

174mm  
247mm

arxiv:2504.21512v1 中译本

# 二维不稳定性驱动湍流中超出惯性范围的速度环量区域规则

Bo-Jie Xie and Jin-Han Xie<sup>†</sup>

Department of Mechanics and Engineering Science at College of Engineering and State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, Peking University, Beijing 100871, People's Republic of China

(Received xx; revised xx; accepted xx)

自 Kolmogorov 的理论以来，惯性范围内的尺度特性一直是湍流研究的关键主题。然而，在三维和二维湍流中，速度统计显示出非普适性。Migdal (1995) 证明了环流面积规则，即环流的概率密度函数 (PDF) 仅是环所包围的最小表面积的函数，而不是环的形状，并且后来在三维和二维湍流以及量子湍流 (Iyer *et al.* 2019; Müller *et al.* 2021; Zhu *et al.* 2023) 中发现了双分形普适行为。本文发现，在由不稳定驱动的二维湍流中，速度环流面积规则可以推广到所有不受惯性范围限制的尺度。然而，类似于三维情况，环流方差与尺寸有关，并且与环流 PDF 相比，归一化后的 PDF 对环形状的依赖显著减弱。我们还讨论了 8-环和双环的面积规则。我们发现，归一化的 PDF 仅取决于 8-环的标量面积。然而，对于其他复杂环（如双环）的面积规则仍然存在疑问。

**Key words:** 速度环量，二维湍流，均匀湍流

## 1. 介绍

自 Kolmogorov 关于同质各向同性三维湍流的理论 (Kolmogorov 1941) 以来，结构函数一直被用来研究湍流在惯性范围内外的统计特性。然而，湍流的间歇性特征阻碍了对高阶统计量的简单理解 (Kolmogorov 1962; Oboukhov 1962; Anselmet *et al.* 1984; Gagne 1987)，并且提出了捕捉这种间歇性的理论 (Benzi *et al.* 1993; She & Leveque 1994; Frisch 1995; Sreenivasan & Antonia 1997)。至于二维 (2-D) 湍流 (Kraichnan 1967)，由于能量和旋度守恒，存在一个反向级联场景，其中旋度向下传递而能量向上传递，这使

<sup>†</sup> Email address for correspondence: jinhanxie@pku.edu.cn

**Abstract must not spill onto p.2**

其与三维 (3-D) 湍流 (Paret & Tabeling 1998) 区分开来。因此, 在二维和三维湍流中寻找普遍性是非常复杂的。

速度环量最近被提出用于探索普适性。Migdal (1995) 在 20 世纪 90 年代初提出了环量统计理论, 其中包含一个区域法则, 指出速度环量的概率密度函数取决于环所包围的最小面积。Umeki (1993) 和 Cao *et al.* (1996) 指出, 随着环所包围的面积增加, 环的速度环量概率密度函数趋向于高斯分布。令人鼓舞的是, Umeki (1993) 还指出环所包围的标量区域是确定的。最近, Iyer *et al.* (2019) 使用高精度直接数值数据验证了 Migdal 的区域法则, 并确认对于 8-环, 速度环量的概率密度函数取决于环所包围的标量面积。他们还指出速度环量是双分形的, 这比速度结构函数的多分形特征更简单。之后, 在量子湍流 (Müller *et al.* 2021; Polanco *et al.* 2021) 和二维湍能惯性区 (Zhu *et al.* 2023) 中也发现了速度环量统计的双分形性质, 这使得速度环量成为研究湍流统一性的有希望的数量。

与激动人心的速度环流研究中的数值和实验进展相比, 面积规则的推导相对滞后。例如, 在二维湍流中, 包含能量和涡度惯性区的面积规则证明缺失。此外, 原始推导在 Migdal (1995) 中考虑了无粘极限和可忽略的外部力。Iyer *et al.* (2021) 最近发现, 在直接数值模拟中, 通过使用环流的标准差进行归一化后, 速度环流的概率密度函数有更好的重叠。本文试图在不稳定性驱动的二维湍流系统中推导面积规则, 并且我们不限制惯性区中的尺度。

本文的结构如下。在 §2 中, 我们证明了由不稳定驱动的二维湍流的面积规则。§3 在简单环路中数值验证了面积规则, 并探讨了其在复杂环路中的有效性。我们在 §4 中总结和讨论了我们的主要结果。

## 2. 二维不稳定性驱动湍流中速度环量面积规则的推导

### 2.1. 循环和面积导数的概率密度函数

遵循 Migdal (1995), 我们引入面积导数, 特别是对于速度环量的概率密度函数 (PDF)。

在二维空间中, 速度环量定义为

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \omega d\sigma, \quad (2.1)$$

其中  $\omega = \partial_x v - \partial_y u$  是旋度, 第二个等式使用了 Stokes 定理,  $S$  表示闭合回路  $C$  所包围的面积。

引入集合平均  $\langle \cdot \rangle$ , 我们得到速度环量的概率密度函数

$$P(C, \Gamma) = \langle \delta(\Gamma - \Gamma_C) \rangle = \left\langle \delta \left( \Gamma - \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right) \right\rangle. \quad (2.2)$$

考虑一个斯托克斯型泛函  $U[C]$ , 其中  $C$  是二维平面上的一个环路。面积导数定义为

$$\frac{\delta U}{\delta \sigma(\mathbf{r})} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{U[C + \delta C] - U[C]}{\delta S}, \quad (2.3)$$

其中  $\delta\sigma(\mathbf{r})$  位于  $\mathbf{r}$  的面积元素， $\delta S$  是它的面积，而  $\delta C$  是它的边界，这是一个小的闭合环路。对于任意的  $C$  和  $\delta C$ ，我们总能找到一条曲线  $l$  来连接它们并形成一个新的环路 ( $C + \delta C$ )。

基于 (2.3)，我们可以计算泛函  $P[C] = P(C, \Gamma)$  的面积导数：

$$P[C + \delta C] - P[C] = \left\langle \delta \left( \Gamma - \oint_{C+\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right) - \delta \left( \Gamma - \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right) \right\rangle, \quad (2.4)$$

其中

$$\oint_{C+\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.5)$$

由于流体中的速度及其导数是有限的，当  $\delta S \rightarrow 0$  时，回路  $\delta C$  上的速度环量也趋向于零。然后，

$$P[C + \delta C] - P[C] = \left\langle \delta' \left( \Gamma - \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right) \left( - \oint_{\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right) \right\rangle + o \left( \oint_{\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right). \quad (2.6)$$

将斯托克斯定理应用到环路积分  $\delta C$  上，并考虑到  $\delta S$  非常小且与时间无关，上述方程可以表示为

$$P[C + \delta C] - P[C] = -\delta S \left\langle \delta' \left( \Gamma - \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right) \omega(\mathbf{r}, t) \right\rangle + o(\delta S). \quad (2.7)$$

从 (2.3) 我们得到

$$\frac{\delta P}{\delta\sigma(\mathbf{r})} = - \left\langle \delta' \left( \Gamma - \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right) \omega(\mathbf{r}, t) \right\rangle. \quad (2.8)$$

然后，通过对方程 (2.8) 进行一阶面积导数计算二阶面积导数。

$$\frac{\delta^2 P}{\delta\sigma(\mathbf{r})\delta\sigma(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})} = \left\langle \delta'' \left( \Gamma - \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right) \omega(\mathbf{r}, t) \omega(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t) \right\rangle. \quad (2.9)$$

## 2.2. 环方程

我们考虑二维不可压缩由不稳定驱动流动，其动量方程为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathcal{L} \mathbf{v}, \quad (2.10)$$

其中线性算子

$$\mathcal{L} = -\alpha - \sum_{k=1}^N \beta_k (-\nabla^2)^k. \quad (2.11)$$

$\mathcal{L} \mathbf{v}$  包括线性阻尼和（超）粘性效应。通过设计参数  $\alpha$  和  $\beta_k$ ，我们可以规定具有线性增长或衰减率的波数来描述由不稳定驱动流动 (Mickelin *et al.* 2018; Linkmann *et al.* 2019, 2020; van Kan *et al.* 2022, 2023)。

进行循环积分到 (2.10)，我们得到

$$\oint_C \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C (-v\omega dx + u\omega dy) + \oint_C (\mathcal{L}u dx + \mathcal{L}v dy). \quad (2.12)$$

**Focus on Fluids articles must not exceed this page length**

根据毕奥-萨伐尔定理，对于不可压缩流，速度可以表示为

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\eta}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) d\xi d\eta, \quad (2.13a)$$

$$v(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\xi}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) d\xi d\eta, \quad (2.13b)$$

其中  $\mathbf{x} = (x, y), \boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta), |\boldsymbol{\xi}|^2 = \xi^2 + \eta^2$ 。

对 (2.2) 关于时间  $t$  和循环  $\Gamma$  求偏导数，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} \frac{\partial}{\partial t} P(C, \Gamma) = \left\langle \delta'' \left( \Gamma - \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right) \left( - \oint_C \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} \right) \right\rangle. \quad (2.14)$$

将 (2.12) 和 (2.13) 代入，并在假设平均、环积分和面积积分的顺序可以互换的情况下，再考虑 (2.8) 和 (2.9)，我们得到环方程 (Migdal 2019)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Gamma} \frac{\partial}{\partial t} P(C, \Gamma) = & \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[ \underbrace{\left( dy \iint \frac{\eta}{|\boldsymbol{\xi}|^2} d\xi d\eta + dx \iint \frac{\xi}{|\boldsymbol{\xi}|^2} d\xi d\eta \right)}_H \frac{\delta^2 P}{\delta \sigma(\mathbf{x}) \delta \sigma(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})} \right] \\ & + \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[ \underbrace{\left( dy \iint \frac{\xi}{|\boldsymbol{\xi}|^2} d\xi d\eta - dx \iint \frac{\eta}{|\boldsymbol{\xi}|^2} d\xi d\eta \right)}_I \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial \Gamma} \frac{\delta P(C, \Gamma)}{\delta \sigma(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})} \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中  $H$  和  $I$  分别表示非线性和线性项的贡献。

### 2.3. 面积规则的证据

受到 (Migdal 2019) 提出的面积规则启发，并在均匀性的假设下，我们推测环方程 (2.15) 有一个解

$$P(C, \Gamma) = P(A_C, \Gamma), \quad (2.16)$$

其中  $A_C = \iint_{S_C} d\sigma = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$  是简单环路  $C$  所包围的区域。

对于完全发展的湍流处于统计稳态的情况下，循环方程 (2.15) 的左边为零，然后我们需要证明 (2.16) 可以使

$$H + I = 0. \quad (2.17)$$

在接下来的小节 §2.3.1 和 §2.3.2 中，我们证明  $H$  和  $I$  都等于零。

#### 2.3.1. 证明 $H = 0$

考虑  $\frac{\delta P}{\delta \sigma(\mathbf{x})}$ ，它是 PDF  $P(C, \Gamma)$  的一阶面积导数。通过表达式 (2.16)，我们得到

$$\frac{\delta P(C, \Gamma)}{\delta \sigma(\mathbf{x})} = \frac{\partial P}{\partial A_C} \frac{\delta A_C}{\delta \sigma(\mathbf{x})}. \quad (2.18)$$

注意  $\frac{\delta A_C}{\delta \sigma(\mathbf{x})} = 1$ ，所以

$$\frac{\delta P(C, \Gamma)}{\delta \sigma(\mathbf{x})} = \frac{\partial P}{\partial A_C}. \quad (2.19)$$

然后计算二阶面积导数  $\frac{\delta^2 P(C, \Gamma)}{\delta \sigma(\mathbf{x}_1) \delta \sigma(\mathbf{x}_2)}$ 。对 (2.19) 进行面积导数运算，我们得到

$$\frac{\delta^2 P(C, \Gamma)}{\delta \sigma(\mathbf{x}_1) \delta \sigma(\mathbf{x}_2)} = \frac{\partial^2 P}{\partial A_C^2}. \quad (2.20)$$

因此， $H = 0$  等价于

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 P}{\partial A_C^2} \oint_C \left( dy \iint \frac{\eta}{|\xi|^2} d\xi d\eta + dx \iint \frac{\xi}{|\xi|^2} d\xi d\eta \right) = 0. \quad (2.21)$$

尽管曲面积分不收敛，考虑到被积函数的对称性，我们可以认为它等于零，因此  $H = 0$ 。

### 2.3.2. 证明 $I = 0$

其次，证明 (2.16) 满足  $I = 0$ 。根据 (2.19) 和 (2.15)，我们可以得到

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[ \left( dy \iint \frac{\xi}{|\xi|^2} d\xi d\eta - dx \iint \frac{\eta}{|\xi|^2} d\xi d\eta \right) \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial \Gamma} \frac{\partial P}{\partial A_C} \right]. \quad (2.22)$$

因为  $\mathcal{L} \frac{\partial}{\partial \Gamma} \frac{\partial P}{\partial A_C}$  与  $\xi$  独立，并且曲面积分的被积函数在  $\xi$  或  $\eta$  中是奇函数，所以  $I = 0$ 。

## 3. 数值模拟

我们数值研究了由负粘性驱动并由超粘性和线性阻尼耗散的二维湍流，

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = -\alpha \omega - \lambda \nabla^2 \omega - \nu \nabla^8 \omega, \quad (3.1)$$

其中  $\alpha, \lambda$  和  $\nu$  是正常数。我们在大小为  $2\pi \times 2\pi$  的双周期域中进行了数值模拟，分辨率为  $2048 \times 2048$ 。我们使用四阶龙格-库塔方法进行时间积分，并使用伪谱方法进行空间积分。

考虑傅里叶模式  $e^{i(kx+ly)+\sigma t}$ ，(3.1) 的线性增长率是

$$\sigma = -\alpha + \lambda K^2 - \nu K^8, \quad (3.2)$$

其中  $K^2 = k^2 + l^2$ 。在某个尺度上，当注入  $\sigma > 0$  能量，并且  $\sigma < 0$  能量被耗散时。图 1 显示了线性增长率  $\sigma$  随  $\alpha = 0.018$ 、 $\lambda = 2 \times 10^{-5}$  和  $\nu = 1 \times 10^{-16}$  的变化。当波数为  $K \in [30, 74]$  时，能量被注入到流场中，在其他波数范围内，能量则会耗散。在我们的数值模拟中， $l_0 \approx 4\Delta x$ ，其中  $\Delta x = 2\pi/2048$  是网格间距，耗散尺度为  $l_0 = [\nu^3 / \langle \eta \rangle]^{1/24}$ ， $\langle \eta \rangle$  是平均涡度注入率。

图 2 显示了能量和涡度通量。在这个模拟中，能量和涡度都双向传递到大尺度和小尺度，并且没有具有恒定通量的惯性范围。因此，这个模拟适合研究超越惯性范围的统计。

图 3 展示了统计时间段内某个时刻的涡度快照。尽管我们的方程中没有非线性阻力，我们仍然观察到了一片被屏蔽的涡旋 van Kan *et al.* (2022)。对于任意矩形回路  $C$ ，我们将它的无量纲特征长度定义为  $l_C = \sqrt{A}/l_0$ ，其中  $A$  是回路包围的面积。

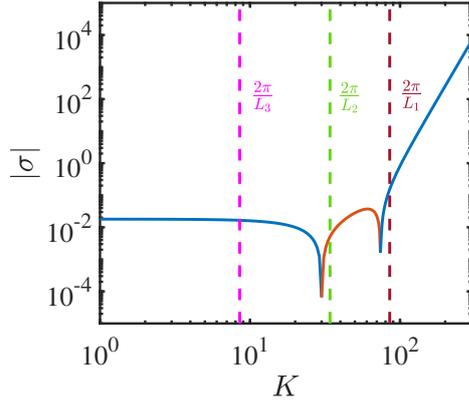


figure 1: 谱空间中  $\sigma$  的绝对值。蓝色和红色曲线分别对应于  $\sigma < 0$  和  $\sigma > 0$ 。三条垂直虚线表示在图 4 中研究的环尺度。

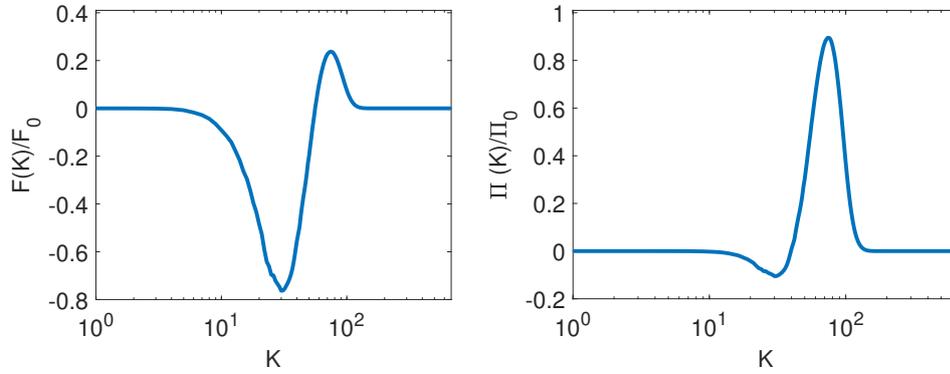


figure 2: 左图显示了能量通量，右图显示了湍旋度通量。 $F_0$  是能量注入率， $\Pi_0$  是湍旋度注入率。

### 3.1. 简单环路

图 4 显示了根据面积平方根定义的尺度下，能量注入和大尺度及小尺度能量耗散范围内的环的概率密度函数。对于具有相同面积但不同宽高比的矩形环，尽管概率密度曲线之间存在显著差异，归一化后的概率密度曲线能够很好地重叠，类似于 Iyer *et al.* (2021) 的发现。当矩形环的宽高比减小时，小环的二阶矩减少（图 4(c)），而大环的二阶矩增加（图 4(i)）。对于较大的环（图 4(h)），归一化后的概率密度函数接近标准正态分布。请注意，对于小尺度的环，当其宽高比较大时，其宽度长度接近网格尺度，因此由于数值分辨率问题，从统计中获得的概率密度函数可能具有显著误差。

考虑到速度环流是一种平均（或过滤）涡度，本节说明了速度环流的 PDF 与涡度波动的相似性。图 5 展示了通过不同区域的二阶矩归一化的环流 PDF 之间的比较。

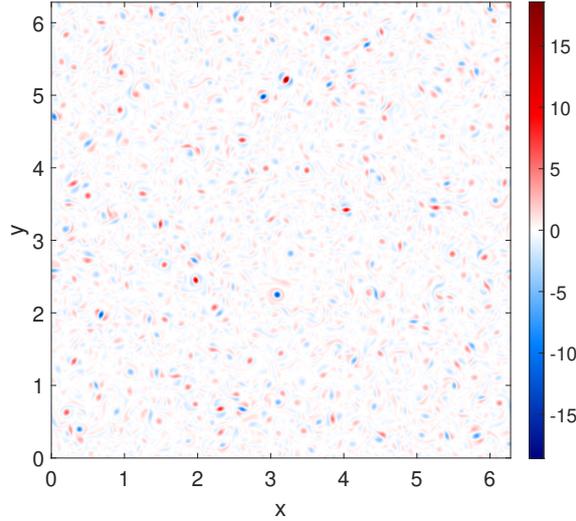


figure 3: 涡度在统计稳态下的快照。

随着面积的增加，统计变得不那么间歇，并且更接近高斯分布，这类似于二维湍流中涡度结构函数的特征 (Boffetta *et al.* 2002)。

### 3.2. 复杂循环

在推导面积规则的先前过程中，我们仅考虑了简单的环路，因此自然会问：面积规则是否也适用于复杂的环路？乍一看，这个问题的答案似乎是负面的。考虑一个简单环路  $C$ ，其包围的面积为  $A$ ，如果我们重复它  $n$  次，我们将得到一个复杂环路  $C'$ 。速度环量  $\Gamma_{C'}$  在回路  $C'$  上总是  $n$  倍的速度环量  $\Gamma_C$  在回路  $C$ ，因此， $\Gamma_{C'} = n\Gamma_C$ 。因此， $\Gamma_{C'}$  的概率分布形状类似于  $\Gamma_C$ ，它们的 PDF 在经过二阶矩归一化后应该相同。注意到与回路  $C'$  相对应的面积是  $nA$ ，对于任意的  $n$ ，因此如果面积规则成立，所有回路的归一化循环 PDF 应该相同，这与我们的数值结果相矛盾（参见图 5）。

有趣的是，Iyer *et al.* (2019) 指出对于 8-环路（图??），面积规则仍然成立，并且速度环流的 PDF 取决于面积的标量和。图 7 证明了在考虑面积的标量和时，面积规则对于由不稳定驱动的二维湍流中的 8-环路依然有效。

我们还研究了图 8 中所示的两种双环。图 9 展示了具有相反方向（图 8a）的小环位于大环的角落（图 9a）和中心（图 9b），以及不同环尺寸的双环的概率密度函数。我们将这两种双环的标准化概率密度函数与面积等于大环和小环面积之和（虚线）或差值（点线）的矩形环的标准化概率密度函数进行了比较。在这种情况下，可以将双环视为具有明确方向的简单环。我们可以通过连接两个矩形环的直线“切割”双环（图 8a 中的红线），从而将复杂的环转换为简单的环而不改变环的形状和方向。

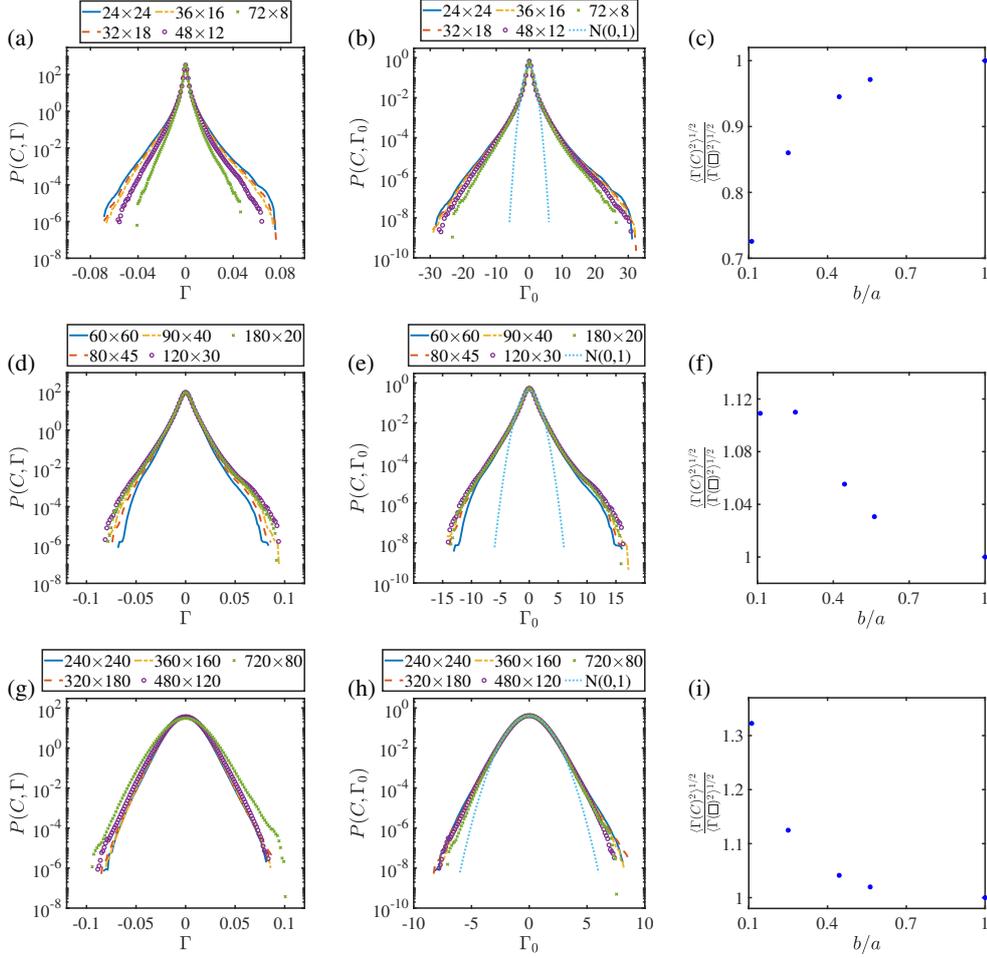


figure 4: (a), (d) 和 (g) 展示了对应于尺寸为  $L_1^2 = 36l_0^2$ ,  $L_2^2 = 225l_0^2$  和  $L_3^2 = 3600l_0^2$  的矩形回路的 PDF, 其纵横比不同。这里, 这些尺度对应的波数在图 1 中被标记为垂直虚线。图例中的  $a \times b$  表示矩形回路的长度为  $a\Delta x$  和宽度为  $b\Delta x$ 。(b), (e) 和 (h) 分别展示了与 (a), (d) 和 (g) 中相同的回路对应的标准化 PDF。(c), (f) 和 (i) 展示了矩形环在固定面积下,  $\langle \Gamma(C)^2 \rangle^{1/2} / \langle \Gamma(\square)^2 \rangle^{1/2}$  对宽高比  $b/a$  的依赖性, 分别对应于 (a), (d) 和 (g)。这里,  $\langle \Gamma(C)^2 \rangle$  是环  $C$  上的二次循环矩, 而  $\langle \Gamma(\square)^2 \rangle$  则是相同面积的正方形环上的二次循环矩。

特别地, 如图 9a 所示的双环是一个 L 型简单环。因此, 面积规则的证明适用于这种情况。

关于图 8b 中所示的两个方向相同的双环, 图 10 表明标准化的概率密度函数随两个矩形的相对位置不同而有所差异。将双环的标准化概率密度函数与面积等于大环和小环面积之和 (虚线曲线) 或差值 (点状曲线) 的矩形环的标准化概率密度函数进行比较, 我们发现这些概率密度函数依赖于两个环的相对位置, 因此面积规则不适用于此类双环。

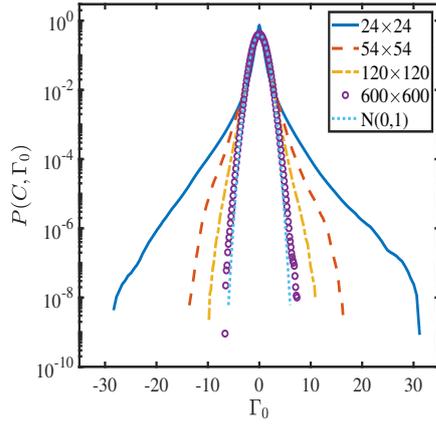


figure 5: 归一化后的不同面积方形环的概率密度函数。  $\Gamma_0 = \Gamma/\sqrt{s_\Gamma}$  是归一化的环流，其中  $s_\Gamma$  是环流的二阶矩。图例中的  $a \times b$  表示该曲线对应于长度为  $a\Delta x$  和宽度为  $b\Delta x$  的矩形。

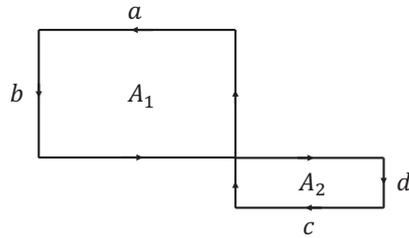


figure 6: 8-环的示意图。  $A_1 = a\Delta x \times b\Delta x$  和  $A_2 = c\Delta x \times d\Delta x$  是构成 8-环的两个矩形环的标量面积。

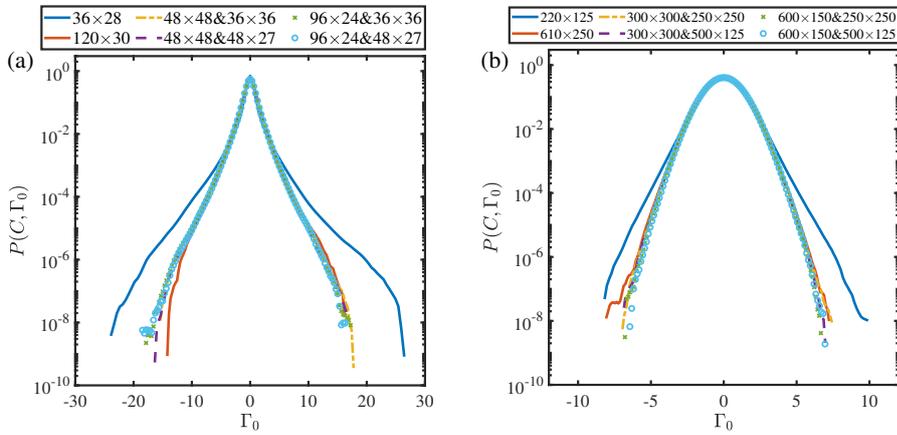


figure 7: 8-环的统计结果。  $a \times b \& c \times d$  在图例中描述了对应曲线的 8-loop 的形状和大小，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  在图??中定义。

**Rapids articles must not exceed this page length**

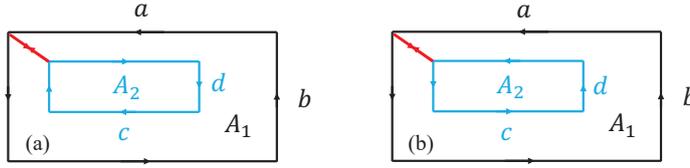


figure 8: 双环示意图。  $A_1 = a\Delta x \times b\Delta x$  和  $A_2 = c\Delta x \times d\Delta x$  是构成复杂回路的两个矩形回路的标量面积。

上述结果表明，为二维复杂环路建立统一的面积定律存在困难，并且还引出了两个有趣的问题：我们能否定义一个等效面积，使得任意复杂环路的归一化 PDF 可以与具有等效面积的简单环路的归一化 PDF 重叠？在三维湍流中，图 8 中的两种双环配置可以通过旋转小环从一种连续变换到另一种，这种连续变化过程中区域规则是如何失效的？

#### 4. 总结与讨论

我们证明了在完全发展的均匀不稳定性驱动的二维湍流中的面积规则，该规则指出对于一个简单的环路，速度环量的概率分布函数仅取决于环路包围的面积，并且与环路的具体形状无关。通过引入不稳定性驱动系统，我们可以将原本在惯性范围内 Migdal (1995) 证明的面积规则推广到具有能量注入和耗散的不同尺度上。然而，数值模拟并不完全符合理论结果。当矩形环路的纵横比显著偏离 1 时，概率分布函数明显与相同面积的正方形环路的概率分布函数不重叠。对于面积相同的矩形环路而言，环量的二阶矩与其纵横比之间的关系随环路大小的变化而变化。类似于 Iyer *et al.* (2021)，我们发现通过速度环量的二阶矩归一化后的相同面积的环路的概率分布函数更好地重叠。值得注意的是，尽管面积规则是环方程的一个解但不是唯一解，湍流动力学倾向于选择面积规则。关于为什么选择或不选择面积规则的原因尚需进一步研究。

在之前的证明中，我们没有考虑方程 (2.10) 中的广义外力  $\mathbf{F}$  的影响。事实上，当且仅当外力  $\mathbf{F}$  满足条件

$$\left\langle \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right\rangle = 0, \quad (4.1)$$

时，(2.16) 是环方程的解，这意味着面积规则是正确的。因此，如果有人想通过实验来检验面积规则，实验者需要尽量使驱动力满足 (4.1)，或者在一定尺度范围内使驱动力满足 (4.1)，然后在此尺度范围内测试广义面积规则。

我们讨论了面积规则在复杂环路中的适用性，基于数值结果。类似于 Iyer *et al.* (2019)，我们确认了面积规则适用于 8-环路，并且归一化 PDF 的形状取决于区域的

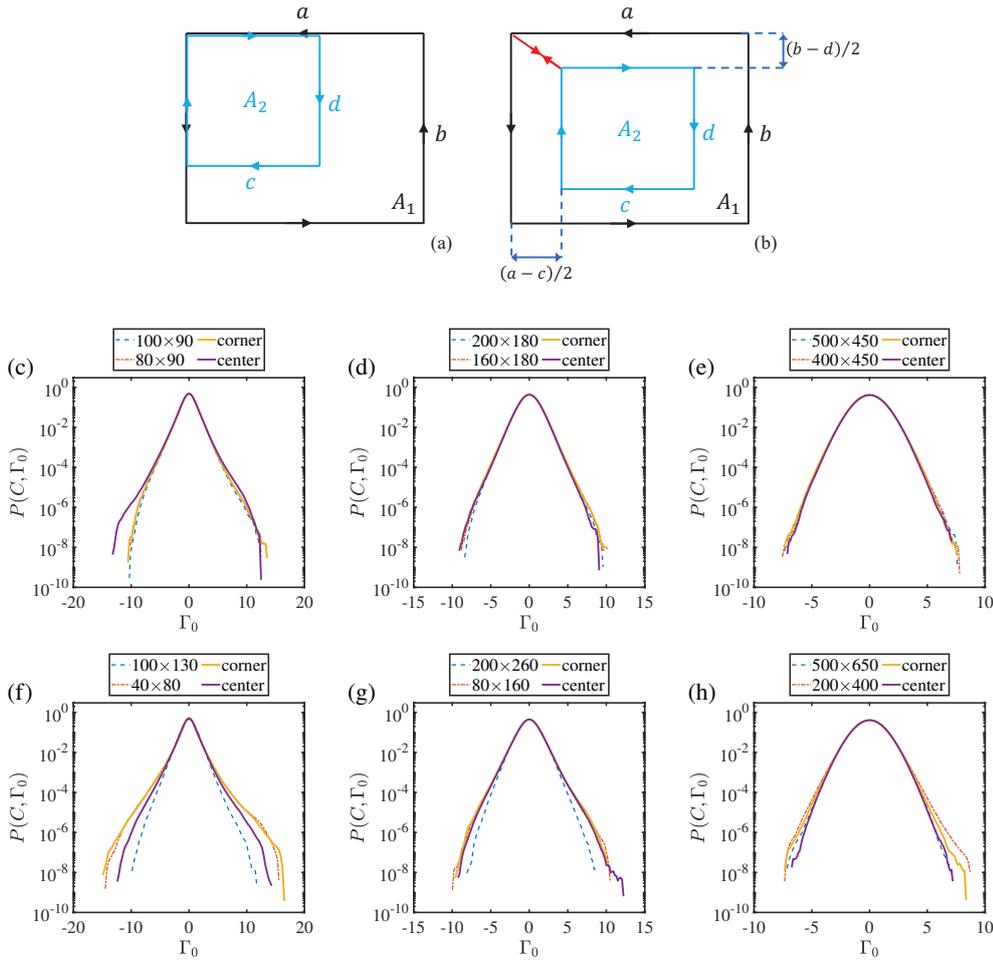


figure 9: 图 8a 所示的双环流通的概率密度函数。虚线蓝色和点线红色分别代表由两个组成双环的环面积相加和相减得到的环。曲线“corner”和“center”对应于小环位于大环的角（示意图 (a)）和中心（示意图 (b)）的构型。子图中循环的参数为：  
 (c)  $a = b = 90$  和  $c = d = 30$ , (d)  $a = b = 180, c = d = 60$ , (e)  $a = b = 450$  和  $c = d = 150$ , (f)  $a = b = 90$  和  $c = d = 70$ , (g)  $a = b = 180, c = d = 140$ ,  
 (h)  $a = b = 450$  和  $c = d = 350$ 。

标量和而不是矢量和。然而，对于一般的复杂环路，我们无法定义复环路的等效面积，这需要在未来进行进一步研究。

**致谢**作者感谢与陈西、Katepalli R. Sreenivasan、陶建君和朱航宇进行的有益讨论。我们感谢中国国家自然科学基金（项目批准号：12272006, 12472219 和 42361144844）以及崂山实验室（项目批准号：LSKJ202202000, LSKJ202300100）的资金支持。

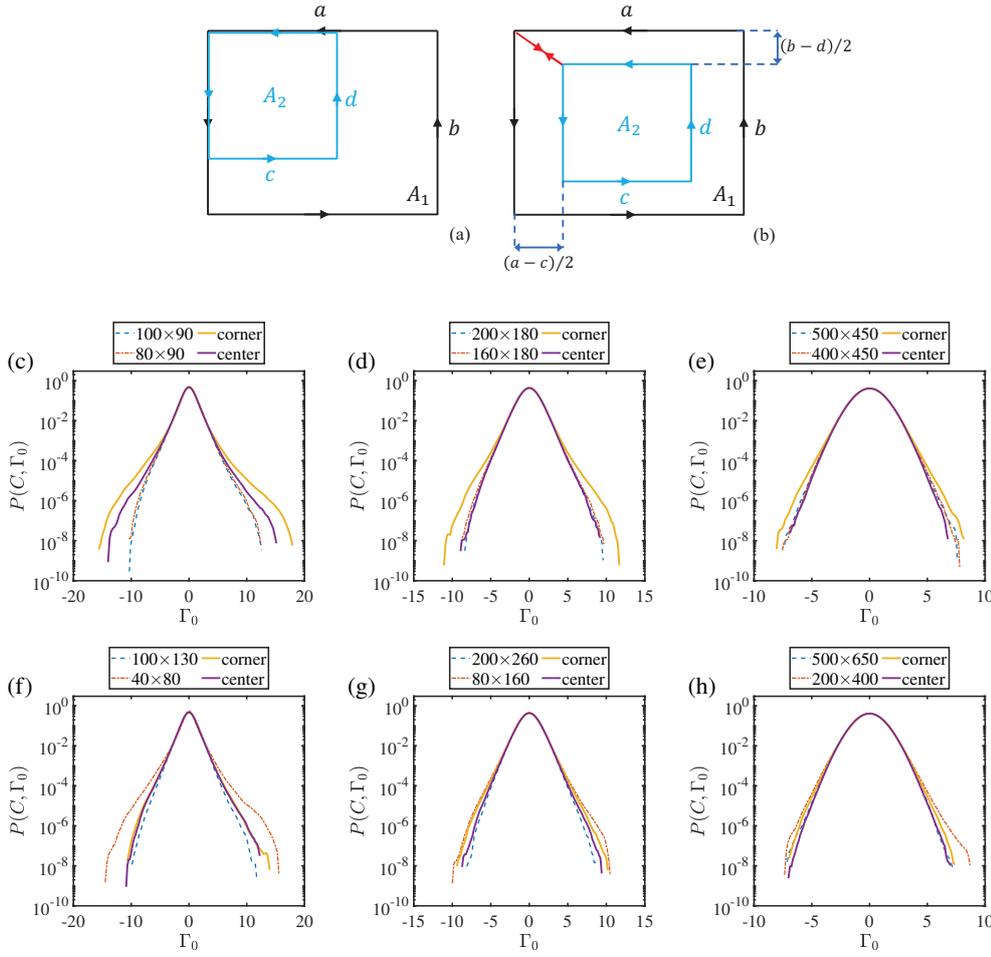


figure 10: 图 8b 中所示的双环循环的概率密度函数。虚线蓝色和点线红色分别代表两个组成双环的区域之和与差的环。曲线“角”和“中心”分别对应小环位于大环角落（图 (a)）和中心（图 (b)）的配置。子图中环的参数为：(c)  $a = b = 90$  和  $c = d = 30$ , (d)  $a = b = 180, c = d = 60$ , (e)  $a = b = 450$  和  $c = d = 150$ , (f)  $a = b = 90$  和  $c = d = 70$ , (g)  $a = b = 180, c = d = 140$ , (h)  $a = b = 450$  和  $c = d = 350$ 。

## REFERENCES

- ANSELMET, F., GAGNE, Y., HOPFINGER, E. J. & ANTONIA, R. A. 1984 High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* **140**, 63 – 89.
- BENZI, R., BIFERALE, L. & PARISI, G. 1993 On intermittency in a cascade model for turbulence. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **65** (1), 163–171.
- BOFFETTA, G., CELANI, A., MUSACCHIO, S. & VERGASSOLA, M. 2002 Intermittency in two-dimensional ekman-navier-stokes turbulence. *Phys. Rev. E* **66**, 026304.
- CAO, NIANZHENG, CHEN, SHIYI & SREENIVASAN, KATEPALLI R. 1996 Properties of velocity circulation in three-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 616–619.

- FRISCH, URIEL 1995 *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- GAGNE, YVES 1987 Étude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence développée. PhD thesis, Université Joseph Fourier.
- IYER, KARTIK P., BHARADWAJ, SACHIN S. & SREENIVASAN, KATEPALLI R. 2021 The area rule for circulation in three-dimensional turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **118** (43), e2114679118, arXiv: <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.2114679118>.
- IYER, KARTIK P., SREENIVASAN, KATEPALLI R. & YEUNG, P. K. 2019 Circulation in high reynolds number isotropic turbulence is a bifractal. *Phys. Rev. X* **9**, 041006.
- VAN KAN, ADRIAN, FAVIER, BENJAMIN, JULIEN, KEITH & KNOBLOCH, EDGAR 2022 Spontaneous suppression of inverse energy cascade in instability-driven 2-d turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **952**, R4.
- VAN KAN, ADRIAN, FAVIER, BENJAMIN, JULIEN, KEITH & KNOBLOCH, EDGAR 2023 From a vortex gas to a vortex crystal in instability-driven two-dimensional turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **984**, A41.
- KOLMOGOROV, A. N. 1941 The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Cr Acad. Sci. URSS* **30**, 301–305.
- KOLMOGOROV, A. N. 1962 A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics* **13** (1), 82 – 85.
- KRAICHNAN, ROBERT H. 1967 Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *The Physics of Fluids* **10** (7), 1417–1423.
- LINKMANN, MORITZ, BOFFETTA, GUIDO, MARCHETTI, M. CRISTINA & ECKHARDT, BRUNO 2019 Phase transition to large scale coherent structures in two-dimensional active matter turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **122**, 214503.
- LINKMANN, MORITZ, MARCHETTI, M. CRISTINA, BOFFETTA, GUIDO & ECKHARDT, BRUNO 2020 Condensate formation and multiscale dynamics in two-dimensional active suspensions. *Phys. Rev. E* **101**, 022609.
- MICKELIN, OSCAR, SŁOMKA, JONASZ, BURNS, KEATON J., LECOANET, DANIEL, VASIL, GEOFFREY M., FARIA, LUIZ M. & DUNKEL, JÖRN 2018 Anomalous chained turbulence in actively driven flows on spheres. *Phys. Rev. Lett.* **120**, 164503.
- MIGDAL, ALEXANDER 2019 Universal area law in turbulence, arXiv: 1903.08613.
- MIGDAL, A. A. 1995 *Loop Equation and Area Law in Turbulence*, pp. 193–231. Boston, MA: Springer US.
- MÜLLER, NICOLÁS P., POLANCO, JUAN IGNACIO & KRSTULOVIC, GIORGIO 2021 Intermittency of velocity circulation in quantum turbulence. *Phys. Rev. X* **11**, 011053.
- OBOUKHOV, A. M. 1962 Some specific features of atmospheric turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **13** (1), 77 – 81.
- PARET, JÉRÔME & TABELING, PATRICK 1998 Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: Experimental observations. *Physics of Fluids* **10** (12), 3126–3136, arXiv: [https://pubs.aip.org/aip/pof/article-pdf/10/12/3126/19315785/3126\\_1\\_online.pdf](https://pubs.aip.org/aip/pof/article-pdf/10/12/3126/19315785/3126_1_online.pdf).
- POLANCO, J.I., MÜLLER, N.P. & KRSTULOVIC, G. 2021 Vortex clustering, polarisation and circulation intermittency in classical and quantum turbulence. *Nat Commun* **12**, 7090.

- SHE, ZHEN-SU & LEVEQUE, EMMANUEL 1994 Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336–339.
- SREENIVASAN, K. R. & ANTONIA, R. A. 1997 The phenomenology of small-scale turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **29**, 435–72.
- UMEKI, MAKOTO 1993 Probability distribution of velocity circulation in three-dimensional turbulence. *Journal of the Physical Society of Japan* **62** (11), 3788–3791, arXiv: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.62.3788>.
- ZHU, HANG-YU, XIE, JIN-HAN & XIA, KE-QING 2023 Circulation in quasi-2d turbulence: Experimental observation of the area rule and bifractality. *Phys. Rev. Lett.* **130**, 214001.