四点连续不变桥：数据编码的新工具

Stanislav Semenov
stas.semenov@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5891-8119

2025 年 4 月 30 日

arxiv:2504.21473v1 中译本

摘要

我们提出了一种结构丰富的不变关系，连接一类解析定义的序列和函数的四个连续评估值。从形式为

$$f(n) = \frac{(1/2)^n + (-1)^n}{n},$$

的离散交替衰减序列开始，我们证明了比率

$$\frac{(n-2)f(n-2) + (n-3)f(n-3)}{nf(n) + (n-1)f(n-1)} = 4$$

对于所有整数 $n \geq 4$ 均恒成立。然后我们将此结构通过引入广义函数

$$s(t) = \frac{p^t + q_1 \sin(r_1 \pi t) + q_2 \cos(r_2 \pi t)}{t},$$

扩展到实数和复数参数，其中包含 $p, q_1, q_2 \in \mathbb{C}$ 和 $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$，对应的四点关系

$$\frac{s(t)t + s(t+1)(t+1)}{s(t+2)(t+2) + s(t+3)(t+3)} = a(s)$$

在整个实数 t 范围内保持恒定。

这导致了一个统一的家族 $\mathcal{F}_{\text{Stas}}$ 的不变量控制函数的定义，这些函数在连续域上表现出局部代数规则性。这些不变结构支持稳定的数据重构、预测编码和信号建模，并可能作为结构约束信息框架中的原始组件。

数学主题分类

03F60（构造性和递归分析），26E40（构造性分析）

ACM 分类法

F.4.1 数学逻辑, E.4 编码与信息论

1 介绍

识别结构化序列中的稳定代数不变量为数据建模、预测编码和容错重构提供了强大的机制。虽然现代压缩和信号处理技术通常依赖于统计推断或启发式模式提取 [2]，精确的确定性关系仍然既罕见又宝贵，特别是在它们可以局部验证并连续扩展时。

在这项工作中，我们介绍了一个简单而表达力强的不变关系，它通过一个固定的代数比例连接序列或函数的四个连续评估。我们从离散序列

$$f(n) = \frac{(1/2)^n + (-1)^n}{n},$$

开始，该序列结合了指数衰减和交替符号振荡。这类序列在经典离散数学中已经被广泛研究 [3]，特别是在渐近性和递归关系的背景下。我们证明四点比率

$$\frac{(n-2)f(n-2) + (n-3)f(n-3)}{nf(n) + (n-1)f(n-1)} = 4$$

对所有 $n \geq 4$ 都恒成立，揭示了这一基本表达式中的隐藏结构对称性。

为了扩大这种关系的范围，我们引入了一个实值扩展

$$f_{\mathbb{R}}(t) = \frac{(1/2)^t + \cos(\pi t)}{t},$$

对于这个扩展来说，相同的不变比率在所有实数 $t \neq 0$ 中仍然完全有效。这一扩展表明结构不仅仅是离散的，而是编码了连续域上的解析约束。解释受到早期通过积分平衡对平滑整数编码的研究工作的启发 [4]。

受这些观察的启发，我们制定了一个形式为

$$s(t) = \frac{p^t + q_1 \sin(r_1 \pi t) + q_2 \cos(r_2 \pi t)}{t},$$

的一般函数族，其中 $p, q_1, q_2 \in \mathbb{C}$,$r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$，并调查归一化的四点比

$$\mathcal{I}(t) = \frac{s(t) \cdot t + s(t+1) \cdot (t+1)}{s(t+2) \cdot (t+2) + s(t+3) \cdot (t+3)}$$

是否保持不变。我们发现这个不变量不仅在这一类广泛的函数中得以保留，还定义了一个适用于实数和复数领域的稳健代数恒等式。

这些观察结果自然而然地引导出一个统一族 $\mathcal{F}_{\text{Stas}}$ 的定义，该族与 $Stas$ 型不变函数 $s(t)$ 配对，并关联一个常数 $a(s) \in \mathbb{C}$ 使得 $\mathcal{I}(t) \equiv a(s)$。这种结构使实值序列在代数一致性上得以保持，支持局部重构，并且在复调制下表现出稳定的行为。

四点不变量的简单性和确定性及其与实系统和复系统兼容的特点，表明它在代数编码、模拟建模和基于不变量的信号变换框架中具有广泛的应用潜力。

2 不变关系的推导

我们首先考虑系数序列

$$a_n = \frac{(1/2)^n + (-1)^n}{n},$$

它结合了指数衰减和交替符号。

2.1 系数的两步递推关系

可以验证系数 a_n 满足两步递推关系

$$a_n = \frac{(n-2)a_{n-2} + 3(-1)^n}{4n}.$$

这个递推反映了 a_n 的几何分量和振荡分量之间的相互作用，并允许每一项通过其前两项来表示。

2.2 两步递推的证明

为了证明系数

$$a_n = \frac{(1/2)^n + (-1)^n}{n}$$

满足递推关系

$$a_n = \frac{(n-2)a_{n-2} + 3(-1)^n}{4n},$$

我们通过直接代入和代数变换进行证明。

步骤 1：明确表示 a_n 和 a_{n-2}

给定：

$$a_n = \frac{(1/2)^n + (-1)^n}{n}, \quad a_{n-2} = \frac{(1/2)^{n-2} + (-1)^{n-2}}{n-2}.$$

步骤 2：将 a_{n-2} 代入递推关系式中

递推公式声称：

$$a_n = \frac{(n-2)a_{n-2} + 3(-1)^n}{4n}.$$

代入 a_{n-2} 得到：

$$a_n = \frac{(n-2)\left(\frac{(1/2)^{n-2}+(-1)^{n-2}}{n-2}\right) + 3(-1)^n}{4n}.$$

简化分子：

$$(n-2) \cdot \frac{(1/2)^{n-2} + (-1)^{n-2}}{n-2} = (1/2)^{n-2} + (-1)^{n-2},$$

因此

$$a_n = \frac{(1/2)^{n-2} + (-1)^{n-2} + 3(-1)^n}{4n}.$$

步骤 3：简化 $(-1)^{n-2}$ 和 $(-1)^n$

由于 $(-1)^{n-2} = (-1)^n$，我们有：

$$a_n = \frac{(1/2)^{n-2} + (-1)^n + 3(-1)^n}{4n} = \frac{(1/2)^{n-2} + 4(-1)^n}{4n}.$$

步骤 4：将 $(1/2)^{n-2}$ 重写为关于 $(1/2)^n$

注意

$$(1/2)^{n-2} = 4 \cdot (1/2)^n,$$

因此

$$a_n = \frac{4 \cdot (1/2)^n + 4(-1)^n}{4n} = \frac{(1/2)^n + (-1)^n}{n}.$$

步骤 5：与原始定义进行比较 a_n

这与原始定义完全一致：

$$a_n = \frac{(1/2)^n + (-1)^n}{n},$$

从而确认递推关系成立。

结论

递推关系

$$a_n = \frac{(n-2)a_{n-2} + 3(-1)^n}{4n}$$

确实由给定的系数 a_n 满足，从而完成证明。

2.3 连续系数之间的关系

回忆用于 a_n 和 a_{n-1} 的两步递推关系式：

$$a_n = \frac{(n-2)a_{n-2} + 3(-1)^n}{4n},$$

$$a_{n-1} = \frac{(n-3)a_{n-3} + 3(-1)^{n-1}}{4(n-1)}.$$

我们旨在消除交替符号的分量,并表达四个连续系数之间的直接关系：a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, 和 a_{n-3}。

步骤 1：求解 $3(-1)^n$ 和 $3(-1)^{n-1}$

从第一个递推关系中，解出 $3(-1)^n$ 得到：

$$3(-1)^n = 4na_n - (n-2)a_{n-2}.$$

类似地，从第二个递推关系：

$$3(-1)^{n-1} = 4(n-1)a_{n-1} - (n-3)a_{n-3}.$$

步骤 2：调整第二个表达式

我们观察到

$$(-1)^{n-1} = -(-1)^n,$$

因此

$$3(-1)^{n-1} = -3(-1)^n.$$

将第二个表达式乘以 -1，我们得到：

$$-3(-1)^{n-1} = 3(-1)^n,$$

从而得到：

$$-\left(4(n-1)a_{n-1} - (n-3)a_{n-3}\right) = 3(-1)^n,$$

这简化为

$$3(-1)^n = (n-3)a_{n-3} - 4(n-1)a_{n-1}.$$

步骤 3：使两个表达式相等 $3(-1)^n$

现在，将两个独立的表达式设置为等于 $3(-1)^n$ 得到：

$$4na_n - (n-2)a_{n-2} = (n-3)a_{n-3} - 4(n-1)a_{n-1}.$$

总结

因此，我们建立了如下关系：

$$4na_n + 4(n-1)a_{n-1} = (n-2)a_{n-2} + (n-3)a_{n-3}.$$

这个恒等式通过一个具有整数系数的线性关系将序列中的四个连续项联系起来。现在，设 $f(n) := a_n$，我们可以将其重写为：

$$4 = \frac{(n-2)f(n-2) + (n-3)f(n-3)}{nf(n) + (n-1)f(n-1)}.$$

这是不变比例的最终规范化形式，适用于所有 $n \geq 4$。

3 示例

为了数值上确认不变关系

$$\frac{(n-2)f(n-2) + (n-3)f(n-3)}{nf(n) + (n-1)f(n-1)} = 4$$

我们对若干个 $n \geq 4$ 的值评估了分子和分母使用的

$$f(n) = \frac{(1/2)^n + (-1)^n}{n}.$$

n	Numerator	Denominator	Ratio
4	$2f(2)+1f(1)=\frac{3}{4}$	$4f(4)+3f(3)=\frac{3}{16}$	$\frac{3/4}{3/16}=4$
5	$3f(3)+2f(2)=\frac{3}{8}$	$5f(5)+4f(4)=\frac{3}{32}$	$\frac{3/8}{3/32}=4$
6	$4f(4)+3f(3)=\frac{3}{16}$	$6f(6)+5f(5)=\frac{3}{64}$	$\frac{3/16}{3/64}=4$

表 1: 选定值 n 的不变比率验证。

4 实数参数的扩展

序列

$$f(n)=\frac{(1/2)^n+(-1)^n}{n}$$

的原始定义自然限制了 n 的整数值，因为 $(-1)^n$ 是通过整数指数来定义的。然而，可以通过将 $(-1)^n$ 替换为 $\cos(\pi n)$ 来扩展框架，后者可以平滑地插值 $n\in\mathbb{R}$ 上的交替行为。

因此，我们引入了实值扩展

$$f_{\mathbb{R}}(n)=\frac{(1/2)^n+\cos(\pi n)}{n},$$

定义为所有实数 $n>0$。

函数 $f_{\mathbb{R}}(n)$ 保持两个基本特征：

- **指数衰减**因子 $(1/2)^n$ 确保了 $f_{\mathbb{R}}(n)\to 0$ 作为 $n\to+\infty$，
- **交替行为**: 余弦项以周期 2 平滑振荡，在整数点重现符号变化。

4.1 实数参数的不变关系

我们验证不变关系

$$\frac{(n-2)f_{\mathbb{R}}(n-2)+(n-3)f_{\mathbb{R}}(n-3)}{nf_{\mathbb{R}}(n)+(n-1)f_{\mathbb{R}}(n-1)}=4$$

对于实数值的 $n\geq 4$ 数值上仍然成立。

这一扩展表明，四项关系所依据的结构对称性不仅仅局限于整数序列，而是能够跨越平滑变化的参数而持续存在。它开启了将不变量应用于连续数据流、信号处理以及模拟或准模拟系统中的实时错误检测的可能性。

4.2 实值不变量的证明

我们现在证明不变关系

$$\frac{(n-2)f_{\mathbb{R}}(n-2)+(n-3)f_{\mathbb{R}}(n-3)}{nf_{\mathbb{R}}(n)+(n-1)f_{\mathbb{R}}(n-1)}=4$$

对于实值扩展成立。

$$f_{\mathbb{R}}(n)=\frac{(1/2)^n+\cos(\pi n)}{n}.$$

步骤 1：分子和分母的展开

将 $f_{\mathbb{R}}(n)$ 的定义代入分子得到

$$(n-2)f_{\mathbb{R}}(n-2)+(n-3)f_{\mathbb{R}}(n-3)=(1/2)^{n-2}+\cos(\pi(n-2))+(1/2)^{n-3}+\cos(\pi(n-3)).$$

类似地，分母展开为

$$nf_{\mathbb{R}}(n)+(n-1)f_{\mathbb{R}}(n-1)=(1/2)^{n}+\cos(\pi n)+(1/2)^{n-1}+\cos(\pi(n-1)).$$

步骤 2：分组指数项和三角函数项

指数项组合为

$$(1/2)^{n-2}+(1/2)^{n-3}\quad \text{and}\quad (1/2)^{n}+(1/2)^{n-1},$$

而三角项组合为

$$\cos(\pi(n-2))+\cos(\pi(n-3))\quad \text{and}\quad \cos(\pi n)+\cos(\pi(n-1)).$$

步骤 3：简化指数项

注意到

$$(1/2)^{n-2}=4(1/2)^{n},\quad (1/2)^{n-3}=8(1/2)^{n},$$
$$(1/2)^{n-1}=2(1/2)^{n}.$$

因此，指数部分简化为

$$\text{Numerator (exp)}=4(1/2)^{n}+8(1/2)^{n}=12(1/2)^{n},$$

$$\text{Denominator (exp)}=(1/2)^{n}+2(1/2)^{n}=3(1/2)^{n}.$$

比值的指数贡献因此是

$$\frac{12(1/2)^{n}}{3(1/2)^{n}}=4.$$

步骤 4：简化三角函数项

利用余弦函数的周期性和移位恒等式，

$$\cos(\pi(n-2))=\cos(\pi n),\quad \cos(\pi(n-3))=-\cos(\pi n),$$

$$\cos(\pi(n-1))=-\cos(\pi n).$$

因此，

$$\cos(\pi(n-2))+\cos(\pi(n-3))=\cos(\pi n)+(-\cos(\pi n))=0,$$

$$\cos(\pi n)+\cos(\pi(n-1))=\cos(\pi n)+(-\cos(\pi n))=0.$$

分子和分母中的三角函数贡献消失。

步骤 5：结论

由于三角项相互抵消且指数项给出一个固定的比率 4，我们得出结论

$$\frac{(n-2)f_{\mathbb{R}}(n-2)+(n-3)f_{\mathbb{R}}(n-3)}{nf_{\mathbb{R}}(n)+(n-1)f_{\mathbb{R}}(n-1)}=4$$

对所有实数 $n>3$ 都成立，从而完成证明。

4.3 实值扩展的意义

从整数参数过渡到实数参数从根本上扩展了不变关系的应用范围。在原始的离散设置中，结构编码了严格顺序的整数索引之间的关系。通过将函数扩展到实数参数

$$f_{\mathbb{R}}(n)=\frac{(1/2)^n+\cos(\pi n)}{n},$$

该不变性变得与连续域兼容。

此扩展不仅能够对离散数据流进行编码、预测和建模，还能处理任意实值信号。它允许设计数据点对应非整数索引的编码方案，支持精细插值、连续压缩以及模拟或准模拟量的建模。

此外，保持实值输入之间精确代数一致性的能力为实时信号处理、连续错误校正和平滑数据重构等领域提供了新的可能性。不变量所捕捉的基本结构对称性因此超越了离散情况而得以保留，从而开启了更广泛的理论和实际应用范围。

5 复扩展与结构统一

为了推广不变关系并涵盖更广泛的结构化序列类，我们引入了原函数的复值扩展：

$$s(t)=\frac{p^t+q_1\cdot\sin(r_1\pi t)+q_2\cdot\cos(r_2\pi t)}{t},$$

其中，$p,q_1,q_2\in\mathbb{C}$，和 $r_1,r_2\in\mathbb{Z}_{\text{odd}}$。这种表述结合了指数增长或衰减与两个独立的振荡成分，并允许在复数域中进行相位、幅度和频率调制。

我们定义广义四点不变量为

$$\mathcal{I}(t):=\frac{s(t)\cdot t+s(t+1)\cdot(t+1)}{s(t+2)\cdot(t+2)+s(t+3)\cdot(t+3)}.$$

实证评估表明，对于广泛随机选择的参数范围，比率 $\mathcal{I}(t)$ 稳定到一个复数常量 $a(s)\in\mathbb{C}$，精度非常高，通常达到 10^{-12}，即使对于适度值的 t 也是如此。

这种复杂形式统一了所有之前的构造：

- 原始离散不变量对应于 $p=1/2,q_1=0,q_2=1,r_1=r_2=1$。
- 当 $p\in\mathbb{R}^+,q_1=0,q_2\in\mathbb{R},r_2=1$ 时，恢复连续的基于余弦的版本。

- 混合实数扩展同时使用带有实系数的正弦和余弦。

复参数的引入通过相位旋转、共振现象和拟周期性丰富了 $s(t)$ 的行为。然而，不变结构在这次推广中似乎得以保持，表明四项比例恒等式受更深层次的代数对称性的支配，而不是个别函数组件的具体特性。

这一统一框架为在离散和连续设置中建模振荡衰减行为提供了一套多功能工具，并表明基于不变量的重建、误差检测和数据编码技术可以自然地扩展到复值和多尺度信号。

斯塔斯型不变族。 为了方便起见，我们引入术语斯塔斯型不变族来指代任何函数 $s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ 满足恒等式的配对 $(s(t), a(s))$。

$$\frac{s(t) \cdot t + s(t+1) \cdot (t+1)}{s(t+2) \cdot (t+2) + s(t+3) \cdot (t+3)} = a(s) \in \mathbb{C} \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0\}.$$

此术语突出了函数-不变对 $(s(t), a(s))$ 的中心作用，它们共同编码了实域上的稳定代数结构。我们将此类系统对应的类别记为 $\mathcal{F}_{\text{Stas}}$，定义为

$$\mathcal{F}_{\text{Stas}} := \{ s(t) \,|\, \mathcal{I}(t) \equiv a(s) \in \mathbb{C} \text{ for all valid } t \in \mathbb{R} \} .$$

这些 Stas 型族构成了一种灵活的分析框架，用于构建不变性治理信号和编码方案，并在共同的代数原则下统一了广泛的实函数和复函数类。[1]

奇频率四点不变量中三角项的消去

考虑函数：

$$s(t) = \frac{p^t + q_1 \sin(r_1 \pi t) + q_2 \cos(r_2 \pi t)}{t},$$

其中 $p, q_1, q_2 \in \mathbb{C}$ 和 $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$ 是奇数。

我们将 $s(t)$ 代入四点不变量表达式：

$$a(s) = \frac{s(t) \cdot t + s(t+1) \cdot (t+1)}{s(t+2) \cdot (t+2) + s(t+3) \cdot (t+3)}.$$

在这个代换中，因子 $t, t+1, t+2, t+3$ 与分母相互抵消，得到：

$$a(s) = \frac{f(t) + f(t+1)}{f(t+2) + f(t+3)},$$

其中

$$f(t) = p^t + q_1 \sin(r_1 \pi t) + q_2 \cos(r_2 \pi t).$$

[1]名称“Stas”反映了定义的符号成分 $s(t)$ 和 $a(s)$，并认可了作者构造的首字母。

我们使用标准的三角恒等式：

$$\sin(x+n\pi)=(-1)^n\sin(x),\quad \cos(x+n\pi)=(-1)^n\cos(x),$$

并观察到对于奇数 r_1, r_2，表达式 $r_k\pi(t+m)$ 可以重写为：

$$\begin{aligned}
\sin(r_1\pi(t+1)) &= -\sin(r_1\pi t),\\
\cos(r_2\pi(t+1)) &= -\cos(r_2\pi t),\\
\sin(r_1\pi(t+2)) &= \sin(r_1\pi t),\\
\cos(r_2\pi(t+2)) &= \cos(r_2\pi t),\\
\sin(r_1\pi(t+3)) &= -\sin(r_1\pi t),\\
\cos(r_2\pi(t+3)) &= -\cos(r_2\pi t).
\end{aligned}$$

分子然后变为：

$$\begin{aligned}
f(t)+f(t+1) &= \big(p^t+q_1\sin(r_1\pi t)+q_2\cos(r_2\pi t)\big)\\
&\quad+\big(p^{t+1}-q_1\sin(r_1\pi t)-q_2\cos(r_2\pi t)\big)\\
&= p^t+p^{t+1}.
\end{aligned}$$

同样，分母变为：

$$\begin{aligned}
f(t+2)+f(t+3) &= \big(p^{t+2}+q_1\sin(r_1\pi t)+q_2\cos(r_2\pi t)\big)\\
&\quad+\big(p^{t+3}-q_1\sin(r_1\pi t)-q_2\cos(r_2\pi t)\big)\\
&= p^{t+2}+p^{t+3}.
\end{aligned}$$

因此，三角项完全抵消，我们得到：

$$a(s)=\frac{p^t+p^{t+1}}{p^{t+2}+p^{t+3}}.$$

将分子中的 p^t 和分母中的 p^{t+2} 因式分解：

$$a(s)=\frac{p^t(1+p)}{p^{t+2}(1+p)}=\frac{p^t}{p^{t+2}}=p^{-2},$$

在 $p\neq -1$ 的条件下。

结论。 对于奇数的 r_1, r_2 和任意的 q_1, q_2，四点不变量中的三角项完全抵消，不变量 $a(s)$ 仅由指数部分决定：

$$a(s)=\frac{1}{p^2}.$$

因此，该不变量对于所有的 t 保持常数，无论振荡项是否存在。

6 数值验证

为了展示复值情况下不变关系的稳定性，我们在形式为

$$s(t) = \frac{p^t + q_1 \cdot \sin(r_1 \pi t) + q_2 \cdot \cos(r_2 \pi t)}{t},$$

的一般函数类上实现了一个随机测试，其中 $p, q_1, q_2 \in \mathbb{C}$ 以及 $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$。不变比率定义为

$$\mathcal{I}(t) = \frac{s(t) \cdot t + s(t+1) \cdot (t+1)}{s(t+2) \cdot (t+2) + s(t+3) \cdot (t+3)}.$$

以下 Python 代码生成随机复参数，选择随机奇数频率，并在多个负实数值的 t 处评估不变比率：

```
import math
import cmath
import random

def random_complex(re_min, re_max, im_min, im_max):
    re = random.uniform(re_min, re_max)
    im = random.uniform(im_min, im_max)
    return complex(re, im)

def random_odd_int(low, high):
    odds = [x for x in range(low, high + 1) if x
    return random.choice(odds)

def s(t, p, q1, q2, r1, r2):
    if t == 0:
        raise ValueError("t must be non-zero.")
    exp_part = p**t
    trig_part = (q1 * math.sin(r1 * math.pi * t) +
                 q2 * math.cos(r2 * math.pi * t))
    return (exp_part + trig_part) / t

def invariant_ratio(t, p, q1, q2, r1, r2):
    s0 = s(t,   p, q1, q2, r1, r2)
    s1 = s(t+1, p, q1, q2, r1, r2)
    s2 = s(t+2, p, q1, q2, r1, r2)
    s3 = s(t+3, p, q1, q2, r1, r2)
```

```
    numerator = s0 * t + s1 * (t + 1)
    denominator = s2 * (t + 2) + s3 * (t + 3)
    if denominator == 0:
        raise ZeroDivisionError("Denominator is zero.")
    return numerator / denominator

# Generate random parameters
p  = random_complex(0.3, 1.0, -1.5, 1.5)
q1 = random_complex(-2.0, 2.0, -2.0, 2.0)
q2 = random_complex(-2.0, 2.0, -2.0, 2.0)
r1 = random_odd_int(1, 15)
r2 = random_odd_int(1, 15)

# Evaluate invariant at 5 random negative real t-values
for i in range(5):
    t_val = random.uniform(-20.0, -10.0)
    ratio = invariant_ratio(t_val, p, q1, q2, r1, r2)
    print(f"Invariant ratio at t = {t_val:.4f}: {ratio:.4f}")
```

此代码的一个样本输出可能是:

- 不变比率在 $t = -17.9312$：$-0.0772 - 0.5206i$
- 不变比率在 $t = -14.8506$：$-0.0772 - 0.5206i$
- 不变比率在 $t = -13.9799$：$-0.0772 - 0.5206i$
- 不变比率在 $t = -17.4130$：$-0.0772 - 0.5206i$
- 不变比率在 $t = -18.1039$：$-0.0772 - 0.5206i$

该数值实验证实了不变比率在整个实数范围内，包括负的 t，都严格保持恒定，尽管存在随机复调制。这支持了这样一个假设：只要表达式有定义，不变结构对于所有实数参数在全球范围内都是成立的。

7 应用和潜在用例

本文中推导出的不变关系在离散和连续设置中都具有多种潜在应用。尽管等式

$$\frac{s(t) \cdot t + s(t+1) \cdot (t+1)}{s(t+2) \cdot (t+2) + s(t+3) \cdot (t+3)} = \frac{1}{p^2}$$

可能看起来代数上很简单，但它编码了序列 $s(t)$ 中的一种非平凡结构冗余，这种冗余即使在存在三角振荡的情况下也依然存在，并且可以推广到实值域。这产生了以下用例：

- **预测编码**知道序列中的任意三个连续值就可以通过简单的代数逆运算精确恢复第四个值。这支持高效的预测模型，并显著减少了时间序列传输或存储中的冗余。
- **错误检测和纠正**不变量提供了一种跨数据滑动窗口的确定性一致性检查。任何与确切比例的偏差都表明可能存在传输错误或数据损坏，从而实现类似奇偶校验的轻量级、无模型完整性验证 [1]。
- **数据压缩**四个连续值的组可以通过仅三个显式条目来表示。第四个则通过不变量隐含编码，引入了不依赖于熵或统计冗余的代数压缩。
- **连续信号建模**该不变量扩展到光滑的实值函数。这使得在模拟域中的应用成为可能，包括插值、重建以及实时信号完整性监测。
- **分析建模和近似**函数类 $s(t)$，结合指数与有界三角项，提供了一种紧凑的方式来逼近衰减振荡信号。该不变性有助于在这些模型中强制执行内部一致性，并具有在数值方法和信号处理中的潜在应用。

总结而言，四点不变量的简单性和普遍性，结合函数类 $s(t)$ 的表达能力，表明这种结构可能作为广泛编码、恢复和建模技术的基础原语。

8 结论

我们介绍并分析了一个结构丰富的不变关系，该关系连接了一类解析定义的序列和函数的四个连续评估值。从离散交替衰减形式开始，我们逐步将框架扩展到实数和复数域，通过引入指数、三角以及混合调制。

这一发展最终导致了一个广泛的函数族 $\mathcal{F}_{\text{Stas}}$ 的定义，每个函数 $s(t)$ 都配有一个相关的不变常数 $a(s) \in \mathbb{C}$，使得归一化的四点比在所有有效的实参数下保持完全恒定。经验测试证实了即使在随机复形变和频率变化的情况下，这一不变量的稳定性也非常显著。

所得的不变结构为编码、重构和通过局部代数一致性建模数据提供了一种新的形式化工具集。它们的简洁性、通用性和与连续信号及复值信号的兼容性表明在信息论、模拟信号处理和结构性约束的数据压缩中具有广阔的应用前景。

参考文献

[1] Elwyn R. Berlekamp. *Algebraic Coding Theory*. World Scientific, 2015. Reprint of the 1968 edition.

[2] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory.* Wiley-Interscience, 2nd edition, 2006.

[3] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* Addison-Wesley, 2nd edition, 1994.

[4] Stanislav Semenov. Smooth integer encoding via integral balance, 2025.