

174mm
247mm

arxiv:2504.21285v1 中译本

内部重力波的感应扩散：方向性和在海洋混合中的作用

Yue Wu^{1†}, and Yulin Pan¹

¹Naval Architecture and Marine Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA

(Received xx; revised xx; accepted xx)

感应扩散 (ID) 是内重力波 (IGW) 场中光谱能量传递的重要机制, 在驱动海洋内部湍流耗散方面发挥着重要作用。在这项研究中, 我们重新审视了 ID 机制, 以阐明其方向性及其在不同 IGW 光谱形式下的混合作用, 并特别关注偏离标准 Garrett-Munk (GM) 频谱的偏差。McComas 等人提出的关于 ID 作为动作扩散过程的原始解释表明, ID 本质上是双向的, 其方向由 IGW 动作光谱 $n \propto m^\sigma$ 的垂直波数光谱斜率 σ 决定。相比之下, 通过评估波动动能方程, 我们揭示了 ID 更完整的描述, 其中包括基于波动三联体内能量守恒的扩散和尺度分离转移。尽管根据 σ 的符号 (即红谱和蓝谱情况之间) 动作扩散的方向可能会反转, 但组合后的 ID 传输始终导致在耗散尺度上的前向能量级串, 从而正向贡献于湍流耗散。这支持了物理海洋学中将 ID 视为一种耗散机制的观点。本研究提供了对 ID 的物理基础概述, 并为负责湍流耗散的具体波动-波动相互作用类型提供了见解。

Key words: 内部重力波, 波湍流理论, 波动力方程, 非线性波, 波-波相互作用

1. 介绍

内波 (IGWs) 是海洋普遍存在的特征, 当分层流体受到扰动时会产生内波。海洋中的 IGW 场主要通过大气和潮汐力在大尺度上获得能量, 并在小尺度上耗散。鉴于强迫与耗散之间的尺度分离, 跨尺度能量传递对于维持贯穿 IGW 连续谱的能量级联至关重要。促进这种跨尺度能量传递的机制包括波动-波动相互作用 (例如 Hasselmann 1966; Hasselmann *et al.* 1967)、波动-平均/涡度相互作用 (例如 Kafiabad *et al.* 2019;

[†] Email address for correspondence: ywu.ocean@gmail.com

Abstract must not spill onto p.2

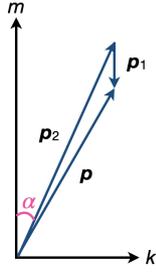


图 1: 一个典型的由感应扩散机制引起的共振波三联体 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ 。波数矢量与垂直方向之间的角度 α 根据色散关系正相关于波频率。

Dong *et al.* 2020, 2023; Savva *et al.* 2021; Delpéch *et al.* 2024) 和底部散射 (例如 Kunze & Llewellyn Smith 2004)。在这些途径中, 许多研究认为波动-波动相互作用是海洋内部的主要过程 (Polzin & Lvov 2011; Polzin *et al.* 2014)。

通过波与波相互作用研究跨尺度能量传输的先驱是 McComas 在一系列出版物等人。中的工作 (McComas & Bretherton 1977a; McComas 1977; McComas & Müller 1981a,b)。这些工作提出, 跨尺度能量传输主要受三种非局部相互作用 (即在垂直波数、频率或两者上具有尺度分离的波动三元组) 所主导, 分别是参数次谐不稳定 (PSI)、弹性散射 (ES) 和诱发扩散 (ID)。这一框架为微细尺度参数化奠定了理论基础, 以推断湍流耗散 (Heney *et al.* 1986; Gregg 1989; Polzin *et al.* 1995, 2014), 但最近的研究表明由于忽略了局部相互作用 (Dematteis *et al.* 2022; Wu & Pan 2023) 的角色而存在错误。

本工作侧重于诱导扩散机制, 这是三种非局部相互作用之一。ID 描述了高频高垂直波数波 \mathbf{p} 被低频低垂直波数波 \mathbf{p}_1 散射的过程, 通过共振相互作用生成另一个高频高垂直波数波 \mathbf{p}_2 (图 1)。小尺度下的动力学 (由 \mathbf{p} 和 \mathbf{p}_2 表示) 已经被证明在波作用量 n (定义为波能 E 除以固有频率 ω) 的层面上满足扩散方程, 驱动了垂直波数上的扩散级联过程。 m (McComas & Bretherton 1977b)

$$\frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial m} \left[D_{33} \frac{\partial}{\partial m} n(\mathbf{p}) \right]. \quad (1.1)$$

这里, $\mathbf{p} = (k_x, k_y, m)$ 表示三维 (3D) 波数矢量。垂直扩散率 D_{33} , 作为 3D 扩散张量的主要成分, 由大规模波动 \mathbf{p}_1 的剪切含量决定 (图 1) †。假设一个大规模的稳定场, 其中 $n(\mathbf{p}_1)$ 和 D_{33} 保持恒定, McComas & Müller (1981a) 利用 (1.1) 评估了向更高 m 的尺度能量通量, 在小尺度上对标准 Garrett-Munk (GM) 谱进行对数修正 ($n \propto -\ln(m)$)。随后, 湍流耗散通过跨过耗散尺度的能量通量来近似, 在该尺度上内波变得不稳定并断裂到小于 10 米的垂直尺度。结果, ID 估计占总三联相互作用引起的湍流耗散的大约 20% 部分, 其余归因于 PSI。

McComas 关于 ID 的观点在仔细审视下并非没有问题。对于在小尺度 (Cairns &

† 一个由 Lanchon & Cortet (2023) 提出的替代视角表明, ID 在波三联中保持了比率 $\omega/|m|$ 和 k/m^2 的恒定。

Williams 1976) 上由 $n \propto m^0$ 特征的 GM 光谱, 由于作用光谱在 m 中显示没有梯度, 因此 ID 消失。虽然次级扩散可以源自扩散张量 (Dematteis *et al.* 2022) 中的非对角分量, 但 ID 对总湍流耗散的相对贡献肯定远小于 McComas 假设的等人。对于偏离 GM 的光谱情况更加难以捉摸, 尽管在场测量中经常观察到这种情况 (Polzin & Lvov 2011)。由于扩散总是沿梯度下降方向进行, ID 有可能根据两个小尺度波 \mathbf{p} 和 \mathbf{p}_2 在单个三联体中的相对作用强度而改变方向 (图 1)。对于一个内重力波谱而言, 这个方向受垂直波数谱斜率 σ 在小尺度下的符号控制, 即作用光谱的 $n \propto m^\sigma$ 。具体来说, 对于具有正或负 σ 的蓝色或红色作用光谱, 小尺度的作用扩散分别对应于前向或后向级联。这是否意味着 ID 可以对湍流耗散产生负面影响? 这是一个令人困惑的问题, 特别是考虑到社区长期以来的一致意见认为 ID 是一种耗散机制, 因为无论是观测还是数值证据都没有报告涉及反向 ID 传输的场景 (例如, Pan *et al.* 2020; Skitka *et al.* 2024)。

在本文中, 我们旨在解决关于内波机制的混淆, 并发展对其在海洋混合中的作用的物理基础理解。我们的研究基于直接评估波动动能方程 (WKE), 该方程计算由波动与波动相互作用引起的能量转移, 以及一个选择标准以分离内波的贡献。我们证明对于类似 GM 的谱 (具体谱型总结于附录 A), 内波始终对湍流耗散有正面贡献。为了将这一结果与其可逆方向的推理相协调, 必须认识到除了由 (1.1) 描述的扩散传递之外, 内波还与尺度分离传递相关联。该尺度分离传递 (在大尺度波动 \mathbf{p}_1 和两个小尺度波动 \mathbf{p} 和 \mathbf{p}_2 之间; 图 1) 是能量守恒的直接结果, 因为扩散传递只守恒作用量但不守恒能量。穿过选定垂直尺度的能量通量是尺度分离和扩散传递共同作用的结果。对于在 m 红色或蓝色的动作谱, 扩散或尺度分离传递分别主导 10 米垂直尺度附近, 导致对海洋混合的持续正面影响。我们通过量化内波对总湍流耗散的相对贡献以及检查 WKE 结果与细尺度参数化之间的联系来得出结论。

2. 方法论

2.1. 波动力学方程

波动力学方程 (WKE) 描述了在弱非线性波相互作用下波动作谱的演化, 为理解能量在不同尺度间的传递提供了一个框架。对于内部重力波 (IGWs), WKE 由以下给出

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = & \iint 4\pi |V(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|^2 \mathcal{F}_{p12} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \\ & - \iint 8\pi |V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}, \mathbf{p}_2)|^2 \mathcal{F}_{1p2} \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

右端 (RHS) 的 (2.1), 即碰撞积分, 描述了在给定波数 \mathbf{p} 下波作用密度的时间演化, 这是由于与另外两个分量 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_2 之间的三联相互作用, 这两个分量满足共振条件 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \pm \mathbf{p}_2$ 和 $\omega = \omega_1 \pm \omega_2$ 。函数 $\mathcal{F}_{p12} = n_1 n_2 - n_p (n_1 + n_2)$ 和 $\mathcal{F}_{1p2} = n_p n_2 - n_1 (n_p + n_2)$

Focus on Fluids articles must not exceed this page length

在波作用方面是二次的，其中 n_p 是 $n(\mathbf{p}, t)$ 的简写， n_1 是 $n(\mathbf{p}_1, t)$ 的简写，等等。相互作用核 V 是通过各种方法推导出来的，适用于静水 (例如, Olbers 1974; Müller & Olbers 1975; Olbers 1976; McComas 1977; Lvov & Tabak 2001, 2004; Lvov *et al.* 2010) 和非静水 (例如, Labarre *et al.* 2024b) 设置，在共振流形 (Lvov *et al.* 2012) 上前一组结果被证明是等价的。

一个重要的度量，用于表征波与波相互作用的非线性程度是归一化玻尔兹曼率 (Nazarenko 2011; Lvov *et al.* 2012)，它是线性时间尺度 (波周期) τ^L 和非线性时间尺度之间的比率 τ^{NL}

$$Bo \equiv \frac{\tau^L}{\tau^{NL}} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial E / \partial t}{E}. \quad (2.2)$$

归一化的玻尔兹曼速率建立了在特定谱范围内解释 WKE 结果的准则。理论上，仅当 $|Bo| \ll 1$ 时，WKE(2.1) 才有效，这符合波湍流理论中弱非线性假设 (Zakharov *et al.* 1992; Nazarenko 2011) 所暗示的内容。

尽管早期基于 McComas 的等人。的结果经常依赖于启发式假设，如 (过于) 简化的碰撞积分，高性能计算方面的最新进展已经允许直接评估一般光谱形式的完整碰撞积分 (Eden *et al.* 2019a,b, 2020; Dematteis & Lvov 2021; Dematteis *et al.* 2022, 2024; Wu & Pan 2023; Lanchon & Cortet 2023; Labarre *et al.* 2024a,b)。WKE 已经被应用于全球 IGW 光谱数据集，并通过细尺度参数化和微结构观测 (Dematteis *et al.* 2024) 进行了基准测试，确立了其作为估算湍流耗散并改进一般循环和气候模型中海洋混合参数化的强大工具的地位。在这项工作中，我们遵循 Wu & Pan (2023) 中的数值方法来评估碰撞积分，具体细节将在下一节中描述。

2.2. 数值程序

为了模拟一个代表海洋内波 (IGWs) 的物理问题，我们考虑一个水平各向同性的区域，其水平圆半径为 42.4 公里，垂直延伸范围为 2.1 公里。选择这个垂直范围是为了最小化表面和底部边界的影响，从而可以集中关注海洋内部的 IGW 相互作用。波数域在 k 和 m^\dagger 中使用 128×128 对数标度网格进行离散化，波数范围分别为 $k \in [1.5 \times 10^{-4}, 1.6 \times 10^{-1}]$ 米⁻¹ 和 $m \in [3.0 \times 10^{-3}, 3.2]$ 米⁻¹。此设置提供了水平空间分辨率为 40 米，垂直空间分辨率为 2 米的精细度。

GM 类谱 (附录 A) 用作 WKE(2.1) 的输入，具体在 \mathcal{F}_{p12} 和 \mathcal{F}_{1p2} 方面。在瞬时时刻 t ，对 (2.1) 中的碰撞积分进行积分得到 $\partial n(\mathbf{p}) / \partial t$ ，从而得出 $\partial E(\mathbf{p}) / \partial t$ 。调用谱能量守恒

$$\frac{\partial E(m)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}(m)}{\partial m} = 0, \quad (2.3)$$

其中 $\partial E(m) / \partial t = \iint (\partial E(\mathbf{p}) / \partial t) dk_x dk_y$ ，可以定义任意垂直波数下的向下能量通量

[†] 使用对数尺度网格和之前的线性网格 (Wu & Pan 2023) 进行测试后，并未显示出统计学上的显著差异。

$\mathcal{P}(m)m$

$$\mathcal{P}(m) = \int_0^m \frac{\partial E(m')}{\partial t} dm' = \int_0^m \left[\iint \frac{\partial E(k'_x, k'_y, m')}{\partial t} dk'_x dk'_y \right] dm'. \quad (2.4)$$

代替直接解决湍流事件，WKE 评估能量通量降至 10 米垂直尺度（由临界垂直波数 $m_c = 0.62\text{m}^{-1}$ 表示）作为可用于湍流耗散的能量估计。然而，在 m_c 附近解释 WKE 结果通常受到可能违反弱非线性假设 (Holloway 1978, 1980) 的限制。尽管最近的研究表明 $\mathcal{P}(m)$ 在接近 m_c (Wu & Pan 2023; Dematteis *et al.* 2024) 的地方对 m 表现出低敏感性，我们选择通过引入一个特定光谱的截止垂直波数 m_{cutoff} （通常小于 m_c ），量化这种不确定性，直到该值为止，不超过 10% 的波违反了由 $|Bo| > 0.2$ 表征的弱非线性假设。重要的是要承认在 m_{cutoff} 以上 WKE 变得无效，而在 m_c 处 IGWs 对剪切不稳定的情况。湍流耗散被近似为范围内 $m \in [m_{\text{cutoff}}, m_c]$ 的降尺度能量通量 $\mathcal{P}(m)$ 的平均值，如果 $m_{\text{cutoff}} < m_c$ 。在此范围内的 $\mathcal{P}(m)$ 最大值和最小值之间的差异被引入作为不确定性。当 $m_{\text{cutoff}} > m_c$ 时，不确定性为零。

为了评估 ID 对总湍流耗散的相对贡献，我们通过应用基于单个三联体几何结构的选择标准来隔离 ID 三联体。我们将三联体中每个波成分的频率从高到低排列为 $(\omega^H, \omega^M, \omega^L)$ ，将垂直波数的大小排列为 $(|m^H|, |m^M|, |m^L|)$ 。作为一种在 ω 和 m 中的尺度分离机制，一个 ID 三联体由一个低- ω 、低- m 波和两个高- ω 、高- m 波组成（图 1），满足 $\omega^M/\omega^L > 2$ 和 $|m^M|/|m^L| > 2$ 。“尺度分离”的阈值设定为 2，如 Wu & Pan (2023) 所示。类似的选取程序已被 Eden *et al.* (2019b) 和 Dematteis *et al.* (2024) 采用。

3. 结果

我们从 GM 谱 (Cairns & Williams 1976) 开始，然后扩展到偏离 GM 的光谱，重点关注 ID 在不同光谱中的湍流耗散作用。如 (1.1) 所描述的动作扩散方向取决于动作光谱的垂直波数光谱斜率 σ 的符号，即 $n \propto m^\sigma$ 。对于类似 GM 的光谱， $\sigma \equiv s_m - s_\omega$ 表示能量光谱的垂直波数和频率光谱斜率之间的差异（详见附录 A 的详细说明）。我们考虑范围 $\sigma \in [-0.5, 0.5]$ ，对应于固定 $s_\omega = -2$ 的 $s_m \in [-2.5, -1.5]$ ，这与来自场地测量的全局统计范围 (Dematteis *et al.* 2024) 一致。能量水平， $E_0 = 3 \times 10^{-3}\text{m}^{-2}\text{s}^{-2}$ ，如在 (A 1) 中定义的那样，在 σ 变化时保持不变以确保 IGW 场的总能量不变。为了与 GM 进行比较，我们展示了两种极端情况：一种是红色谱线具有 $\sigma = -0.5$ ，另一种是蓝色谱线具有 $\sigma = 0.5$ 。然后我们探索了整个 $\sigma \in [-0.5, 0.5]$ 范围，接着在附录 B 中进行了关于参数 E_0 和 s_ω 的敏感性研究。

在没有 IGWs 的生成和耗散的情况下，能量在一个有限区域内是守恒的，并通过波与波之间的相互作用重新分布，其在（频谱）域边界上的能流保持为零。因此，谱能量密度 $\partial E/\partial t$ 的变化率解释了域内的谱能量转移，如 (2.3) 所示。此后，我们将 $\partial E/\partial t < 0$ 定义为源，因为它们的能量随时间衰减，向其他区域供能。相反，将 $\partial E/\partial t > 0$ 定义为汇，因为它们的能量增加，积累能量。术语“源”和“汇”遵循 Eden

et al. (2019a,b) 的惯例, 在那里它们描述了能量转移的方向, 而不是指特定的生成或耗散机制。

3.1. 标准的 GM 谱系

对于由白色作用光谱 $n \propto m^0$ 表征的 GM 光谱, 所有三联相互作用引起的光谱能量转移在 $2f$ 和 $4f$ 之间表现为一个源, 在较低和较高频率处为汇 [图 2(a)]。归一化的玻尔兹曼速率 (2.2) 表明高- m 区域受到强烈的非线性影响, 这使人们对该区域 WKE 的有效性产生怀疑 [图 2(c)]。对于 GM, 相应的截止垂直波数是 $m_{\text{cutoff}} = 0.30\text{m}^{-1}$, 比临界垂直波数 $m_c = 0.62\text{m}^{-1}$ 小一个因子 2。WKE 估计总湍流耗散 $\mathcal{P}_{\text{WKE}} = (8.12 \pm 0.26) \times 10^{-10} \text{ W kg}^{-1}$ [图 2(d)][†], 与细尺度参数化预测 $\mathcal{P}_{\text{FP}} = 8 \times 10^{-10} \text{ W kg}^{-1}$ 相吻合, 后者是按照 Polzin *et al.* (2014) 中描述的标准程序计算得出的。由于在 m 中动作光谱的梯度消失, ID 几乎不贡献通量, 除了某些弱二次扩散 [图 2(b,d)], 这证实了 Dematteis *et al.* (2022) 的研究结果。

3.2. 红色作用光谱

对于典型的红行动光谱, 其特征由 $n \propto m^{-0.5}$ 决定, 在较大的垂直尺度上作用和能量比 GM 更集中。当总能量保持不变时, 小尺度上的作用和能量相应减少。频谱能量传输主要由 $2f$ 与大约 $10f$ 之间的源主导, 并在 $2f$ 以下有一个汇, 在 $20f$ 以上有一个较弱的汇 [图 3(a)]。源和汇的强度, 以及向下尺度的能量通量, 比 GM 中的小一个数量级 [图 3 (a,d)]。弱非线性假设相比 GM 得到了更好的满足, 这由归一化的玻尔兹曼率 (2.2) 所示 [图 3 (c)]。相应的截止垂直波数是 $m_{\text{cutoff}} = 0.69 \text{ m}^{-1}$, 使得 WKE 结果能够扩展到由 $m_c = 0.62 \text{ m}^{-1}$ 表示的耗散尺度, 而不会引入如 §2.2 中所述的不确定性。

诱导扩散表现出一个位于 $4f$ 之上的源和两个位于 $4f$ 之下的不同汇 [图 3(b)]。两个汇出现在相对于源的不同区域: 第一个汇分布在中等频率 ($\omega \approx 3f$) 和较大的垂直波数直到 $m \sim O(1)\text{m}^{-1}$, 而第二个汇集中在惯性频率 ($\omega \approx f$) 附近以及较小的垂直波数 ($m \lesssim 0.1\text{m}^{-1}$)。这三个区域——包括源和两个汇——反映了 ID 特征性的扩散和尺度分离转移。特别地, 源和第一个汇来源于由 (1.1) 描述的小尺度作用扩散, 特征为在 m 中的正向级联伴随着在 ω 中的反向级联。由于这种扩散传输保守作用, 当向更低频率移动时会导致能量盈余, 因为能量由 $E = n\omega$ 给出, 并且 ω 减少[‡]。为了保持总能量, 多余的能源必须被大规模吸收, 从而形成第二个汇, 并实现一种在 m 和 ω 中都向后的尺度分离传输。

[†] 这些结果对应于科里奥利频率 $f = 7.84 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$ 和浮力频率 $N = 5.24 \times 10^{-3}\text{s}^{-1}$ (附录 A), 这与在 Wu & Pan (2023) 中使用的值不同。

[‡] 如果我们专注于单一的三联体 (例如, 图 1 中的一个), 情况会更直接明了。在这种情况下, 红色动作光谱会导致从 \mathbf{p} 到 \mathbf{p}_2 的向前扩散转移。虽然作用量守恒, 即 $\Delta n = -\Delta n_2$, 能量却不守恒: \mathbf{p} 失去的能量总是大于 \mathbf{p}_2 接收到的能量, 即 $\omega \Delta n > \omega_2 (-\Delta n_2)$, 因为 $\omega > \omega_2$ 。这导致了 \mathbf{p} 和 \mathbf{p}_2 之间的能量盈余, 其中过剩的能量应被大规模模式 \mathbf{p}_1 吸收, 表明了一个逆向尺度分离传输。

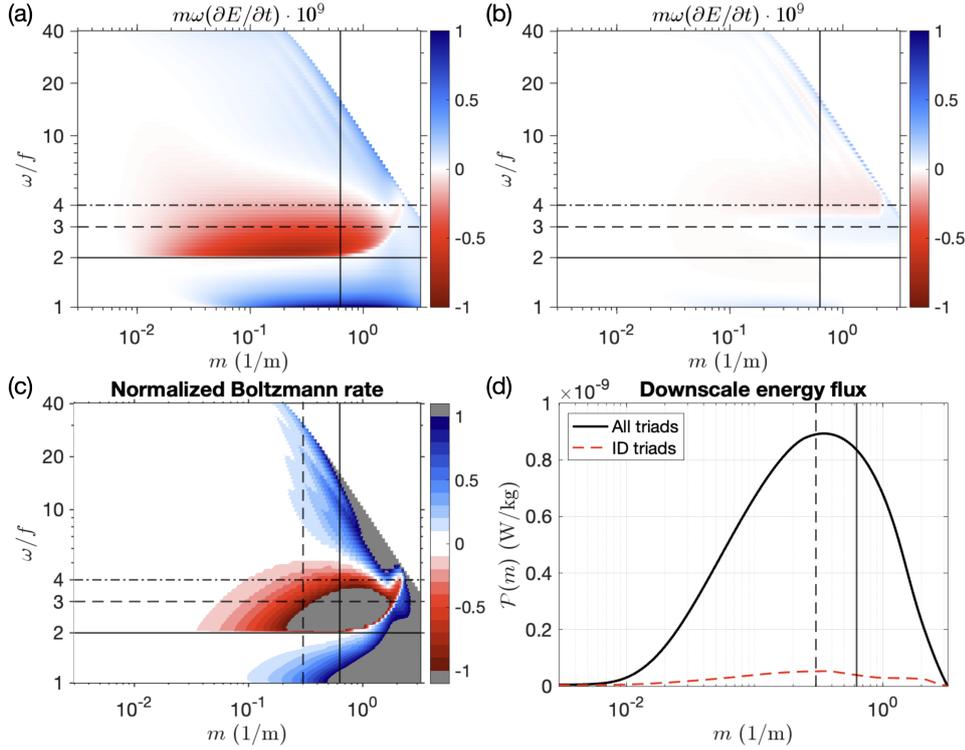


图 2: (a) 谱能量传输, $m\omega(\partial E/\partial t)$, 从 WKE(2.1) 计算而来, 适用于高- m 、高- ω 极限下的 Garrett-Munk 谱形式 $n \propto m^0$ 。系数 $m\omega$ 包含在内以保持对数-对数表示中的方差。能量源 ($\partial E/\partial t < 0$) 和汇 ($\partial E/\partial t > 0$) 分别用红色和蓝色表示。(b) 与 (a) 相同, 但仅保留诱导扩散 (ID) 机制。(c) 归一化玻尔兹曼速率 (2.2), 其中 $|Bo| \ll 1$ 表示弱非线性和 WKE 的有效性。(d) 能量通量 (2.4) 的减尺度, 展示了所有三联组和仅 ID 三联组。(a-c) 中的水平线表示频率 $2f$ 、 $3f$ 和 $4f$ 。垂直的实线和虚线分别表示临界垂直波数 m_c 和截止垂直波数 m_{cutoff} 。

包含扩散和尺度分离传输对于理解 ID 的完整图景至关重要, 正如由 ID 驱动的向小尺度能量通量 $\mathcal{P}^{\text{ID}}(m)$ [图 3(d)] 进一步说明的那样。ID 表示当 $m < 0.15\text{m}^{-1}$ 时的反向级联与 $\mathcal{P}^{\text{ID}}(m) < 0$, 以及当 $m > 0.15\text{m}^{-1}$ 时的正向级联与 $\mathcal{P}^{\text{ID}}(m) > 0$ 。前者源于具有大尺度作为汇的大尺度分离传输, 而后者则受 (1.1) 所描述的扩散传输支配。在耗散尺度上, 向小尺度的能量通量主要由扩散传输主导, 其值为 $\mathcal{P}^{\text{ID}}(m_c) = (0.06 \pm 0.00) \times 10^{-10} \text{W kg}^{-1}$, 这有助于混合。

3.3. 一个蓝色的动作光谱

对于由 $n \propto m^{0.5}$ 表征的典型蓝色作用光谱, 相比于 GM, 更多的作用和能量被分配到较小的垂直尺度上。光谱能量传输主要由低于 $4f$ 的源主导, 吸收发生在低于 $1.5f$ 和高于 $3f$ 的地方, 集中在 $m > O(1)\text{m}^{-1}$ [图 4(a)]。源和汇的量级以及向小尺度的能量通量比 GM 中的大一个数量级 [图 4(a,d)]。弱非线性假设的违反更为明显, 这

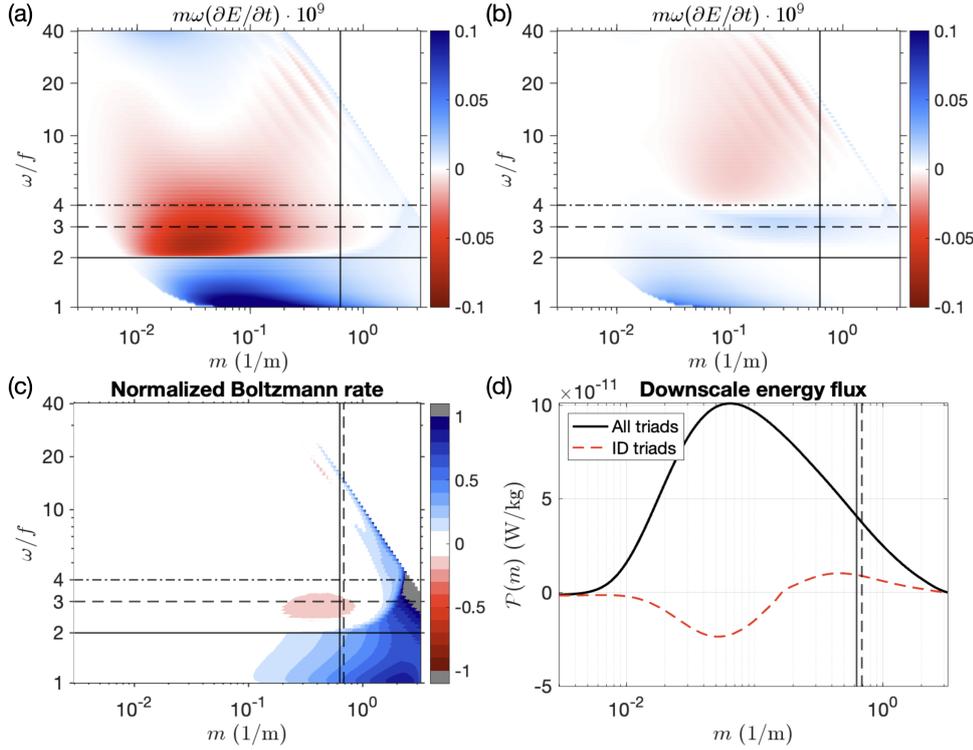


图 3: 与图 2 相同, 但为红色动作光谱, 在高 m 、高 ω 极限下的 $n \propto m^{-0.5}$ 。

由归一化的玻尔兹曼率 (2.2) 所示 [图 4(c)]。相应的截止垂直波数 $m_{\text{cutoff}} \approx 0.12\text{m}^{-1}$ 显著小于临界垂直波数 $m_c \approx 0.62\text{m}^{-1}$, 导致湍流耗散估计的不确定性增加 [图.4(d)]。

感应扩散表现为与在 §3.2 中展示的红谱情况相反的情形。特别是, 小尺度下的扩散传递现在是向较低的 m 方向反向进行, 而分离尺度的传递则是向前的, 能量从小尺度 \dagger 的大尺度来源来补偿 [图.4(b)]。然而, 逆级串主导的区域局限于垂直尺度小于耗散尺度的范围, 而正向级串区域则涵盖了更大的 m 范围, 包括 m_{cutoff} 和 m_c 。

由 ID 驱动的向下尺度能量通量在 m_{cutoff} 和 m_c 之间的范围内量化为 $\mathcal{P}^{\text{ID}} = (20.99 \pm 3.10) \times 10^{-10} \text{W kg}^{-1}$ [图 4(d)]。在此范围内, 向前尺度分离传输主导了 ID 级联过程, 能量向下尺度传递以维持湍流耗散。因此, 尽管相对于红色谱情况方向相反, ID 仍继续作为耗散机制发挥作用。

\dagger 在这种情况下, 一个蓝色的动作光谱导致从模式 \mathbf{p}_2 向模式 \mathbf{p} 的反向扩散转移, 在单一三联体中 (图 1)。 \mathbf{p} 所需的能量总是大于 \mathbf{p}_2 提供的能量, 即 $\omega \Delta n > \omega_2 (-\Delta n_2)$, 给定 $\omega > \omega_2$ 和 $\Delta n = -\Delta n_2$ 。这导致了 \mathbf{p} 和 \mathbf{p}_2 之间的能量赤字, 该赤字将由大规模模式 \mathbf{p}_1 补偿, 表明了正向尺度分离传输。

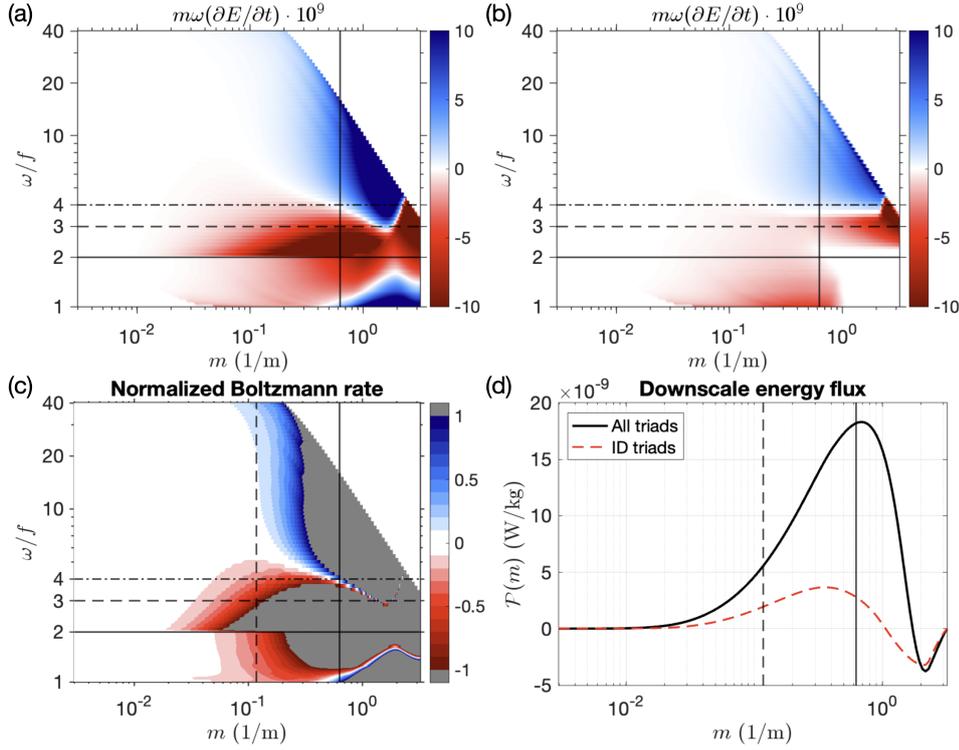


图 4: 与图 2 相同, 但为蓝色动作光谱, 在高 m 、高 ω 极限下的 $n \propto m^{0.5}$ 。

4. 讨论与结论

我们首先详细阐述并总结诱导扩散 (ID) 在海洋混合中的作用, 特别是在偏离加勒特-蒙克 (GM) 谱的情况下。在一个给定的垂直波数, 如 m_c , 能量通量包含两个组成部分: 一个由 (1.1) 描述的扩散传输和与大尺度的能量吸收或补偿相关的尺度分离传输。在时空域中对诱导扩散 (ID) 的一个完整图景展示在图 FIG. 5 中。对于红色作用谱, 其中 $\sigma < 0$ 在 $n \propto m^\sigma$ 中, 扩散传输在 m_c 附近占主导地位, 驱动一个向前级联向耗散推进。随着 σ 增加并越过零 (对应于蓝色光谱), 尺度分离传输在接近 m_c 处变得越来越重要, 在那里能量补偿过程提供了可用于耗散的能量。虽然 McComas 对 ID 的原始概念化基于一个冻结的大规模场 [图 FIG. 5(a)], 但我们对波动力学方程 (WKE) 的评估揭示了 ID 更为丰富的动态, 在这些动态中大规模积极参与能量级联并发挥关键作用以驱动湍流耗散 [图 FIG. 5(b,c)]。

为了全面评估 ID 在不同光谱范围内的作用, 我们使用步长为 0.1 的间隔扫过了整个 $\sigma \in [-0.5, 0.5]$ 范围。总的湍流耗散随着 σ 的增加而急剧增加, 因为更蓝的光谱将更多的能量分配给小尺度, 从而驱动更强的湍流耗散 (图 6)。ID 的相对贡献被量化为由 ID 三联体引起的湍流耗散除以所有三联体引起的总湍流耗散的值。对于 $\sigma = 0$ 即 GM 光谱, 由于扩散传输和尺度分离传输均消失, $\mathcal{P}^{\text{ID}}/\mathcal{P}^{\text{all}}$ 达到最小值; 在

Rapids articles must not exceed this page length

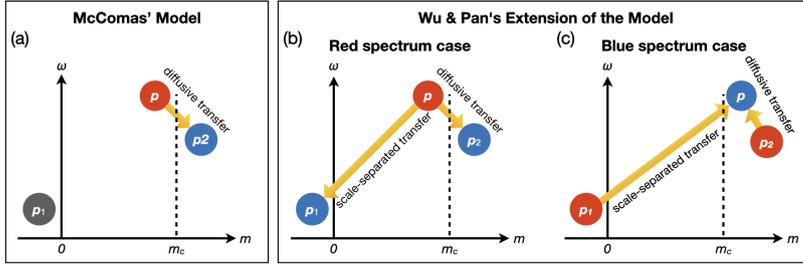


图 5: 感应扩散 (ID) 的共振波三联组概念模型 $p = p_1 + p_2$ 。大规模的近惯性波 p_1 具有相反符号的垂直波数, 因此出现在 $m = 0$ 轴的左侧 (图 1)。(a) McComas 的模型说明了从小尺度上从 p 到 p_2 的扩散传输, 而大尺度波 p_1 保持静止。(b-c) 我们对红色 ($\sigma < 0$) 和蓝色 ($\sigma > 0$) 作用光谱的模型扩展, 分别为 $n \propto m^\sigma$ 。在这两种情况下, 都强调了扩散传递 (在 p 和 p_2 之间) 以及尺度分离传递 (涉及 p_1), 将 ID 表现为一个宽带过程而不是局限于小尺度的过程。红色、蓝色和灰色的点分别表示能量源、汇和稳定态。黄色箭头指示能量传递的方向。湍流耗散通过跨越关键垂直波数 m_c 的向下能量通量来近似。

这种情况下, 尽管存在一些弱次级扩散 (Dematteis *et al.* 2022; Wu & Pan 2023), ID 几乎不贡献通量。除了这种状态外, ID 的相对贡献一直保持为正, 并且比率 $\mathcal{P}^{\text{ID}}/\mathcal{P}^{\text{all}}$ 与偏差 $|\sigma|$ 呈正相关。在两个端点处, $\sigma = \pm 0.5$, ID 对总耗散的贡献高达 25%。此外, 相关的不确定性随着 σ 的增加而增长, 反映出 m_{cutoff} 和 m_c 之间差距的扩大。

本研究在理解 ID 在海洋混合中的作用方面迈出了重要的一步。与细尺度参数化的经验方法不同, WKE 捕获了波-波相互作用的基本机制, 提供了诸如 ID 的作用等诊断见解, 这是本研究的核心焦点。通过使用 WKE, 我们解决了长期存在的理论空白, 并在时空域中提供了一个基于物理的 ID 描述, 不受限于谱中的高- ω 、高- m 区间, 也不依赖扩散方程 (1.1) 作为 WKE(2.1) 的简化替代。通过阐明 IGW 场中能量级联的动力学, 我们的发现为湍流耗散负责的具体类型的波-波相互作用提供了有价值的见解。

我们通过以下两点限制来结束本文的工作。首先, 分析基于 GM 类光谱的瞬时能量传输。其基本假设是这些光谱在海洋中的平衡强迫和耗散下保持平稳。一个重要方向是在 WKE 框架内研究波-波相互作用下的光谱演化 (参见 Labarre *et al.* 2025 最近的工作)。其次, 本研究假设光谱在小尺度上保留幂律形式, 甚至超出耗散尺度 m_c 。实际上, 这一假设可能因耗散效应而失效, 这可能导致超出 m_c 的谱尾被抑制, 并因此影响 ID 的解释, 特别是在蓝色光谱的情况下。对这一问题的详细研究可能需要分层湍流的模拟。我们将这一机会留给未来的研究。

Funding. 此项研究得到了国家自然科学基金会 (资助号 OCE-2241495 和 OCE-2306124) 以及西蒙斯基金会通过西蒙斯波浪湍流合作计划的支持。

Declaration of interests. 作者报告没有利益冲突。

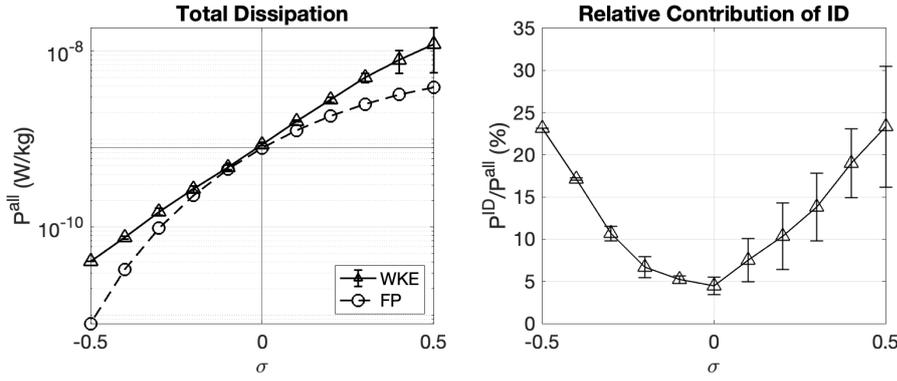


图 6: (左) 使用波动力方程 (WKE) 估算的总湍流耗散 \mathcal{P}^{all} 与通过细尺度参数化 (FP) 获得的结果进行比较。(右) 引发扩散 (ID), $\mathcal{P}^{\text{ID}}/\mathcal{P}^{\text{all}}$, 作为 $\sigma \equiv s_m - s_\omega$ 函数的相对贡献。所有结果基于固定的能量水平 $E_0 = 3 \times 10^{-3} \text{m}^{-2} \text{s}^{-2}$ 和恒定频率谱斜率 $s_\omega = -2.0$ 。误差条表示在范围 $m \in [m_{\text{cutoff}}, m_c]$ 上 $\mathcal{P}^{\text{all}}(m)$ 和 $\mathcal{P}^{\text{ID}}(m)/\mathcal{P}^{\text{all}}(m)$ 的不确定性, 如果 $m_{\text{cutoff}} < m_c$ 。当 $m_{\text{cutoff}} > m_c$ 时, 不确定性为零。

Data availability statement. 支持本研究发现的数据可在 GitHub 上公开获取, 网址为 <https://github.com/yue-cynthia-wu>。

附录 A. Garrett-Munk (GM) 谱及其变化

海洋内波的谱表示最早由彼得·H·加勒特和沃尔特·H·芒克在 1970 年代通过一系列出版物 (Garrett & Munk 1972, 1975; Cairns & Williams 1976) 建模, 提供了基于内波频率和垂直波数的波能分布的统计和经验描述

$$E(\omega, m) = \frac{N}{N_0} E_0 A(m) B(\omega), \quad (\text{A } 1)$$

其中 $E(\omega, m)$ 是频域-垂直波数域中的波能量。因子 N/N_0 是一个分层缩放因子, 其中 N 和 $N_0 = 5.24 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$ 分别是实际和参考浮力频率。参数 E_0 是 IGW 场的能量水平。

函数 A 和 B 在 (A 1) 中相对于 m 和 ω 是可分离的, 并且被归一化以积分到单位, 使得总能量 $\iint E(\omega, m) d\omega dm = (N/N_0)E_0$

$$A(m) \propto \frac{1}{m^*} \left[1 + \left(\frac{m}{m^*} \right)^r \right]^{s_m/r}, \quad (\text{A } 2)$$

$$B(\omega) \propto \omega^{s_\omega - 2s_{\text{NI}}} (\omega^2 - f^2)^{s_{\text{NI}}}, \quad (\text{A } 3)$$

其中 $m^* = \pi j/b$ 是特征垂直波数, j 是模式数, b 是分层尺度高度。参数 r 控制从低 m 平台到高 m 幂律区间的过渡陡峭度; $r = 2$ 常被使用, 因为替代值很少被观测确认。科里奥利或惯性频率 $f = 2\Omega \sin \varphi$ 是纬度 φ 的函数, 其中 $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ 是地球的旋转角速度。谱特征由三个光谱斜率决定: 在近惯性频率极限下的 s_{NI} , 高 ω 极

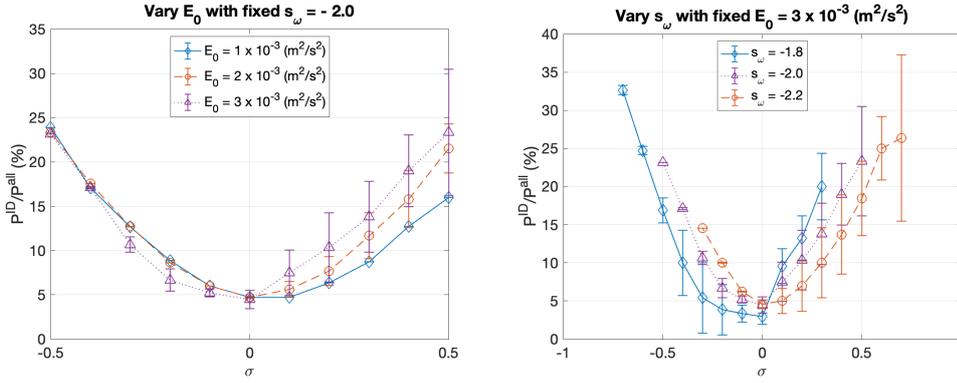


图 7: 感应扩散 (ID), $P^{\text{ID}}/P^{\text{all}}$, 作为 $\sigma \equiv s_m - s_\omega$ 的函数的相对贡献。(左) 能量水平 E_0 变化而频率谱斜率 $s_\omega = -2.0$ 固定的结果。(正确) 对于固定 $E_0 = 3 \times 10^{-3} \text{m}^{-2} \text{s}^{-2}$ 的情况下, 变化 s_ω 的结果。

限下的 s_ω , 以及高垂直波数极限下的 s_m 。所有 GM 变体的共同特征是在 ω 和 m 中均存在惯性峰值和红谱, 表明能量集中在惯性频率附近, 并且在低垂直模式 (Polzin & Lvov 2011) 上。

对于在 Cairns & Williams (1976) 中描述的标准 GM 光谱, 参数 $j = 4$ 和 $b = 1300$ 米使得 $m^* = 0.01 \text{米}^{-1}$ 。浮力频率 $N = N_0 = 5.24 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$, 以及对应中纬度海洋的纬度 $\varphi = 32.5^\circ$ 的科里奥利频率 $f = 7.84 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ 。能级为 $E_0 = 3 \times 10^{-3} \text{米}^{-2} \text{秒}^{-2}$ 。三个光谱斜率为 $s_\omega = s_m = -2$ 和 $s_{\text{NI}} = -0.5$ 。

由 (A 1) 给出的能量谱在高 ω , 高 m 区域遵循幂律缩放, 表示为 $E(\omega, m) \propto \omega^{s_\omega} m^{s_m}$ 。这对应于一个作用光谱 $n(k, m) \propto k^{s_\omega - 2} m^{s_m - s_\omega}$ 。转换遵循以下关系

$$n(k, m) = \frac{E(k, m)}{\omega} = \frac{E(\omega, m)}{2\pi k \omega} \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{E(\omega, m)}{2\pi k \omega} \frac{N^2 - \omega^2}{k^2 + m^2}. \quad (\text{A } 4)$$

请注意, 关系 $n = E/\omega$ 在 (k, m) -域中严格成立, 并不适用于 (ω, m) -域。

附录 B. 参数 E_0 和的敏感性研究 s_ω

在 §3 中呈现的结果基于固定值的能量等级 $E_0 = 3 \times 10^{-3} \text{m}^{-2} \text{s}^{-2}$ 和频率谱斜率 $s_\omega = -2.0$ 。为了验证我们的结论在整个参数空间的有效性, 已经进行了一项敏感性研究 (图 7)。考虑到扩散和尺度分离传输, 诱导扩散总是对湍流耗散做出正面贡献, 作为一种耗散机制。

REFERENCES

- CAIRNS, JAMES L & WILLIAMS, GORDON O 1976 Internal wave observations from a midwater float, 2. *J. Geophys. Res.* **81** (12), 1943–1950.
- DELPECH, AUDREY, BARKAN, ROY, SRINIVASAN, KAUSHIK, MCWILLIAMS, JAMES C., ARBIC, BRIAN K.,

- SIYANBOLA, OLADEJI Q. & BUIJSMAN, MAARTEN C. 2024 Eddy–internal wave interactions and their contribution to cross-scale energy fluxes: A case study in the California current. *Journal of Physical Oceanography* **54** (3), 741 – 754.
- DEMATTEIS, GIOVANNI, LE BOYER, ARNAUD, POLLMANN, FRIEDERIKE, POLZIN, KURT L., ALFORD, MATTHEW H., WHALEN, CAITLIN B. & LVOV, YURI V. 2024 Interacting internal waves explain global patterns of interior ocean mixing. *Nature Communications* **15** (1), 7468.
- DEMATTEIS, GIOVANNI & LVOV, YURI V. 2021 Downscale energy fluxes in scale-invariant oceanic internal wave turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **915**, A129.
- DEMATTEIS, GIOVANNI, POLZIN, KURT & LVOV, YURI V. 2022 On the origins of the oceanic ultraviolet catastrophe. *Journal of Physical Oceanography* **52** (4), 597–616.
- DONG, WENJING, BÜHLER, OLIVER & SMITH, K. SHAFER 2020 Frequency diffusion of waves by unsteady flows. *Journal of Fluid Mechanics* **905**, R3.
- DONG, WENJING, BÜHLER, OLIVER & SMITH, K. SHAFER 2023 Geostrophic eddies spread near-inertial wave energy to high frequencies. *Journal of Physical Oceanography* **53** (5), 1311 – 1322.
- EDEN, CARSTEN, CHOUKSEY, MANITA & OLBERS, DIRK 2019a Gravity wave emission by shear instability. *J. Phys. Oceanogr.* **49** (9), 2393–2406.
- EDEN, CARSTEN, POLLMANN, FRIEDERIKE & OLBERS, DIRK 2019b Numerical evaluation of energy transfers in internal gravity wave spectra of the ocean. *Journal of Physical Oceanography* **49** (3), 737 – 749.
- EDEN, CARSTEN, POLLMANN, FRIEDERIKE & OLBERS, DIRK 2020 Towards a global spectral energy budget for internal gravity waves in the ocean. *Journal of Physical Oceanography* **50** (4), 935 – 944.
- GARRETT, CHRISTOPHER & MUNK, WALTER 1972 Space-time scales of internal waves. *Geophysical Fluid Dynamics* **3** (3), 225–264, arXiv: <https://doi.org/10.1080/03091927208236082>.
- GARRETT, CHRISTOPHER & MUNK, WALTER 1975 Space-time scales of internal waves: A progress report. *J. Geophys. Res.* **80** (3), 291–297.
- GREGG, M. C. 1989 Scaling turbulent dissipation in the thermocline. *Journal of Geophysical Research: Oceans* **94** (C7), 9686–9698, arXiv: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/JC094iC07p09686>.
- HASSELMANN, K. 1966 Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering processes. *Reviews of Geophysics* **4** (1), 1–32, arXiv: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/RG004i001p00001>.
- HASSELMANN, K., SAFFMAN, PHILIP GEOFFREY & LIGHTHILL, MICHAEL JAMES 1967 Nonlinear interactions treated by the methods of theoretical physics (with application to the generation of waves by wind). *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **299** (1456), 77–103, arXiv: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1967.0124>.
- HENYEV, FRANK S., WRIGHT, JON & FLATTÉ, STANLEY M. 1986 Energy and action flow through the internal wave field: An eikonal approach. *Journal of Geophysical Research: Oceans* **91** (C7), 8487–8495, arXiv: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/JC091iC07p08487>.
- HOLLOWAY, GREG 1978 On the spectral evolution of strongly interacting waves. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **11** (1), 271–287, arXiv: <https://doi.org/10.1080/03091927808242670>.
- HOLLOWAY, GREG 1980 Oceanic internal waves are not weak waves. *Journal of Physical Oceanography* **10** (6), 906 – 914.

- KAFIABAD, HOSSEIN A, SAVVA, MILES AC & VANNESTE, JACQUES 2019 Diffusion of inertia-gravity waves by geostrophic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **869**, R7.
- KUNZE, ERIC & LLEWELLYN SMITH, STEFAN G. 2004 The role of small-scale topography in turbulent mixing of the global ocean. *Oceanography* **17** (SPL.ISS. 1), 55–64.
- LABARRE, VINCENT, AUGIER, PIERRE, KRSTULOVIC, GIORGIO & NAZARENKO, SERGEY 2024a Internal gravity waves in stratified flows with and without vortical modes. *Phys. Rev. Fluids* **9**, 024604.
- LABARRE, VINCENT, KRSTULOVIC, GIORGIO & NAZARENKO, SERGEY 2025 Wave-kinetic dynamics of forced-dissipated turbulent internal gravity waves, arXiv: 2407.11469.
- LABARRE, VINCENT, LANCHON, NICOLAS, CORTET, PIERRE-PHILIPPE, KRSTULOVIC, GIORGIO & NAZARENKO, SERGEY 2024b On the kinetics of internal gravity waves beyond the hydrostatic regime. *Journal of Fluid Mechanics* **998**, A17.
- LANCHON, NICOLAS & CORTET, PIERRE-PHILIPPE 2023 Energy spectra of nonlocal internal gravity wave turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **131**, 264001.
- LVOV, YURI & TABAK, ESTEBAN G 2004 A hamiltonian formulation for long internal waves. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **195** (1), 106–122.
- LVOV, YURI V., POLZIN, KURT L., TABAK, ESTEBAN G. & YOKOYAMA, NAOTO 2010 Oceanic internal-wave field: Theory of scale-invariant spectra. *Journal of Physical Oceanography* **40** (12), 2605–2623.
- LVOV, YURI V., POLZIN, KURT L. & YOKOYAMA, NAOTO 2012 Resonant and near-resonant internal wave interactions. *Journal of Physical Oceanography* **42** (5), 669–691.
- LVOV, YURI V. & TABAK, ESTEBAN G. 2001 Hamiltonian formalism and the garrett-munk spectrum of internal waves in the ocean. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 168–501.
- MCCOMAS, C. H. 1977 Equilibrium mechanisms within the oceanic internal wave field. *Journal of Physical Oceanography* **7** (6), 836–845.
- MCCOMAS, C. HENRY & BRETHERTON, FRANCIS P. 1977a Resonant interaction of oceanic internal waves. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)* **82** (9), 1397–1412, arXiv: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/JC082i009p01397>.
- MCCOMAS, C. H. & BRETHERTON, F. P. 1977b Resonant interaction of oceanic internal waves. *J. Geophys. Res.* **82** (9 , Mar.20, 1977), 1397–1412.
- MCCOMAS, C. HENRY & MÜLLER, PETER 1981a The dynamic balance of internal waves. *Journal of Physical Oceanography* **11** (7), 970–986.
- MCCOMAS, C. HENRY & MÜLLER, PETER 1981b Time scales of resonant interactions among oceanic internal waves. *Journal of Physical Oceanography* **11** (2), 139–147.
- MÜLLER, PETER & OLBERS, DIRK J. 1975 On the dynamics of internal waves in the deep ocean. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)* **80** (27), 3848–3860, arXiv: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/JC080i027p03848>.
- NAZARENKO, S 2011 *Wave turbulence*. Springer.
- OLBERS, DIRK JURGEN. 1974 *On the energy balance of small-scale internal waves in the deep-sea*. G. M. L. Wittenborn Hamburg.
- OLBERS, DIRK J. 1976 Nonlinear energy transfer and the energy balance of the internal wave field in the deep ocean. *Journal of Fluid Mechanics* **74** (2), 375–399.
- PAN, YULIN, ARBIC, BRIAN K., NELSON, ARIN D., MENEMENLIS, DIMITRIS, PELTIER, W. R., XU, WENTAO & LI,

- YE 2020 Numerical investigation of mechanisms underlying oceanic internal gravity wave power-law spectra. *Journal of Physical Oceanography* **50** (9), 2713 – 2733.
- POLZIN, K. L. & LVOV, Y. V. 2011 Toward regional characterizations of the oceanic internal wavefield. *Reviews of Geophysics* **49** (4), arXiv: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2010RG000329>.
- POLZIN, KURT L., NAVEIRA GARABATO, ALBERTO C., HUUSSEN, TYCHO N., SLOYAN, BERNADETTE M. & WATERMAN, STEPHANIE 2014 Finescale parameterizations of turbulent dissipation. *Journal of Geophysical Research: Oceans* **119** (2), 1383–1419, arXiv: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/2013JC008979>.
- POLZIN, KURT L., TOOLE, JOHN M. & SCHMITT, RAYMOND W. 1995 Finescale parameterizations of turbulent dissipation. *Journal of Physical Oceanography* **25** (3), 306 – 328.
- SAVVA, M. A.C., KAFIABAD, H. A. & VANNESTE, J. 2021 Inertia-gravity-wave scattering by three-dimensional geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.* **916**, 1–30.
- SKITKA, JOSEPH, ARBIC, BRIAN K., THAKUR, RITABRATA, MENEMENLIS, DIMITRIS, PELTIER, WILLIAM R., PAN, YULIN, MOMENI, KAYHAN & MA, YUCHEN 2024 Probing the nonlinear interactions of supertidal internal waves using a high-resolution regional ocean model. *Journal of Physical Oceanography* **54** (2), 399 – 425.
- WU, YUE & PAN, YULIN 2023 Energy cascade in the garrett–munk spectrum of internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics* **975**, A11.
- ZAKHAROV, V. E., LVOV, V. S. & FALKOVICH, G. 1992 *Kolmogorov Spectra of Turbulence*. Springer-Verlag.