

调制线性波包和耦合光纤中间隙孤子的分析

D. V. Shaykin

¹⁾ Russian University of Transport (RUT-MIIT), Obrazcova st. 9, Moscow, Russia

²⁾ Skolkovo Institute of Science and Technology, Skolkovo, Moscow, 143026, Russia

³⁾ Moscow Institute of Physics and Technology, Institutsky lane 9, Dolgoprudny, Moscow region, 141700, Russia

一对折射率符号不同的耦合波导被考虑。研究表明，如果这些波动是幅度调制的，则线性波谱中的间隙会闭合。为了寻找作为指数调制波包信封的孤子，使用了这些波包的色散律。色散律的不同分解导致与频谱不同部分相关的解。数值计算表明与解析预测有很好的 consistency。

Keywords: 孤子，带隙孤子，耦合光纤，负折射率

I. 介绍

在最近几十年里，人们非常关注具有各种性质的超材料的制造。本文将重点讨论一对波导管，其中一个具有负折射率 $n < 0$ 。此类材料的一个重要特征是负群速度

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\vec{k}}{k}, \quad (1)$$

，其中 $\partial \omega / \partial k < 0$ 。曼德尔施塔姆^{1,2}在上世纪 40 年代指出了这种折射率和群速度之间的联系。对光在介质中传播的理论研究始于 50 年代³⁻⁶，而首个实验样本直到 21 世纪才被制造出来⁷⁻¹¹。超材料的创造带来了新一轮针对具有负折射率的介质的理论研究（参见例如文献¹²⁻¹⁷）。我们对具有相反符号的 n 的耦合光学光纤感兴趣（见参考文献¹⁸⁻²⁰）。波导中模式的耦合是由光隧穿²¹⁻²³引起的。

继文章²⁴，我们引入了一个耦合模式系统，形式如下

$$i(\partial A / \partial t + \partial A / \partial x) - \delta A + p * B + r_1 |A|^2 A = 0, \quad (2)$$

$$i(\partial B / \partial t - \partial B / \partial x) - \delta B + p * A + r_2 |B|^2 B = 0, \quad (3)$$

其中 δ 负责相位匹配的违反，而 r_i 是一个非线性参数。我们保留了可选参数 p ，这将在数值计算和可视化中有所帮助。关键是，通过将这个方程系统除以 p ，我们可以重新缩放该系统以达到这种形式。我们将使用这个缩放技巧来构建有意义的数值图像。可以注意到⁽²⁾以无量纲形式呈现；因此，参数也是无量纲的。

此类系统的特征是色散规律中存在一个间隙：

$$\omega = \delta \pm \sqrt{k^2 + p^2}, \quad (4)$$

其中，宽度为 $2p$ 的间隙以 δ 为中心。一般来说，在周期系统或具有特定特征频率的系统中，光谱中的间隙是一个常见现象；然而，我们的任务并不暗示任何此类情况。

最近，已经变得²⁵⁻²⁸显然许多可积和非可积方程的非线性问题可以通过研究线性包络来解决。在这里，我们将展示通过调查调制后的线性包络，我们可以在频谱的不同部分获得孤子包络。以前，类似的布拉格波导问题²⁹⁻³¹是使用适合于可积或接近可积方程的特殊情况的复杂方法的推论来解决的。在我们的任务中，我们将不依赖于如此强大且限制性的特征，而是遵循适用于任何方程的方法^{32,33}，例如，在 Refs^{34,35} 中所做的那样。

II. 波包

让我们寻找形如载体波数为 k 和频率为 ω 的线性波包的解

$$A(x, t) = A(\xi) e^{i(kx - \omega t + \phi(\xi))}, \quad (5)$$

$$B(x, t) = [B(\xi) + ib(\xi)] e^{i(kx - \omega t + \phi(\xi))}, \quad (6)$$

其中变量 $\xi = x - Vt$ 与以速度 V 运动的质量中心相关, ϕ 是一个啁啾函数。将此形式代入 (2) 得到

$$\begin{aligned} A[\omega_0 - k + (V - 1)\dot{\phi}] + pB + r_1 A^3 &= 0, \\ \dot{A}(V - 1) - pb &= 0, \\ B[\omega_0 + k + (V + 1)\dot{\phi}] + \dot{b}(V + 1) + \\ + pA + r_2(B^2 + b^2)B &= 0, \\ b[\omega_0 + k + (V + 1)\dot{\phi}] - \dot{B}(V + 1) + \\ + r_2(B^2 + b^2)b &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

这样的系统描述了波包的总体演化视图 (5)。我们通过调制振幅函数 $\exp(-\Omega\xi)$ 来具体化它, 即

$$(A, B, b) = (A_0, B_0, b_0)e^{-\Omega\xi} \quad (8)$$

由于我们感兴趣的是线性波包, 则需要对这个系统进行线性化:

$$\begin{aligned} A[\omega_0 - k] + pB &= 0, \\ \dot{A}\Omega(V - 1) + pb &= 0, \\ B[\omega_0 + k] - \dot{b}\Omega(V + 1) + pA &= 0, \\ b[\omega_0 + k] + \dot{B}\Omega(V + 1) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中引入了一个新的方便的参数 $\omega_0 = \omega - \delta$ 。如我们可以看到没有函数 ϕ 。因此, 我们有 4 个方程和只有 3 个参数 ω, Ω, k , 所以简化后我们得到两个方程

$$V = \frac{k}{\omega_0}, \quad k^2 = \frac{\omega_0^2 + \Omega^2 - p^2}{1 + \Omega^2/\omega_0^2} \quad (10)$$

它们具有简单的物理意义, 可以从极限 $\Omega \rightarrow \infty$ (未调制波的情况) 得出; 第一个表示调制波的色散定律, 第二个是群速度。如从这样的色散定律可以看出, $k = 0$ 处的间隙变窄, 在 $\Omega > 0$ 时它完全消失。这使我们能够寻找那些载波频率位于以前禁止区域的波包; 作为这些包络的孤子被称为隙孤子。一般来说, 由于我们要研究的是波包, 我们应该考虑 $\Omega \ll \omega$, 所以我们引入一个小参数

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{\omega} \ll 1. \quad (11)$$

这意味着波包的包络应该比波包振荡慢得多的函数, 并且要研究包络的演化, 我们需要使用缓慢变量 $\Omega\xi$ 。然后对于信封 $\partial/\partial\xi = \Omega\partial/\partial\xi = \varepsilon\omega\partial/\partial\xi$, 以及一般系

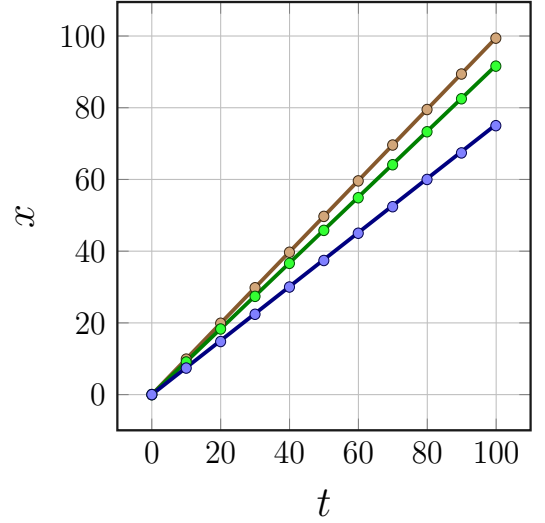


图 1: 方程 (2) 的数值解 (圆圈) 与方程 (10) 对间隙外孤子的解析预测 (实线) 的比较, 对于以下三个数据集 $\{\omega, \delta, p, \varepsilon\}$: 棕色 $\{12, 2, 1, 0.2\}$, 绿色 $\{15, 10, 2, 0.05\}$, 蓝色 $\{5, 2, 2, 0.1\}$; $r_2 = r_1 = 1$ 。

统 (7) 转换为

$$\begin{aligned} A[\omega_0 - k + (V - 1)\dot{\phi}\Omega] + pB + r_1 A^3 &= 0, \\ \dot{A}\Omega(V - 1) - pb &= 0, \\ B[\omega_0 + k + (V + 1)\dot{\phi}\Omega] + \dot{b}\Omega(V + 1) + \\ + pA + r_2(B^2 + b^2)B &= 0, \\ b[\omega_0 + k + (V + 1)\dot{\phi}\Omega] - \dot{B}\Omega(V + 1) + \\ + r_2(B^2 + b^2)b &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

III. 孤子的类型

为进一步的工作, 使用如下形式的逆散射定律将更为方便:

$$k = \sqrt{\omega_0^2 + (\varepsilon\omega)^2 - p^2} / \sqrt{1 + (\varepsilon\omega)^2/\omega_0^2}. \quad (13)$$

如人们所注意到的, 可以以不同的方式分解这样的表达式, 并导致不同的解。

A. 间隙之外

对于开始, 我们在带隙外获得一个普通的孤子, 即 $\omega_0 > p$ 。因此我们可以将 (13) 分解为

$$k = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} + \frac{(\omega p / \omega_0)^2}{2\sqrt{\omega_0^2 - p^2}} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) = \alpha + \gamma \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \quad (14)$$

代入 (14) 到 (12) 后, 我们可以寻找级数形式的解 $f = \sum_0^\infty \varepsilon^n f_n$ 。简单的计算导致以下结果

$$\{A, B, \dot{\phi}\} = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon^n \{A_n, B_n, \dot{\phi}_n\}, \quad b = \sum_{n=2}^\infty \varepsilon^n b_n \quad (15)$$

在一阶方程中 (12) 给

$$A_1(\omega_0 - \alpha) + pB_1 = 0, \quad (16)$$

第二阶导致了

$$A_2(\omega_0 - \alpha) + pB_2 = 0, \quad (17)$$

$$\dot{A}_1 \omega \left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1 \right) = pb_2.$$

最后, 在第三阶我们得到了众所周知的振荡方程

$$\ddot{A}_1 = A_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left[\frac{r_2(\omega_0 - \alpha)^3 + r_1 p^2(\omega_0 + \alpha)}{p^3} \right] A_1^3 \quad (18)$$

它有一个孤子解。因此我们在主要阶数中得到

$$A = \frac{\varepsilon e^{i(kx - \omega t)}}{\cosh(\varepsilon \omega \xi)} \frac{\sqrt{2p^3}}{\sqrt{r_2(\omega_0 - \alpha)^3 + r_1 p^2(\omega_0 + \alpha)}} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (19)$$

和 $B = -A(\omega_0 - \alpha)/p$ 。特别是如果 $p \ll \omega_0$, 那么 $|B| \ll |A|$, 也就是说, 我们遇到了波仅沿其中一个传播的耦合波导情况。

如方程 (18) 所示, 对于一对离散波导 ($r_2, r_1 < 0$), 孤子不存在。

B. 关于差距

方程 (13) 的另一种分解是通过取 $\omega_0 = p$ 获得的:

$$k = \omega \varepsilon + o(\varepsilon^2). \quad (20)$$

在这种情况下, 我们也可以使用级数 (15)。一级给出

$$A_1 + B_1 = 0, \quad (21)$$

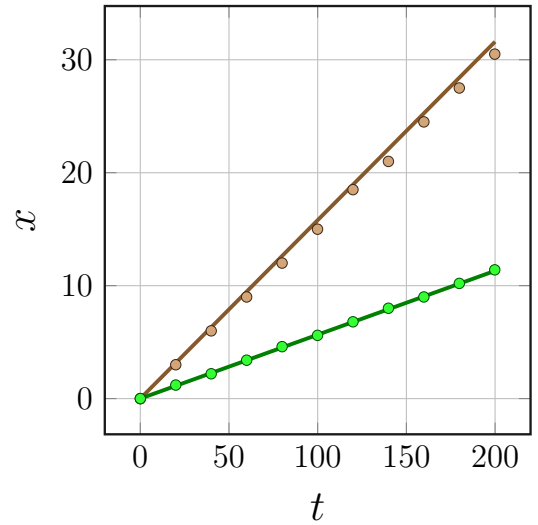


图 2: 方程 (2) 的数值解 (圆圈) 与方程 (10) 对间隙上孤子的解析预测 (实线) 的比较, 针对以下两组数据 $\{\delta, p, \varepsilon\}$: 棕色 $\{15, 1, 0.01\}$, 绿色 $\{2, 15, 0.05\}$;

$$r_2 = r_1 = 1.$$

二级给出

$$p(A_2 + B_2) = A_1 \omega. \quad (22)$$

第三步我们得到

$$\ddot{A}_1 = A_1 - (r_2 + r_1) \frac{p}{\omega^2} A_1^3, \quad (23)$$

因此在主导阶我们有

$$A = \varepsilon \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{(r_2 + r_1)p}} \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{\cosh(\varepsilon \omega \xi)}, \quad (24)$$

和 $B = -A$ 。

C. 内部的间隙

为了分解色散定律 (13), 我们必须要求 $\omega_0^2 - p^2 + (\varepsilon \omega)^2 > 0$ 。我们也可以在带隙内部满足这个要求, 特别是如果我们取 $\omega_0 = p - q\varepsilon^2$, 其中参数 q 有一个可以通过代入 $\omega_0^2 - p^2 + (\varepsilon \omega)^2 > 0$ 获得的限制。一个简单的分析表明通过暗示 $\omega \sim \delta$ 得到 $q \lesssim (\delta + p)^2 / 2p$ 。另一个限制来自于公式 (13) 的分母: $\varepsilon \ll \omega_0 / \omega$ 。在这种框架下, 我们可以在初始间隙边界附近但仍在其内部分解方程 (13):

$$k = \varepsilon \sqrt{(\delta + 1)^2 - 2 * qp} + o(\varepsilon^2) = \alpha \varepsilon + o(\varepsilon). \quad (25)$$

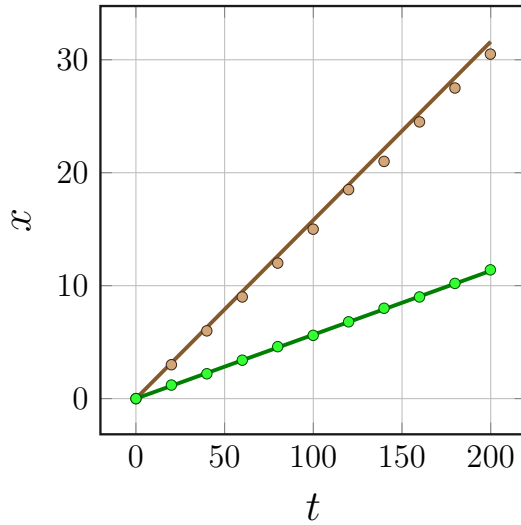


图 3: 方程 (2) 的数值解 (圆圈) 与方程 (10) 对间隙内孤子的解析预测 (实线) 的比较, 针对以下两组数据集: $\{\delta, p, d, \varepsilon\}$: 棕色 $\{0.1, 1, 0.4, 0.1\}$, 绿色 $\{10, 1, 20, 0.01\}$; $r_2 = r_1 = 1$ 。

级数 (15) 也满足我们的问题, 最终我们可以得到

$$\ddot{A}_1 = A_1 - (r_2 + r_1) \frac{p}{(\delta + p)^2} A_1^3 \quad (26)$$

该结果解决了任务:

$$A = \varepsilon \frac{\sqrt{2}(\delta + p)}{\sqrt{(r_2 + r_1)p}} \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{\cosh(\varepsilon \omega \xi)}, \quad (27)$$

和 $B = -A$ 。

可以注意到, 在最后两种情况下, 波数 $k \propto \varepsilon$ 和包络函数也与 ε 成正比。这意味着在这些情况下, 波包仅包含几个振荡。此外, 孤子只存在于不同的波导中, 当且仅当 $r_2 + r_1 > 0$ 。

IV. 结论

仅基于线性波包理论, 我们能够在光谱的不同部分获得孤子作为包络。这一思想不依赖于任何方程的可积性; 因此, 它可以应用于更复杂的问题。

V. 致谢

我想对我的老师 A.M. Kamchatnov 在我工作中不断给予的帮助表示感谢。他告诉我这里使用的方法。

VI. 资金来源

该工作是根据 2025 年 3 月 20 日编号为 103-00001-25-02 的国家任务安排, 主题为“具有拓扑缺陷 (包括非线性和负折射率) 的激光波导二聚链的光学性质”。

- ¹Mandelstam, Zh. Éksp. Teor. Fiz. 15, 475 (1945).
- ²Mandelstam, Polnoe Sobranie Trudov Vol.5 (1950).
- ³D. V. Sivukhin, Opt. Spektrosk. 3, 308 (1957).
- ⁴Pafomov, Zh. Éksp. Teor. Fiz. 30 761 (1956).
- ⁵Pafomov, Zh. Éksp. Teor. Fiz. 33 1074 (1957).
- ⁶Pafomov, Zh. Éksp. Teor. Fiz. 36 1853 (1959).
- ⁷D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, et al., Phys. Rev. Lett. 84 (18), 4184 (2000).
- ⁸C. G. Parazzoli, R. B. Greegor, K. Li, et al., Phys. Rev. Lett. 90, 107401 (2003).
- ⁹R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, Science 292 (5514), 77 (2001).
- ¹⁰A. A. Houck, J. B. Brock, and I. L. Chuang, Phys. Rev. Lett. 90, 137401 (2003).
- ¹¹W. Cai, U. K. Chettiar, H.-K. Yang, et al., Opt. Express 15 (6), 3333 (2007).
- ¹²A. A. Zharov, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. Lett. 91, 037401 (2003).
- ¹³C. Luo, S. G. Johnson, and J. D. Joannopoulos, Appl. Phys. Lett. 81, 2352 (2002).
- ¹⁴I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, and Yu. S. Kivshar, J. Opt. Soc. Am. B 23, 529 (2006).
- ¹⁵A. K. Popov, S. A. Myslivets, and V. M. Shalaev, Physica B 405, 2999 (2010).
- ¹⁶E. I. Ostroukhova and A. I. Maimistov, Opt. Spectrosc. 112, 255 (2012).
- ¹⁷I. V. Shadrivov, R. W. Ziolkowski, A. A. Zharov, and Yu. S. Kivshar, Opt. Express 13, 481 (2005).
- ¹⁸N. M. Litchinitser, I. R. Gabitov, and A. I. Maimistov, Phys. Rev. Lett. 99, 113902 (2007).
- ¹⁹E. V. Kazantseva, A. I. Maimistov, and S. S. Ozhenko, Phys. Rev. A 80, 043833 (2009).
- ²⁰Y. Xiang, S. Wen, X. Dai, and D. Fan, Phys. Rev. E 82, 056605 (2010).
- ²¹D. Marcuse, Bell. Syst. Tech. J. 50 (6), 1791 (1971).
- ²²Allan W. Snyder, J. Opt. Soc. Am. 62, 1267-1277 (1972).
- ²³Integrated Optics, Ed. by T. Tamir (Springer, New York, 1975; Mir, Moscow, 1978).
- ²⁴Maimistov, Andrei I. et al., Optics and Spectroscopy 104 (2008): 253-257.
- ²⁵El, G. A., Grimshaw, R. H. J., Smyth, N. F., Physica D: Nonlinear Phenomena, 237(19), 2423 – 2435, (2008).
- ²⁶A. M. Kamchatnov, Dispersive shock wave theory for nonintegrable equations, Phys. Rev. E 99, 012203 (2019).
- ²⁷A. M. Kamchatnov and D. V. Shaykin, Phys. Rev. E 108, 054205 (2023).
- ²⁸A. M. Kamchatnov and D. V. Shaykin, Physica D, 460, 134085 (2024).
- ²⁹D. N. Christodoulides and R. I. Joseph, Phys. Rev. Lett. 62, 1746 (1989).

³⁰A. B. Aceves and S. Wabnitz, Phys. Lett. A 141, 37 (1989).

³¹Conti C., Trillo S., Phys. Rev. E, V.64. 036617 (2001).

³²O. Akimoto and K. Ikeda, J. Phys. A: Math. Gen. 10, 425 (1977).

³³K. Ikeda and O. Akimoto, J. Phys. A: Math. Gen. 12, 1105 (1979).

³⁴A.M. Kamchatnov, S.A. Darmanyany, M. Nevère, Journal of Luminescence, 110, 4, 373-377 (2004).

³⁵Darmanyany, S.A., Kamchatnov, A.M., M. Nevère, J. Exp. Theor. Phys. 96, 876 – 884 (2003).