并通过 π 极化 (红色) 耦合到 $|R_{P-}\rangle = |49P_{1/2}, m = -1/2\rangle$, 或者通过 $\sigma+$ 极化 (蓝色) 耦合到 $|R_{P+}\rangle = |49P_{1/2}, m = +1/2\rangle$ 态。

耦合, 这种耦合会诱导从 $|I\rangle \leftrightarrow |R_S\rangle$ 的跃迁产生非共振的 AT 效应。因此, 这影响了从 $|D\rangle \leftrightarrow |I\rangle$ 的跃迁的 Autler-Townes 效应, 并且从而降低了光抽运到电子基态 $|B\rangle$ 的速率。

利用单个离子在 $|B\rangle$ 状态下的高保真态检测, 可以检测到许多荧光光子, 或者在 $|D\rangle$ 状态下不检测到光子, 我们可以实现结合光学和微波光谱学。实验序列如下: 多普勒冷却 10 毫秒, 随后分辨边带冷却 2.3 毫秒, 通过快速绝热通道 (RAP) 在 0.2 毫秒内将接近 729 纳米的转移脉冲转移到 $|D\rangle$ 状态, 并使用接近 213 纳米和 287 纳米的激光以及矩形微波脉冲与里德堡耦合, 持续时间为 $150\ \mu\text{s}$ 。

微波极化决定了状态 $|R_S\rangle$ 如何与 $49P_{1/2}$ 的塞曼子能级耦合, 我们将其表示为 $|R_{P-}\rangle$ 和 $|R_{P+}\rangle$, 参见图 1(b)。使用网格线偏振器, 将微波极化设置为线性。微波在 x - z 平面传播, 并以 $\pi/4$ 角度撞击离子与陷阱 z 轴。我们在微波传播方向上施加一个 560 毫特斯拉的磁场以简化耦合方案, 因为线性偏振场仅分解为 $\sigma+$ 和 $\sigma-$ 偏振。被光场激发的状态 $|R_S\rangle$, 通过 $\sigma+$ 极化与 $\Omega_{\sigma+}^{MW}$ 到 $|R_{P+}\rangle$ (蓝色箭头) 耦合, 但导致 Ω_{π}^{MW} 接近零的场不应包含 π 极化。

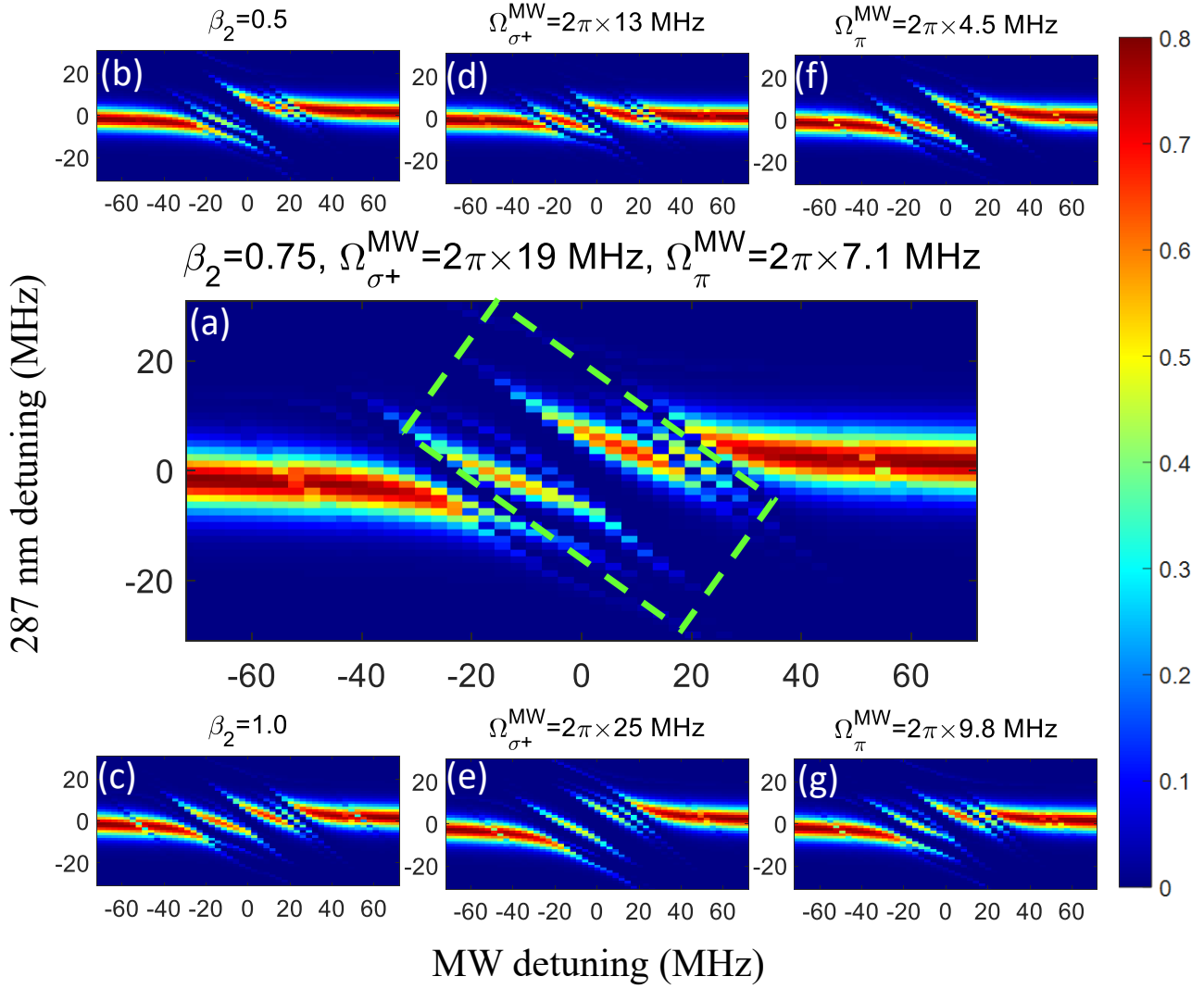


图 2: 演化时间为 $150 \mu s$ 时, 不同参数选择下的暗态概率数值结果 (a) 数值结果与优化的参数 $\beta_2 = 0.75, \Omega_{\sigma+}^{MW} = 2\pi \times 19 \text{ MHz}, \Omega_{\pi}^{MW} = 2\pi \times 7.1 \text{ MHz}$ 。中心的绿色虚线矩形是用于优化参数的数据区域。(b-c) 调整 β_2 参数的同时控制其他两个参数的数值结果。(d-e) 数值结果在调整 $\Omega_{\sigma+}^{MW}$ 而控制其他两个参数的情况下。(f-g) 数值结果在调整 Ω_{π}^{MW} 而控制其他两个参数的情况下。

微波调控里德堡态的理论模型。 — 我们初始化离子的电子状态为 $|D\rangle$ 。考虑到与激光和微波场相互作用的能量级, 旋转波近似后的哈密顿量可以写成

$$H = H_E + H_R \quad (1)$$

其中 H_E 描述了阶梯配置内的相互作用, 包括暗态 $|D\rangle$ 、中间态 $|I\rangle$ 和里德堡 S 态 $|R_S\rangle$ 。

$$H_E = \frac{\hbar}{2}(\Omega_{213}|D\rangle\langle I| + \Omega_{287}|I\rangle\langle R_S|) + h.c. - \hbar\Delta_{287}|R_S\rangle\langle R_S| \quad (2)$$

Ω_{213} 和 Ω_{287} 表示近 213 纳米 和 287 纳米 激光驱动的拉比频率, 参见图 1。 Δ_{287} 是近 287 纳米 激光相对于跃

迁 $|I\rangle \leftrightarrow |R_S\rangle$ 的失谐量, 而我们设定近 213 纳米 激光相对于跃迁 $|D\rangle \leftrightarrow |I\rangle$ 的失谐量为零。微波介导的 $|R_S\rangle$ 和里德堡 P 能级 $|R_{P+,-}\rangle = |49P_{1/2}, m = \pm 1/2\rangle$ 之间的相互作用写为

$$H_R = \hbar(H_{R_{P+}} + H_{R_{P-}}) = \hbar\left(\frac{\Omega_{\sigma+}^{MW}}{2}|R_{P+}\rangle\langle R_S| + h.c. - \Delta_+|R_{P+}\rangle\langle R_{P+}|\right) + \hbar\left(\frac{\Omega_{\pi}^{MW}}{2}|R_{P-}\rangle\langle R_S| + h.c. - \Delta_-|R_{P-}\rangle\langle R_{P-}|\right) \quad (3)$$

由于我们已经仔细调整了微波极化和传播方向相对于磁场的方向, 微波应该只耦合从 $|R_S\rangle \leftrightarrow |R_{P+}\rangle$ 的

跃迁。解主方程时忽略 $|R_{P-}\rangle$ ，我们得到了如图 2(a) 所示的着装态之间的平凡的避免交叉配置，即在 $|R_S\rangle$ 和 $|R_{P+}\rangle$ 之间。

然而，实验结果呈现出更复杂的模式。我们发现这源于电四极矩调制，其中离子的莱曼状态经历了保罗阱的射频振荡电场，频率为 $\omega_{RF} = 2\pi \times 14.1$ MHz。陷阱驱动的空间分布呈电四极矩形式。由于 $49P_{1/2}$ 的四极矩极化率，离子能级以频率 ω_{RF} 和 $2\omega_{RF}$ [8,9] 调制，幅度为 E_1 和 E_2 。由于 $E_2 \gg E_1$ ，额外的振荡项可以简化为

$$H_M(t) = E_2 \cos(2\omega_{RF}t) (|R_{P+}\rangle\langle R_{P+}| + |R_{P-}\rangle\langle R_{P-}|) \quad (4)$$

我们可以通过 Trotter 公式 [10] 来求解主方程，这意味着将演化算子分解为小时间片内算子乘积的形式如下：

$$U_{all} = \hat{P} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t (H + H_M(\tau)) d\tau\right) \approx \prod_j \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (H + H_M(\tau_j)) \Delta\tau\right) \quad (5)$$

其中 $\hat{P}$ 是时序算子， $\Delta\tau$ 是时间片的间隔， τ_j 是第 j 个时间片的时间。从另一个角度看，我们可以进入 H_M 的相互作用图像。相应的么正算符可以展开为

$$U_M = e^{i \int_0^t H_M \tau d\tau / \hbar} = \sum_k \mathcal{J}_k(\beta_2) e^{i2k\omega_{RF}t} (|R_{P+}\rangle\langle R_{P+}| + |R_{P-}\rangle\langle R_{P-}|) \quad (6)$$

其中， $\beta_2 = \frac{E_2}{2\hbar\omega_{RF}}$ 表示调制深度， $\mathcal{J}_k$ 是第一类 k 阶贝塞尔函数。最后，在相互作用图像中的微波着装项变为

$$U_M H_R U_M^\dagger = -\hbar (\Delta_+ |R_{P+}\rangle\langle R_{P+}| + \Delta_- |R_{P-}\rangle\langle R_{P-}|) + \hbar \mathcal{J}_k(\beta_2) \frac{\Omega_{\sigma+}^{MW} e^{i2k\omega_{RF}t}}{2} |R_{P+}\rangle\langle R_S| + h.c. + \hbar \mathcal{J}_k(\beta_2) \frac{\Omega_{\pi}^{MW} e^{i2k\omega_{RF}t}}{2} |R_{P-}\rangle\langle R_S| + h.c. \quad (7)$$

因此，我们看到里德堡 P 态能量的调制可以被视为如果微波携带多个频率成分，间隔为 $2\omega_{RF}$ 。在我们的实验中，对于一个典型的值 $\beta_2 \approx 0.8$ ，其贡献是 $|\mathcal{J}_2(\beta_2)| \approx 0.031$ 和 $|\mathcal{J}_3(\beta_2)| \approx 0.0026$ 。因此，高阶频率调制分量的幅度可以忽略不计。

实验结果与理论比较。 — 实验结果如图 3(b) 所示。左侧和右侧的图案类似于平凡的避免交叉配置，因为它

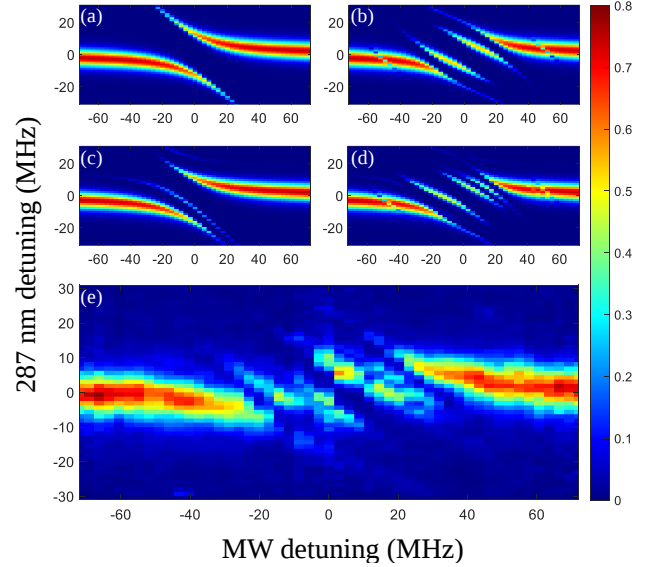


图 3: (a) $|R_S\rangle$ 和 $|R_{P+}\rangle$ 之间的着装态与纯 σ_+ 极化耦合，其中我们忽略四极调制。(b) 着装态在 $|R_S\rangle$, $|R_{P-}\rangle$ 和 $|R_{P+}\rangle$ 之间，其中微波场的弱寄生 π 极化已被包括。(c) 考虑到四极调制后的着装态，用于纯 σ_+ 极化。(d) 与 (c) 相同，但包含同时具有 σ_+ 偏振和微弱残留的 π 偏振的微波场。在 (d) 中使用的参数是： $\beta_2 = 0.8, \Omega_{\sigma+}^{MW} = 2\pi \times 25$ MHz, $\Omega_{\pi}^{MW} = 2\pi \times 8.9$ MHz, $\Omega_{213} = 2\pi \times 0.23$ MHz, $\Omega_{287} = 2\pi \times 12$ MHz。

(e) 相互作用后暗态概率的实验结果。150 μs

们对应于微波远失谐的情况，此时微波 AT 效应太弱而不能干扰 287 纳米 AT 效应。因此，213 纳米泵浦效应被接近 287 纳米的 AT 效应强烈禁止。结果，离子有很大的概率处于暗态 $|D\rangle$ 中。

对于微波频率接近共振的情况，对应于图 3(b) 的中心区域，我们在中心位置发现了两条宽且对角线状的条带。它们可以由四极调制 $H_M(t)$ 来解释。我们知道从方程 (7) 中得知，四极调制会产生间隔为 $2\omega_{RF}$ 的多个频率成分。在某些参数下，微波的不同频率成分产生的交流斯塔克位移相互抵消。因此，接近 287 纳米时对 AT 效应的干扰较弱，同样对于接近 213 纳米激光的泵浦效果也较弱，使得离子有很大概率保持在 $|D\rangle$ 状态。这一论点通过数值模拟结果得到了证实，请参见图 2(c)，并与图 2(a) 进行比较。

除了宽条纹外，我们在实验数据中观察到了两条额外的窄斜线。它们可以通过寄生微波 π -偏振激发到 $|R_{P-}\rangle$ 来解释。 $|R_{P-}\rangle$ 和 $|R_{P+}\rangle$ 的能量由于磁场和电场而分裂。与 $|R_{P-}\rangle$ 的耦合也对 $|R_S\rangle$ 应用了 AT 效应，诱导出两条窄线。这也通过我们的数值结果得到了证实，

如图 2(d) 所示, 并与图 2(c) 进行比较。寄生残留微波 π 极化可能是由于微波的近场分量不平行、MW 干扰或金属陷阱电极引起的反射造成的。通过与实验数据的对比, 我们可以确定寄生微波 π -极化的比例。参数为 $\beta_2 = 0.8$, $\Omega_{\sigma+}^{MW} = 2\pi \times 25$ MHz, $\Omega_{\pi}^{MW} = 2\pi \times 8.9$ MHz, $\Omega_{213} = 2\pi \times 0.23$ MHz, $\Omega_{287} = 2\pi \times 12$ MHz, 见图 3(d)。 Ω_{213} 和 Ω_{287} 是通过拟合相应的激光光谱数据 (未加微波修饰) 得到的。

调整其他三个参数 β_2 、 $\Omega_{\sigma+}^{MW}$ 和 Ω_{π}^{MW} , 使数值结果与实验一致, 所有参数由此确定。例如, 参数 β_2 的值由中心宽斜纹的强度决定, 参数 Ω_{σ}^{MW} 的值影响左侧和右侧两个主要分支的弯曲程度, 而参数 Ω_{π}^{MW} 的值决定了紧挨着宽条纹的窄线的强度。

为了确定参数的准确性, 我们选择数值结果中的中心区域 (如图 2(a) 所示的绿色虚线矩形), 并与实验结果进行比较。我们将数据在左上方的方向上分箱处理, 即, 沿着矩形的长边方向以增加信噪比。这导致得到一个平均包络线, 揭示了包括宽频和窄频特征在内的中心结构。数值结果和实验结果的包络线分别表示为 V_{num} 和 V_{exp} 。我们使用这两个包络线之间的差异 $D = \sum((V_{num} - V_{exp})^2)$ 来量化理论与实验数据的拟合程度, 并且在优化参数下达到最小值 $\min(D) = 0.065$, 参见图 2(a)。实验中的 $1 - \sigma$ 误差对应于 D 的不确定性为 $\sigma(D) = 0.007$ 。因此, 我们可以将参数的不确定性分配为 $\beta_2 = 0.75_{-0.11}^{+0.08}$, $\Omega_{\sigma+}^{MW} = 2\pi \times 19_{-1.5}^{+2.0}$ MHz, $\Omega_{\pi}^{MW} = 2\pi \times 7.1_{-1.3}^{+1.2}$ MHz。

结论与展望. — 我们获得了里德堡态的 MW 混合, 并在单个受限冷离子实验中获得了 Autler-Townes 谱。该方法提供光谱数据, 但即使在我们的室温实验中, 也不会受到黑体光子诱导离子损失的影响。我们从理论上对 AT 谱进行建模, 包括光学多光子里德堡激发、微波调谐以及由 Paul 陷阱的动态势引起的 RF 四极调制。我们能够用我们的模型拟合实验结果, 并从这个比较中准确地推导出所有实验参数值。整个数据采集运行时间为五天, 因此我们得出结论, 该装置的整体稳定性良好, 但值得注意的是, 输送到离子的 MW 的长期稳定性也足以保持参数稳定。从我们的数据中我们发现, 即使注入了具有适当极化的 MW 波束, 陷阱电极的附近似乎会影响微波极化纯度。因此, 我们推测, 未来, 集成在陷阱芯片设计中的微波天线可能具有优势。此外, 我们计划通过增加径向约束来抑制四极调制, 以

达到调制指数 $\beta_2 = 3.8$, 这标志着相应的贝塞尔函数 $J_{\pm 1}(\beta_2) \approx 0$ 的零点。对于这样的参数, 一阶频率分量消失, 代价是适度的二阶分量 [8, 11]。从长远来看, 使用 Penning 陷阱进行离子晶体的里德堡激发可以减轻里德堡-四极调制的效应, 因为在这种陷阱中, 只有静态电场和静态磁场用于约束。

我们感谢 Jonas Vogel 博士的讨论。我们承认德国科学基金会 (DFG) 在 SPP 1929 巨相互作用在里德堡系统 (GiRyd) 项目以及 ERC 协同资金下的“开放二维量子模拟器”项目中的经济支持。

参考文献

- [1] Michael Courtney, Neal Spellmeyer, Hong Jiao, and Daniel Kleppner. Classical, semiclassical, and quantum dynamics in the lithium Stark system. *Phys. Rev. A*, 51:3604–3620, May 1995.
- [2] Thomas F. Gallagher and Pierre Pillet. Dipole – dipole interactions of Rydberg atoms. In *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, volume 56 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 161–218. Academic Press, 2008.
- [3] Chi Zhang, Fabian Pokorny, Li Weibin, Gerard Higgins, Andreas Pöschl, Igor Lesanowsky, and Markus Hennrich. Submicrosecond entangling gate between trapped ions via Rydberg interaction. *Nature*, 580:345, 2020.
- [4] Weibin Li and Igor Lesanowsky. Entangling quantum gate in trapped ions via Rydberg blockade. *Appl. Phys. B*, 114:37, 2014.
- [5] Claude N. Cohen-Tannoudji. *The Autler-Townes Effect Revisited*, pages 109–123. Springer New York, New York, NY, 1996.
- [6] Liping Hao, Yuechun Jiao, Yongmei Xue, Xiaoxuan Han, Suying Bai, Jianming Zhao, and Georg Raithel. Transition from electromagnetically induced transparency to Autler–Townes splitting in cold cesium atoms. *New Journal of Physics*, 20(7):073024, 2018.
- [7] Tony Y. Abi-Salloum. Electromagnetically induced transparency and Autler-Townes splitting: Two similar but distinct phenomena in two categories of three-level atomic systems. *Phys. Rev. A*, 81:053836, May 2010.
- [8] Gerard Higgins, Chi Zhang, Fabian Pokorny, Harry Parke, Erik Jansson, Shalina Salim, and Markus Hennrich. Observation of second- and higher-order electric

- quadrupole interactions with an atomic ion. *Phys. Rev. Res.*, 3:L032032, Aug 2021.
- [9] T. Feldker, P. Bachor, M. Stappel, D. Kolbe, R. Gerritsma, J. Walz, and F. Schmidt-Kaler. Rydberg excitation of a single trapped ion. *Phys. Rev. Lett.*, 115:173001, Oct 2015.
- [10] H. F. Trotter. On the product of semi-groups of operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 10(4):545–551, 1959.
- [11] Lachezar S Simeonov, Nikolay V Vitanov, and Peter A Ivanov. Compensation of the trap-induced quadrupole interaction in trapped Rydberg ions. *Scientific Reports*, 9(1):7340, 2019.