关于具有奇异非线性的闭流形上的椭圆方程的注记

BARTOSZ BIEGANOWSKI AND ADAM KONYSZ

摘要. 我们考虑闭黎曼流形 (M,g) 上的一个一般椭圆方程

$$-\Delta_g u + V(x)u = f(x,u) + g(x,u^2)u$$

，并利用 Hebey、Pacard 和 Pollack 的最近变分方法，在非线性项 f 和 g 的一般假设下证明了存在非常数解。

关键词: 变分方法，奇异非线性项，爱因斯坦场方程，李奇尼罗维奇方程，椭圆问题
美国数学学会主题分类: 35Q75, 35A15, 35J20, 58J05, 83C05

1. 介绍

本笔记的目的是研究具有奇异非线性的一般椭圆问题在闭（紧且无边界）黎曼流形 (M,g) 上解的存在性，其维度为 $N \geq 3$。具体来说，我们考虑以下方程

$$-\Delta_g u + V(x)u = f(x,u) + g(x,u^2)u, \tag{1.1}$$

其中 $\Delta_g := \operatorname{div}(\nabla_g)$ 是 M 和 $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，$g : M \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是奇异项。

研究此类问题的一个主要动机源于广义相对论，特别是爱因斯坦场方程的柯西问题。在这种情况下，所谓的高斯-科达齐约束方程必须由初始数据 [3] 满足。通过共形方法（参见 [5, 8]），这些约束简化为一个椭圆方程 (1.1)

$$f(x,u) = B(x)|u|^{2^*-2}u, \quad g(x,u^2)u = \frac{A(x)}{(u^2)^{2^*/2}u}, \tag{1.2}$$

其中，$2^* = \frac{2N}{N-2}$ 是维度 $N \geq 3$ 中的临界索伯列夫指数。当也考虑到电磁场的存在时，会出现一个额外的奇异项，并且我们有（参见 [7, Section 7]）

$$f(x,u) = B(x)|u|^{2^*-2}u, \quad g(x,u^2)u = \frac{A(x)}{(u^2)^{2^*/2}u} + \frac{C(x)}{(u^2)^{p/2}u}$$

对于某些 $p \in (2, 2^*)$。

这里我们提到，在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上带有 Dirichlet 边界条件的情况下，也研究了奇异非线性项，例如在 [1, 4] 中。由于 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域不能被视为无边界的流形，这里我们只指出可以在 (1.1) 中考虑在 [1, 4] 中讨论过的非线性项。

我们依赖于近期在 [6] 中提出的方法（参见 [11] 进一步扩展），来概述一组假设，该组假设保证了在对 f 和 g 的相当一般条件下，存在 (1.1) 的解。我们强调这种方法完全基于 [6]，并适应于一般的非线性项设置。

我们引入关于正则非线性项 f 的以下假设。

Date: 2025 年 5 月 3 日.

(F1) $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $x \in M$ 中具有某个指数 $\alpha < 1$ 的 Hölder 连续性，并且在 $u \in \mathbb{R}$ 中连续且奇；此外

$$|f(x,u)| \lesssim 1 + |u|^{2^*-1} \quad \text{for all } (x,u) \in M \times \mathbb{R}.$$

(F2) $f(x,u) = o(u)$ 作为 $u \to 0$，一致地关于 $x \in M$。

(F3) 存在 $\mu > 2$，使得 $f(x,u)u \geq \mu F(x,u) \geq 0$，其中 $F(x,u) := \int_0^u f(x,t)\,dt$。

经典地验证 (F1)，(F2) 意味着对于每一个 $\delta > 0$ 存在一个 $C_\delta > 0$, 使得下列不等式成立

$$|f(x,u)| \leq \delta|u| + C_\delta |u|^{2^*-1}, \tag{1.3}$$

而 (F3) 是著名的 Ambrosetti-Rabinowitz 假设。关于奇异项 g 我们提出以下要求。

(G1) $g : M \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 在 $x \in M$ 中以某个指数 $\alpha < 1$ 满足 Hölder 连续性，并在 $u \in \mathbb{R}$, $G(x,u) \leq 0$ 对所有 $(x,u) \in M \times \mathbb{R}$ 连续，其中 $G(x,u) := \int_0^u g(x,t)\,dt$。

(G2) 映射 $(0,\infty) \ni u \mapsto G(x,u)$ 对所有 $x \in M$ 单调递增，映射 $(0,\infty) \ni u \mapsto g(x,u)$ 对所有 $x \in M$ 单调递减。

(G3) 对所有 $u > 0$ 均成立 $G(\cdot,u) \in L^1(M)$。

(G4) $\min_M g(\cdot,u) \to \infty$ 作为 $u \to 0^+$。

备注 1.1. (a) *注意，由于 g 在 x 上是连续的，根据 (G1)，对于每一个 $u > 0$ 均有 $g(\cdot,u) \in L^\infty(M)$。*

(b) *因为在 (G2) 中我们假设 $G(x,\cdot)$ 是递增的，我们知道对于所有的 $(x,u) \in M \times (0,\infty)$ 都有 $g(x,u) \geq 0$。*

在 V 上，我们假设

(V) $V \in C^{0,\alpha}(M)$, 对某个 $\alpha < 1$, 是这样的使得 $\inf \sigma(-\Delta_g + V(x)) > 0$。

特别是，在条件 (V) 下，算子 $-\Delta_g + V(x)$ 在 $L^2(M)$ 上是强制的，即存在一个常数 $K_V = K(M,g,V) > 0$，使得

$$\int_M |u|^2\,dv_g \leq K_V \int_M |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dv_g$$

对于 $u \in H^1(M)$。因此，我们用范数

$$\|u\|^2 = \int_M |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dv_g$$

装备空间 $H^1(M)$，该范数与标准范数等价。我们将记 $S_V = S(M,g,V) > 0$, 为嵌入

$$\int_M |u|^{2^*}\,dv_g \leq S_V \left(\int_M |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dv_g\right)^{\frac{2^*}{2}}.$$

的最优常数。另外假设

(GF) 存在 $\psi \in C^\infty(M)$ 使得

$$-\int_M G\left(x, \left(\beta\frac{\psi}{\|\psi\|}\right)^2\right) dv_g \leq \frac{1}{2N\left(S_V C_{\frac{1}{4K_V}}\right)^{\frac{N}{2}-1}} \tag{1.4}$$

并且

$$\int_M F\left(x, \beta\frac{\psi}{\|\psi\|}\right) dv_g > 0, \tag{1.5}$$

其中

$$\beta := \frac{1}{(6(N-1))^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2\cdot 2^* S_V C_{\frac{1}{4K_V}}}\right)^{\frac{N-2}{4}},$$

并且 $C_{\frac{1}{4K_V}} > 0$ 是在 (1.3) 中针对 $\delta = \frac{1}{4K_V}$ 给出的常数。

在 (1.2) 的情况下，我们得到了来自 [6] 的假设。显然，在（GF）中，我们可以假设，不失一般性，$\|\psi\| = 1$。

定理 1.2. *假设 (F1)–(F3)，(G1)–(G4)，(V)，(GF) 得到满足。那么，存在一个非平凡、正的弱解 $u \in H^1(M)$ 到 (1.1)，即对于任何 $\varphi \in H^1(M)$，$\int_M g(x,u^2)\,|u\varphi|\,dv_g < \infty$ 和*

$$\int_M \nabla_g u \nabla_g \varphi + V(x)u\varphi\, dv_g = \int_M f(x,u)\varphi\, dv_g + \int_M g(x,u^2)u\varphi\, dv_g.$$

2. ε-扰动问题和山路定理

定义泛函 $\mathcal{J}_\varepsilon : H^1(M) \to \mathbb{R}$ 的公式为

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_M F(x,u)\, dv_g - \frac{1}{2}\int_M G(x, \varepsilon + u^2)\, dv_g.$$

观察到 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 是 C^1 类的。确实，对于前两项这是标准的。固定 $v \in H^1(M)$ 并取 $t \in (0,1)$，考虑差商

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}\int_M G(x,\varepsilon+(u+tv)^2)\,dv_g - \frac{1}{2}\int_M G(x,\varepsilon+u^2)\,dv_g}{t} &= \frac{1}{2}\int_M \frac{G(x,\varepsilon+(u+tv)^2) - G(x,\varepsilon+u^2)}{t}\, dv_g \\ &= \int_M g(x,\varepsilon+(u+\theta_t v)^2)(u+\theta_t v)v\, dv_g,\end{aligned}$$

其中在最后一个等式中我们使用了中值定理和 $\theta_t \in [0,t]$。为了表明最后一个积分在 $L^1(M)$ 中关于 t 是一致有界的，只需要使用 g 的单调性和 $g(\cdot,\varepsilon) \in L^\infty(M)$ 这一事实。

根据 [6]，定义对于 $t > 0$ 函数 $\Phi, \Psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\Phi(t) = \frac{1}{4}t^2 - S_V C_{\frac{1}{4K_V}} t^{2^*},$$
$$\Psi(t) = \frac{3}{4}t^2 + S_V C_{\frac{1}{4K_V}} t^{2^*},$$

然后

$$\Phi(\|u\|) \le \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_M F(x,u)\, dv_g \le \Psi(\|u\|).$$

为了简化记号，我们设 $C := C_{\frac{1}{4K_V}}$。Φ 的最大值达到于

$$t_0 := \left(\frac{1}{2\cdot 2^* S_V C}\right)^{\frac{N-2}{4}}.$$

引理 2.1. 存在 $t_1 > 0$ 使得

$$\mathcal{J}_\varepsilon(t_1\psi) < \inf_{\|u\|=t_0} \mathcal{J}_\varepsilon(u) \quad and \quad \|t_1\psi\| < t_0,$$

其中 ψ 在 *(GF)* 中给出。

证明. 令

$$\theta := \left(\frac{1}{12(N-1)}\right)^{1/2}.$$

然后得到 $t_1 := \theta t_0$，利用 $N \geq 3$，我们得到

$$\begin{aligned}\Psi(t_1) &= \left(\frac{1}{16(N-1)} + \left(\frac{1}{12(N-1)}\right)^{\frac{2^*}{2}} \frac{N-2}{4N}\right)\left(\frac{1}{2\cdot 2^* S_V C}\right)^{\frac{N-2}{2}} \\ &< \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\frac{N-2}{4N}\right)\left(\frac{1}{2\cdot 2^* S_V C}\right)^{\frac{N-2}{2}} = \frac{1}{2}\Phi(t_0).\end{aligned}$$

注意 (1.4) 取的形式为

$$-\frac{1}{2}\int_M G\left(x, (t_1\psi)^2\right)\, dv_g \leq \frac{1}{2}\Phi(t_0), \tag{2.1}$$

其中使用了 $\|\psi\| = 1$。然后，由 (2.1) 和 G 的单调性可知，对于任意的 $\|u\| = 1$，

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\varepsilon(t_1\psi) &= \frac{1}{2}\|t_1\psi\|^2 - \int_M F(x, t_1\psi)\, dv_g - \frac{1}{2}\int_M G(x, \varepsilon + (t_1\psi)^2)\, dv_g \\ &\leq \Psi(t_1) - \frac{1}{2}\int_M G(x, \varepsilon + (t_1\psi)^2)\, dv_g \\ &< \frac{1}{2}\Phi(t_0) - \frac{1}{2}\int_M G(x, (t_1\psi)^2) \leq \Phi(t_0) \leq \frac{1}{2}\|t_0 u\|^2 - \int_M F(x, t_0 u)\, dv_g \leq \mathcal{J}_\varepsilon(t_0 u).\end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{J}_\varepsilon(t_1\psi) < \inf_{\|u\|=t_0} \mathcal{J}_\varepsilon(u) \quad \text{and} \quad \|t_1\psi\| < t_0,$$

证明完成。 □

引理 2.2.

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{J}_\varepsilon(t\psi) = -\infty.$$

证明. 条件（F3）意味着，对每一个 $u \in \mathbb{R}$，我们有 $F(u) \geq |u|^\mu$ 从而得到

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\varepsilon(t\psi) &\leq \frac{1}{2}t^2 - t^\mu \int_M |\psi|^\mu\, dv_g - \frac{1}{2}\int_M G\left(x, \varepsilon + (t\psi)^2\right)\, dv_g \\ &\leq \frac{1}{2}t^2 - t^\mu \int_M |\psi|^\mu\, dv_g - \frac{1}{2}\int_M G\left(x, \varepsilon\right)\, dv_g\end{aligned}$$

并且我们有以下极限

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{J}_\varepsilon(t\psi) = -\infty.$$

□

由于引理 2.2，我们可以找到 $t_2 > t_0$ 使得 $\mathcal{J}_\varepsilon(t_2\varphi) < 0$。定义

$$\varGamma = \{\gamma \in C([0,1]; H^1(M)) : \gamma(0) = t_1\varphi, \gamma(1) = t_2\varphi\}.$$

从引理 2.1 和 2.2，如 [6] 所示，利用山路定理我们可以找到一个水平为

$$c_\varepsilon := \inf_{\gamma\in\varGamma} \max_{t\in[0,1]} \mathcal{J}_\varepsilon(\gamma(t)) \geq \varPhi(t_0) > 0, \tag{2.2}$$

的 Palais-Smale 序列，即

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_n) \to c_\varepsilon \quad \text{and} \quad \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n) \to 0. \tag{2.3}$$

此外，由于 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 是偶数，我们可以假设 $u_n \geq 0$ 几乎处处在 M 上。

命题 2.3. 经过子序列选取后，(u_n) 在 $H^1(M)$ 中弱收敛且几乎处处收敛到问题的一个弱的非负解 $u_\varepsilon \in H^1(M)$。

$$-\Delta_g u + V(x)u = f(x,u) + g(x, \varepsilon + u^2)u.$$

证明. 我们可以重写 (2.3)

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_M F(x,u_n)\, dv_g - \frac{1}{2}\int_M G(x,\varepsilon+u_n^2)\, dv_g = c_\varepsilon + o(1) \tag{2.4}$$

和

$$\|u_n\|^2 - \int_M f(x,u_n)u_n\, dv_g - \int_M g(x,\varepsilon+u_n^2)u_n^2\, dv_g = \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n)(u_n) = o(\|u_n\|). \tag{2.5}$$

将这两个公式结合起来，如同在 [6, Proof of Theorem 3.1] 中所做的那样，我们得到

$$\begin{aligned} 2c_\varepsilon + o(\|u_n\|) &\geq \int_M f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)\, dv_g + \underbrace{\int_M g(x,\varepsilon+u_n^2)u_n^2 - G(x,\varepsilon+u_n^2)\, dv_g}_{\geq 0} \\ &\geq (\mu-2)\int_M F(x,u_n)\, dv_g, \end{aligned}$$

其中使用了 (F3)，(G1) 以及备注 1.1(b)。使用这个不等式和 (2.4)，我们得到对于足够大的 n，

$$\|u_n\|^2 \leq \frac{4c_\varepsilon}{\mu-2} + 2c_\varepsilon + o(\|u_n\|) \tag{2.6}$$

所以 Palais-Smale 序列是有界的，并且在子序列的意义下，我们有下列收敛：

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{in } H^1(M) \\ u_n &\to u_\varepsilon \quad \text{a.e. in } M. \end{aligned}$$

固定任意的测试函数 $\varphi \in C_0^\infty(M)$。取任意可测集 $E \subset M$ 并注意

$$\begin{aligned} \int_E |f(x,u_n)\varphi|\, dv_g &\lesssim \int_E (1+|u_n|^{2^*-1})|\varphi|\, dv_g \lesssim |\varphi\chi_E|_1 + \int_E |u_n|^{2^*-1}|\varphi|\, dv_g \\ &\lesssim |\varphi\chi_E|_1 + \left(S_V^{1/2^*}\|u_n\|\right)^{2^*-1} |\varphi\chi_E|_{2^*} \end{aligned} \tag{2.7}$$

且由于 (u_n) 在 $H^1(M)$ 中有界，族 $\{f(\cdot,u_n)\varphi\}$ 一致可积并且根据 Vitali 收敛定理，

$$\int_M f(x,u_n)\varphi\, dv_g \to \int_M f(x,u_\varepsilon)\varphi\, dv_g. \tag{2.8}$$

为了在奇点项中取极限，(G2) 和 Cauchy-Schwarz 不等式给出

$$\int_E g(x,\varepsilon+u_n^2)|u_n\varphi|\,dv_g \le |g(\cdot,\varepsilon)|_\infty \int_M \chi_E|u_n\varphi|\,dv_g \le |g(\cdot,\varepsilon)|_\infty|\varphi\chi_E|_2|u_n|_2, \tag{2.9}$$

由于 (u_n) 在 $H^1(M)$ 中有界，我们得到 $\{g(\cdot,\varepsilon+u_n^2)u_n\varphi\}$ 一致可积并且根据 Vitali 收敛定理

$$\int_M g(x,\varepsilon+u_n^2)u_n\,dv_g \to \int_M g(x,\varepsilon+u_\varepsilon^2)u_\varepsilon\,dv_g. \tag{2.10}$$

总结起来，从 u_n，(2.8) 和 (2.10) 的弱收敛性我们可以传递到条件 $\mathcal{J}'(u_n)(\varphi)=0$ 的极限，并且我们发现 u_ε 是问题

$$-\Delta_g u + V(x)u = f(x,u) + g(x,\varepsilon+u^2)u. \tag{2.11}$$

的弱解由于 $u_n \ge 0$，从逐点收敛，$u_\varepsilon \ge 0$。 □

3. 解的 ε-扰动问题（2.11）的正则性

为了通过 $\varepsilon \to 0^+$，遵循 [6] 的策略，我们需要关于解的规则性的信息。

命题 3.1. *在命题 2.3 中找到的非负弱解 $u_\varepsilon \in H^1(M)$ 属于某种 $\alpha < 1$ 的 $C^{2,\alpha}(M)$ 类，并且在 M 上处处为 $u_\varepsilon > 0$。*

证明. 修复 $\varepsilon > 0$。在方程 (2.11) 中，我们表示为

$$h(x) := V(x) - g(x,\varepsilon+u_\varepsilon^2),\ x \in M,$$

并观察到 $h \in L^\infty(M)$. 确实

$$|h| = |V - g(\cdot,\varepsilon+u_\varepsilon^2)| \le |V| + g(\cdot,\varepsilon+u_\varepsilon^2) \le |V| + g(\cdot,\varepsilon) \in L^\infty(M).$$

现在表示为 $w := u_\varepsilon$。根据强最大值原理，我们得到 $w > 0$。让我们将方程 (2.11) 重写为形式

$$-\Delta_g u_\varepsilon = -hu_\varepsilon + \frac{f(x,w(x))}{w}u_\varepsilon$$

并记作

$$k(x,u_\varepsilon) := -h(x)u_\varepsilon + \frac{f(x,w)}{w(x)}u_\varepsilon.$$

现在方程 (2.11) 取得形式

$$-\Delta_g u_\varepsilon = k(x,u_\varepsilon).$$

从 (1.3)，对于每一个 $\delta > 0$ 我们可以找到 $C_\delta > 0$ 使得

$$\left|\frac{f(x,w)}{w}\right| \le \delta + C_\delta|w|^{2^*-2}.$$

所以我们得到

$$|k(x,u_\varepsilon)| \le \left(\underbrace{|h(x)| + \left|\frac{f(x,w(x))}{w(x)}\right|}_{a(x):=}\right)(1+|u_\varepsilon|)$$

并且 $a \in L^{\frac{N}{2}}(M)$. 因此根据 Brezis-Kato 型结果（参见引理 A.1），我们得出对于每一个 $q < \infty$，都有 $u_\varepsilon \in L^q(M)$，并且标准的引导过程显示 $u_\varepsilon \in W^{2,q}(M)$. 现在让我们固定 $\alpha < 1$ 并选择 q

使得 $\alpha \le 1-\frac{N}{q}$。然后利用 Sobolev 嵌入定理（参见 [2, Theorem 2.10, Theorem 2.20]），我们得到 $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}(M)$。显然，$u_\varepsilon \in L^\infty(M)$，并且很容易看出映射 $M \ni x \mapsto k(x,u_\varepsilon(x)) \in \mathbb{R}$ 是 $C^{0,\alpha}(M)$。因此，特别是，$u_\varepsilon \in W^{2,2}(M)\cap L^\infty(M)$ 和 $\Delta_g u \in C^{0,\alpha}(M)$。然后，椭圆正则性理论得出 $u_\varepsilon \in C^{2,\alpha}(M)$。 □

4. 定理的证明 1.2

同样如在 [6] 中，考虑在 (2.2) 中的路径 $\gamma(t)=t\psi, t\in[t_1,t_2]$ 我们得到

$$0<\Phi(t_0)\le c_\varepsilon \le c := \sup_{t\in[t_1,t_2]} \mathcal{J}(t\psi). \tag{4.1}$$

令 $(\varepsilon_k)\subset(0,\infty)$ 是一个序列使得 $\varepsilon_k \to 0^+$，并记为 $u_k := u_{\varepsilon_k}$。注意到通过 (2.6)，(4.1) 和范数的弱下半连续性，我们得到序列 (u_k) 在 $H^1(M)$ 中有界，并且通过选取子序列，

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } H^1(M)$$

$$u_k \to u \quad \text{a.e. in } M.$$

类似地，在 (2.7) 的论述中，我们得出

$$\int_M f(x,u_k)\varphi\, dv_g \to \int_M f(x,u)\varphi\, dv_g \tag{4.2}$$

对于每一个 $\varphi \in C_0^\infty(M)$. 现在我们必须证明

$$\int_M g(x,\varepsilon_k+u_k^2)u_k\varphi\, dv_g \to \int_M g(x,u^2)u\varphi\, dv_g.$$

首先，我们将证明存在 δ_0 使得当 k 足够大时，有 $u_k \ge \delta_0$。设 $x_k\in M$ 是 u_k 具有全局最小值的点。显然

$$-\Delta_g u(x_k) \le 0$$

并且我们得到

$$V(x_k)u_k(x_k)+|f(x_k,u_k(x_k))| \ge g(x_k,\varepsilon_k+u_k(x_k)^2)u_k(x_k). \tag{4.3}$$

假设矛盾，即 $u_k(x_k)\to 0$。然后，(4.3)，(F2) 和 (G4) 暗示

$$\max_M V+o(1) \ge V(x_k)+\frac{|f(x_k,u_k(x_k))|}{u_k(x_k)} \ge g(x_k,\varepsilon_k+u_k(x_k)^2) \ge \min_M g(\cdot,\varepsilon_k+u_k(x_k)^2) \to \infty$$

作为 $k\to\infty$，这是矛盾的。由此得出，

$$\min_M u_k \ge \delta_0$$

对于某个 $\delta_0>0$。因此我们可以估计

$$g(x,\varepsilon_k+u_k^2) \le g(x,\delta_0^2),$$

然后使用 Hölder 不等式

$$\int_E g(x,\varepsilon+u_k^2)|u_k\varphi|\, dv_g \le |g(x,\delta_0^2)|_\infty |u_k|_2 |\chi_E\varphi|_2,$$

所以由 (u_k) 在 $L^2(M)$ 中的有界性，我们通过 Vitali 收敛定理得到

$$\int_M g(x,\varepsilon+u_k^2)u_k\varphi\, dv_g \to \int_M g(x,u^2)u\varphi\, dv_g$$

成立。因此，令 $k \to \infty$ 在

$$-\Delta_g u_k + V(x)u_k = f(x,u_k) + g(x, \varepsilon_k + u_k^2)u_k.$$

中，我们得到 u 是 (1.1) 的弱解。特别地，u 几乎处处为正，因为从逐点收敛来看，$u(x) \geq \delta_0$ 对几乎所有的 $x \in M$ 成立。

附录 A. Brezis-Kato 结果在紧黎曼流形上

在附录中，我们展示了一个著名的 Brezis-Kato 结果，参见例如 [12, Lemma B.3]。由于我们在黎曼流形的情况下找不到该陈述的参考文献，为了读者方便，这里提供了它（基于 [12, Lemma B.3] 的证明）。

引理 A.1. 令 $u \in H^1(M)$ 为方程

$$-\Delta_g u = g(x,u), \tag{A.1}$$

的弱解，其中 $g : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个满足

$$|g(x,u)| \leq a(x)(1+|u|)$$

的 *Carathéodory* 函数，对于某个 $a \in L^{N/2}(M)$。然后对于任意的 $u \in L^q(M) q < \infty$.

证明. 令 $s \geq 0$, $L \geq 1$ 表示 $\varphi = \varphi_{s,L} := u \min\{|u|^{2s}, L^2\} \in H^1(M)$。注意到

$$\int_M \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dv_g = \int_M |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} \, dv_g + \frac{s}{2} \int_{\{x \in M : |u(x)|^s \leq L\}} |\nabla(|u|^2)|^2 |u|^{2s-2} \, dv_g.$$

因此，用 φ 测试方程 (A.1) 我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_M |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} \, dv_g + \frac{s}{2} \int_{\{x \in M : |u(x)|^s \leq L\}} |\nabla(|u|^2)|^2 |u|^{2s-2} \, dv_g = \int_M \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dv_g = \\
&= \int_M g(x,u)\varphi \, dv_g \leq \int_M a(1+|u|)|u| \min\{|u|^{2s}, L^2\} \, dv_g \\
&\leq \int_M a(1+2|u|^2) \min\{|u|^{2s}, L^2\} \, dv_g = \int_M a \min\{|u|^{2s}, L^2\} \, dv_g + 2\int_M a|u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} \, dv_g \\
&= \int_M a \min\{|u|^{2s}, L^2\}(1-|u|^2) \, dv_g + 3\int_M a|u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} \, dv_g \\
&\leq \int_M a \, dv_g + 3\int_M a|u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} \, dv_g.
\end{aligned}$$

然后，假设 $u \in L^{2s+2}(M)$，对于任意的 $K \geq 1$ 我们可以估计（$\widetilde{C} > 0$ 可能会从一行变化到另一行）：

$$\begin{aligned}
&\int_M |\nabla(u\min\{|u|^s, L\})|^2\,dv_g \leq 2\int_M |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\,dv_g + 2\int_{\{x\in M: |u(x)|^s \leq L\}} |u\nabla(|u|^s)|^2\,dv_g \\
&\leq \widetilde{C}\left(1 + \int_M a|u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\,dv_g\right) \\
&\leq \widetilde{C}\left(1 + K\int_M |u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\,dv_g + \int_{\{x\in M: a(x)>K\}} a|u|^2\min\{|u|^{2s}, L^2\}\,dv_g\right) \\
&\leq \widetilde{C}\left(1 + K|u|_{2s+2}^{2s+2} + \int_{\{x\in M: a(x)>K\}} a|u|^2\min\{|u|^{2s}, L^2\}\,dv_g\right) \\
&\leq \widetilde{C}(1+K) + \underbrace{\widetilde{C}\left(\int_{\{x\in M: a(x)>K\}} a^{N/2}\,dv_g\right)^{2/N}}_{=:\gamma(K)} \left(\int_M (|u|\min\{|u|^s, L\})^{2^*}\,dv_g\right)^{2/2^*}.
\end{aligned}$$

现在让我们选择 $K \geq 1$ 使得 $\gamma(K) \leq \frac{1}{2}$，我们得到

$$\int_M |\nabla(u\min\{|u|^s, L\})|^2\,dv_g \lesssim 1,$$

所以我们在 $\nabla(u\min\{|u|^s, L\})$ 的 L^2 范数上得到了关于 L 的一致界。因此取 $L \to \infty$ 我们得到

$$\int_M |\nabla(|u|^{s+1})|^2 < \infty.$$

这样我们就证明了 $|u|^{s+1} \in H^1(M) \subset L^{2^*}(M)$. 这意味着 $u \in L^{\frac{2(s+1)N}{N-2}}$。取 $s_0 = 0$ 和 $s_i + 1 := (s_{i-1}+1)\frac{N}{N-2}$，我们得到每个 $q < \infty$ 的 $u \in L^q(M)$。 □

致谢

巴托什 · 比耶加诺夫斯基和亚当 · 科努什部分得到了波兰国家科学中心的资助（资助号为 2022/47/D/ST1/00487）。

References

[1] D. Arcoya and L. Moreno-Mérida, *Multiplicity of solutions for a Dirichlet problem with a strongly singular nonlinearity*, Nonlinear Anal. **95** (2014), 281–291; MR3130522

[2] T. Aubin, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 252, Springer, New York, 1982; MR0681859

[3] R. A. Bartnik and J. A. Isenberg, *The constraint equations*, in *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, 1–38, Birkhäuser, Basel; MR2098912

[4] L. Boccardo and L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations **37** (2010), no. 3-4, 363–380; MR2592976

[5] Y. Choquet-Bruhat, J. A. Isenberg and D. Pollack, The constraint equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds, Classical Quantum Gravity **24** (2007), no. 4, 809–828; MR2297268

[6] E. Hebey, F. Pacard and D. Pollack, A variational analysis of Einstein-scalar field Lichnerowicz equations on compact Riemannian manifolds, Comm. Math. Phys. **278** (2008), no. 1, 117–132; MR2367200

[7] J. A. Isenberg, Constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds, Classical Quantum Gravity **12** (1995), no. 9, 2249–2274; MR1353772

[8] J. A. Isenberg and V. E. Moncrief, A set of nonconstant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds, Classical Quantum Gravity **13** (1996), no. 7, 1819–1847; MR1400943

[9] L. Ma and J. Wei, Stability and multiple solutions to Einstein-scalar field Lichnerowicz equation on manifolds, J. Math. Pures Appl. (9) **99** (2013), no. 2, 174–186; MR3007843

[10] Q. A. Ngô and X. Xu, Existence results for the Einstein-scalar field Lichnerowicz equations on compact Riemannian manifolds, Adv. Math. **230** (2012), no. 4-6, 2378–2415; MR2927374

[11] B. Premoselli, Effective multiplicity for the Einstein-scalar field Lichnerowicz equation, Calc. Var. Partial Differential Equations **53** (2015), no. 1-2, 29–64; MR3336312

[12] M. Struwe, *Variational methods*, fourth edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 34, Springer, Berlin, 2008; MR2431434

(B. Bieganowski)
Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics,
University of Warsaw,
ul. Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland
Email address: bartoszb@mimuw.edu.pl

(A. Konysz)
Faculty of Mathematics and Computer Science,
Nicolaus Copernicus University,
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toru, Poland
Email address: adamkon@mat.umk.pl