Marcinkiewicz 型次线性期望下伪独立随机变量的大数定律

Jialiang Fu

Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences,

Beijing, China

E-mail: fujialiang@amss.ac.cn

摘要

作为一种次线性期望下的随机变量独立性，伪独立比彭的独立性要弱。我们将给出次线性期望框架下伪独立随机变量的 Marcinkiewicz 型弱大数定律和强大数定律。

关键词： 次线性期望；伪独立；Marcinkiewicz 型大数定律。

1 介绍

令 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是在 $(\Omega, P, \mathcal{F})$ 和 $S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i$ 中独立同分布（i.i.d.）的随机变量序列。强大数定律（SLLN）由柯尔莫哥洛夫建立，指出如果 $E_P[|X_1|] < \infty$，则

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = E_P[X_1]\right) = 1,$$

其中 E_P 是关于概率测度 P 的期望。作为 Kolmogorov 的 SLLN 的推广，经典的 Marcinkiewicz 型 SLLN 表明如果 $E_P[|X_1|^r] < \infty$，对于某些 $r \in [1, 2)$，那么

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - nE_P[X_1]}{n^{\frac{1}{r}}} = 0\right) = 1.$$

显然，当随机变量具有某种 $r \in (1, 2)$ 阶的 r 矩时，Marcinkiewicz 型 SLLN 给出了 Kolmogorov 的 SLLN 的 $O\left(\frac{1}{n^{1-1/r}}\right)$ 收敛速度。

当概率模型具有不确定性时，非线性期望是一个强有力的工具。一个常见的非线性期望是次线性期望，它可以表示为一组线性期望的上确界。对应于经典的线性期望，大数定律（LLN）也可以在次线性期望下建立。彭（2007）[3] 引入了次线性期望下随机变量的独立性和同分布概念，并建立了次线性期望下的弱大数定律（WLLN）。关于次线性期望下的大数定律已有大量文献。陈 [8] 建立了一个强形式的大数定律，适用于独立且同分布序列。宋 [4] 得到了次线性期望下的强大数定律，并研究了独立且同分布随机变量序列的尾 σ-代数的平凡性。张 [9] 研究

了次线性期望下强大数定律的极限点。由于现实世界的数据可能是相关的并且更复杂，因此有必要扩展各种类型相关随机变量的大数定律。在次线性期望框架下，张 [7, 6] 得到了负相依且同分布随机变量以及 m-相依且平稳随机变量的强大数定律。Fu[2] 获得了在次线性期望下，块状 m 依赖随机变量的 LLN。郭和 Li[1] 引入了次线性期望下的伪独立性概念，并建立了具有有限 1 阶 Choquet 积分的伪独立随机变量的弱大数定律和强大数定律。在本文中，我们将给出具有有限 r 阶 Choquet 积分（$r \in [1,2)$）的伪独立随机变量的 Marcinkiewicz 型弱大数定律和强大数定律。

本文的结构如下。第 2 节将介绍一些关于次线性期望的预备知识。第 3 节将给出 Marcinkiewicz 型弱大数定律和强大数定律，其详细证明见第 4 节。

2 预备知识

在本节中，我们将介绍次线性期望理论的一些基本概念和一些现有的结果。有关前者的更多细节，请参阅 [3]。

设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是一个给定的可测空间，$\mathcal{M}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上所有概率测度的集合。$X \in \mathcal{F}$ 表示 X 是在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上定义的随机变量。对于给定的子集 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$，相对于 $\mathcal{P}$ 的上期望和下期望定义如下：

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] \triangleq \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P[X],\ \widehat{\mathcal{E}}[X] \triangleq -\widehat{\mathbb{E}}[-X] = \inf_{P\in\mathcal{P}} E_P[X],$$

对于 $X \in \mathcal{F}$，其中 $\widehat{\mathbb{E}}[X]$ 和 $\widehat{\mathcal{E}}[X]$ 为有限值。

$\widehat{\mathbb{E}}$ 是一个满足以下条件的次线性期望：

(i) 单调性：$\widehat{\mathbb{E}}[X] \le \widehat{\mathbb{E}}[Y]$ 如果 $X \le Y$;

(ii) 常数保持：$\widehat{\mathbb{E}}[c] = c$ 对于 $c \in \mathbb{R}$;

(iii) 次可加性：$\widehat{\mathbb{E}}[X+Y] \le \widehat{\mathbb{E}}[X] + \widehat{\mathbb{E}}[Y]$;

(iv) 正齐次性：$\widehat{\mathbb{E}}[\lambda X] = \lambda \widehat{\mathbb{E}}[X]$ 对于 $\lambda \ge 0$。

上概率和下概率定义如下：

$$\mathbb{V}(A) \triangleq \sup_{P\in\mathcal{P}} P(A), \quad \mathcal{V}(A) \triangleq \inf_{P\in\mathcal{P}} P(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

显然，$\mathbb{V}$ 和 $\mathcal{V}$ 是彼此共轭的，这意味着

$$\mathbb{V}(A) + \mathcal{V}(A^c) = 1,\ \forall A \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

对于 $X \in \mathcal{F}$，我们通过将 V 分别替换为 $\mathbb{V}$ 和 $\mathcal{V}$ 来定义 Choquet 积分 $(C_{\mathbb{V}}, C_{\mathcal{V}})$：

$$C_V(X) \triangleq \int_0^\infty V(X \ge t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 [V(X \ge t) - 1]\,\mathrm{d}t$$

显然，$\widehat{\mathbb{E}}[|X|] \le C_{\mathbb{V}}(|X|)$。

Definition 2.1. 令 $\widehat{\mathbb{E}}_1$ 和 $\widehat{\mathbb{E}}_2$ 分别为定义在 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ 上的两个次线性期望。随机变量 X_1 在 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 下的 $\widehat{\mathbb{E}}_1$ 被认为与另一个随机变量 X_2 在 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ 下的 $\widehat{\mathbb{E}}_2$ 具有相同的分布，记为 $X_1 \overset{d}{=} X_2$，如果

$$\widehat{\mathbb{E}}_1[\varphi(X_1)] = \widehat{\mathbb{E}}_2[\varphi(X_2)], \quad \forall \varphi \in C_{b,Lip}(\mathbb{R}),$$

其中 $C_{b,Lip}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的所有有界 *Lipschitz* 函数的集合。随机变量序列 $\{X_n, n \ge 1\}$ 被称为同分布的，如果对于每个 $i \ge 1$ 都有 $X_i \overset{d}{=} X_1$。

Definition 2.2. *(彭的独立性)* 设 X 和 Y 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 中的两个随机变量。Y 被称为与 X 独立，如果对于每个检验函数 $\varphi \in C_{b,Lip}(\mathbb{R})$ 我们有

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X,Y)] = \widehat{\mathbb{E}}[\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x,Y)]|_{x=X}].$$

一般来说，在次线性期望的框架下，Y 与 X 独立并不一般意味着 X 与 Y 独立，这与经典的线性期望不同。可以查看 [3] 中的示例 1.3.15 以获取详细信息。如果对于每个 $i \ge 1$，X_{i+1} 独立于 $(X_1, \cdots, X_i)$，则称随机变量序列 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是独立的。容易验证，如果 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ 是独立的，则 $\widehat{\mathbb{E}}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \widehat{\mathbb{E}}[X_i]$。

令 X 和 Y 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 中的两个随机变量。如果 $X \overset{d}{=} Y$，则

$$\mathbb{V}(X \ge x + \epsilon) \le \mathbb{V}(Y \ge x) \le \mathbb{V}(X \ge x - \epsilon), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \tag{2.2}$$

$$C_{\mathbb{V}}(X) = C_{\mathbb{V}}(Y). \tag{2.3}$$

实际上，我们可以找到一个 $\varphi \in C_{b,Lip}(\mathbb{R})$，使得 $I_{[x+\epsilon,\infty)}(y) \le \varphi(y) \le I_{[x,\infty)}(y)$，则

$$\mathbb{V}(X \ge x + \epsilon) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[I_{[x+\epsilon,\infty)}(X)] \le \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[\varphi(X)] = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X)],$$

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)] = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[\varphi(Y)] \le \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[I_{[x,\infty)}(Y)] = \mathbb{V}(Y \ge x).$$

我们在 (2.2) 中通过 $X \overset{d}{=} Y$ 得到第一个不等式，第二个不等式类似。由 (2.2) 可知，如果 x 是函数 $\mathbb{V}(X \ge y)$ 和 $\mathbb{V}(Y \ge y)$ 的连续点，则 $\mathbb{V}(X \ge x) = \mathbb{V}(Y \ge x)$ 成立。但是我们知道它们都是非增函数，在实分析中单调函数至多有可数个间断点。因此

$$\mathbb{V}(X \ge x) = \mathbb{V}(Y \ge x) \quad \text{for all but except countable many } x,$$

并且由此得出

$$C_{\mathbb{V}}(X) = C_{\mathbb{V}}(Y).$$

郭和李 [1] 介绍了次线性期望下伪独立性的定义。引入伪独立性的动机源于线性期望下的独立性性质，即给定 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量 X 和一个子-σ-代数 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，

$$E_P[\varphi(X)|\mathcal{G}] = E_P[\varphi(X)], \ \forall \varphi \in C_{b,Lip}(\mathbb{R}) \iff X \text{ is independent of } \mathcal{G}. \tag{2.4}$$

Definition 2.3. 令 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \widehat{\mathbb{E}})$ 上的随机变量序列。定义 $\mathcal{F}_n \triangleq \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ 和 $\mathcal{F}_0 \triangleq \{\emptyset, \Omega\}$。如果对于每个 $P \in \mathcal{P}$，我们有

$$E_P[\varphi(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] \leq \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X_n)],\ P-a.s.,\ \forall \varphi \in C_{b,Lip}(\mathbb{R}), \tag{2.5}$$

那么我们就称 X_n 是伪独立于 $\mathcal{F}_{n-1}$ 的。对于情况 $n \geq 2$，我们也可以称 X_n 是伪独立于 $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ 的。随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 被称为伪独立，如果对于每个 $n \geq 1$，(2.5) 成立。

Remark 2.1. (2.5) 等价于

$$\widehat{\mathcal{E}}[\varphi(X_n)] \leq E_P[\varphi(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] \leq \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X_n)],\ \forall \varphi \in C_{b,Lip}(\mathbb{R}),\ \forall P \in \mathcal{P},$$

这意味着条件期望位于一个非随机区间内。如果 $\mathcal{P} = \{P\}$ 是一个单元素集，那么伪独立就是经典概率论中由 (2.4) 定义的独立性。

接下来是 [1] 中的命题 2.4，表明彭的独立性蕴含伪独立性。

Proposition 2.1. 一个独立的随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 在 $(\Omega, \mathcal{F}, \widehat{\mathbb{E}})$ 上是伪独立的。

Remark 2.2. *示例 3.6 在 [5] 中表明伪独立性不能推出彭的独立性，因此很明显伪独立性比彭的独立性弱。*

接下来的结果是郭和李在 [1] 中的成果。

Theorem 2.1. 令 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是在 $\widehat{\mathbb{E}}$ 下满足下列条件的伪独立序列：
存在一个随机变量 X 满足 $C_{\mathbb{V}}(|X|) < \infty$ 和常数 C 使得

$$\mathbb{V}(|X_n| \geq x) \leq C\mathbb{V}(|X| \geq x), \quad \forall x \geq 0,\ \forall n \geq 1.$$

令

$$\overline{\mu} \triangleq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widehat{\mathbb{E}}[X_i],\ \underline{\mu} \triangleq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widehat{\mathcal{E}}[X_i],\ S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

然后

$$(WLLN) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{V}\left(\underline{\mu} - \epsilon < \frac{S_n}{n} < \overline{\mu} + \epsilon\right) = 1, \quad \forall \epsilon > 0, \tag{2.6}$$

$$(SLLN) \qquad \mathcal{V}\left(\underline{\mu} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \overline{\mu}\right) = 1. \tag{2.7}$$

(2.6) 和 (2.7) 是柯尔莫哥洛夫类型的强大数定律，我们将在第 3 节给出相应的马钦凯维奇类型的强大数定律。接下来是 [7] 中的博雷尔-坎泰利引理。它成立是因为 $\mathbb{V}$ 是可数次可加容量。

Lemma 2.1. 令 $\{A_n, n \geq 1\}$ 在 $\mathcal{F}$ 中。如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(A_n) < \infty$，则

$$\mathbb{V}(A_n, i.o.) = 0,$$

其中 $\{A_n, i.o.\} \triangleq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$。

以下引理是 [11] 中的一个鞅收敛结果，它在证明 (3.2) 的过程中起到了重要作用。

Lemma 2.2. 令 $\{S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ 是一个鞅，令 $\mathcal{F}_0$ 是平凡的 σ-代数。则 S_n 在集合上 $a.s.$ 收敛。$\{\sum_{i=1}^{\infty} E[X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}] < \infty\}$.

接下来是克罗内克引理，它是概率论极限定理证明中的一个常用工具。

Lemma 2.3. 令 $\{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ 和 $\{b_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ 是实数的无限序列，$0 < b_n \uparrow \infty$。如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b_n} < \infty$，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$。

在整个论文中，我们用 $x \vee y \triangleq \max\{x, y\}, x \wedge y \triangleq \min\{x, y\}, x^+ \triangleq x \vee 0, x^- \triangleq (-x) \vee 0$ 表示实数 x 和 y。$\mathbb{R}$ 表示所有实数。$\mathbb{N}$ 表示所有自然数，而 $\mathbb{N}^*$ 表示所有非零自然数。$0 < C$ 是一个可能在每一行中发生变化的常量。

3 主要结果

我们的结果如下述定理。

Theorem 3.1. 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是在 $\widehat{\mathbb{E}}$ 下满足如下条件的伪独立序列：
存在一个随机变量 X，使得 $C_{\mathbb{V}}(|X|^r) < \infty$ 对某些 $r \in [1, 2)$ 成立，并且有一个常数 C 满足

$$\mathbb{V}(|X_n| \geq x) \leq C\mathbb{V}(|X| \geq x), \quad \forall x \geq 0, \ \forall n \geq 1.$$

然后

$$(WLLN) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \widehat{\mathcal{E}}[X_j])}{n^{\frac{1}{r}}} \leq -\epsilon \ or \ \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \widehat{\mathbb{E}}[X_j])}{n^{\frac{1}{r}}} \geq \epsilon \right) = 0, \ \forall \epsilon > 0. \tag{3.1}$$

Theorem 3.2. 在定理 *3.1* 的相同条件下，我们有

$$(SLLN) \qquad \mathbb{V}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mathcal{E}}[X_i])}{n^{\frac{1}{r}}} < 0 \ or \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mathbb{E}}[X_i])}{n^{\frac{1}{r}}} > 0 \right) = 0. \tag{3.2}$$

我们已知彭的独立性蕴含着伪独立性，并且通过 (2.2) 和 (2.3)，我们可以得到以下推论，它类似于 [10] 中定理 3.4 的 (3.9)。实际上，在以下推论 3.1 的条件下，(3.1) 也成立。

Corollary 3.1. 对于一个满足 $C_{\mathbb{V}}(|X_1|^r) < \infty$ 的某些 $r \in [1,2)$ 的独立同分布序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 在 $(\Omega, \mathcal{F}, \widehat{\mathbb{E}})$ 上，我们有

$$\mathbb{V}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \widehat{\mathcal{E}}[X_i])}{n^{\frac{1}{r}}} < 0 \ or \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \widehat{\mathbb{E}}[X_i])}{n^{\frac{1}{r}}} > 0\right) = 0.$$

4 证明

在本节中，我们将转向定理 3.1 和定理 3.2 的证明。

4.1 Marcinkiewicz 型弱大数定律

定理的证明 3.1. 记截断随机变量 $Y_j \triangleq (-j^{\frac{1}{r}}) \vee X_j \wedge j^{\frac{1}{r}}$，$\forall j \in \mathbb{N}^*$，则

$$\widehat{\mathcal{E}}[Y_j] \leq E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}] \leq \widehat{\mathbb{E}}[Y_j].$$

注意

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n (X_j - \widehat{\mathbb{E}}[X_j]) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n |X_j - Y_j| + \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n (Y_j - E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}]) + \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n |\widehat{\mathbb{E}}[Y_j] - \widehat{\mathbb{E}}[X_j]|. \tag{4.1}$$

我们分三步证明 (3.1)。

步骤 1。我们展示

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n |\widehat{\mathbb{E}}[Y_j] - \widehat{\mathbb{E}}[X_j]| = 0. \tag{4.2}$$

由 $\widehat{\mathbb{E}}$ 的次可加性，我们有

$$|\widehat{\mathbb{E}}[Y_j] - \widehat{\mathbb{E}}[X_j]| \leq \widehat{\mathbb{E}}[|Y_j - X_j|] = \widehat{\mathbb{E}}[(|X_j| - j^{\frac{1}{r}})^+].$$

注意到

$$\begin{aligned}
(|X_j| - j^{\frac{1}{r}})^+ &= \sum_{i=j}^{\infty} (|X_j| - j^{\frac{1}{r}})^+ I_{[i^{\frac{1}{r}} \leq |X_j| < (i+1)^{\frac{1}{r}}]} \\
&\leq \sum_{i=j}^{\infty} ((i+1)^{\frac{1}{r}} - j^{\frac{1}{r}})^+ I_{[i^{\frac{1}{r}} \leq |X_j| < (i+1)^{\frac{1}{r}}]} \\
&= \sum_{i=j}^{\infty} ((i+1)^{\frac{1}{r}} - j^{\frac{1}{r}})(I_{[|X_j| \geq i^{\frac{1}{r}}]} - I_{[|X_j| \geq (i+1)^{\frac{1}{r}}]}) \\
&= ((j+1)^{\frac{1}{r}} - j^{\frac{1}{r}}) I_{[|X_j| \geq j^{\frac{1}{r}}]} + \sum_{i=j+1}^{\infty} ((i+1)^{\frac{1}{r}} - i^{\frac{1}{r}}) I_{[|X_j| \geq i^{\frac{1}{r}}]}.
\end{aligned}$$

在情况 $r=1$ 中，对于 $j\ge 1$，

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}[(|X_j|-j)^+] &\le \mathbb{V}(|X_j|\ge j)+\sum_{i=j+1}^{\infty}\mathbb{V}(|X_j|\ge i)\\
&\le C\mathbb{V}(|X|\ge j)+C\sum_{i=j+1}^{\infty}\mathbb{V}(|X|\ge i)\\
&\le C\mathbb{V}(|X|\ge j)+C\int_j^{+\infty}\mathbb{V}(|X|\ge t)dt\to 0,\ j\to\infty.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\widehat{\mathbb{E}}[Y_j]-\widehat{\mathbb{E}}[X_j]|\le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\widehat{\mathbb{E}}[(|X_j|-j)^+]\to 0, n\to\infty, \tag{4.3}
$$

则在情况 $r=1$ 下证明了 (4.2)。

在情况 $r>1$ 中，对于 $j\ge 1$，

$$
\begin{aligned}
(|X_j|-j^{\frac{1}{r}})^+ &\le \frac{1}{r}\cdot j^{\frac{1}{r}-1}I_{[|X_j|\ge j^{\frac{1}{r}}]}+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1}{r}\cdot i^{\frac{1}{r}-1}I_{[|X_j|\ge i^{\frac{1}{r}}]}\\
&\le \frac{1}{r}\cdot I_{[|X_j|\ge j^{\frac{1}{r}}]}+\frac{1}{r}\cdot\sum_{i=j+1}^{\infty}i^{\frac{1}{r}-1}I_{[|X_j|^r\ge i]}.
\end{aligned}
$$

对于每个 $P\in\mathcal{P}$，

$$
\begin{aligned}
E_P[(|X_j|-j^{\frac{1}{r}})^+] &\le \frac{1}{r}P(|X_j|\ge j^{\frac{1}{r}})+\frac{1}{r}\sum_{i=j+1}^{\infty}i^{\frac{1}{r}-1}P(|X_j|^r\ge i)\\
&\le \frac{1}{r}\mathbb{V}(|X_j|\ge j^{\frac{1}{r}})+\frac{1}{r}\sum_{i=j+1}^{\infty}i^{\frac{1}{r}-1}\mathbb{V}(|X_j|^r\ge i).
\end{aligned}
$$

然后取关于 $P\in\mathcal{P}$ 的上确界，我们有

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}[(|X_j|-j^{\frac{1}{r}})^+] &\le \frac{1}{r}\mathbb{V}(|X_j|\ge j^{\frac{1}{r}})+\frac{1}{r}\sum_{i=j+1}^{\infty}i^{\frac{1}{r}-1}\mathbb{V}(|X_j|^r\ge i)\\
&\le \frac{C}{r}\mathbb{V}(|X|\ge j^{\frac{1}{r}})+\frac{C}{r}\sum_{i=j+1}^{\infty}i^{\frac{1}{r}-1}\mathbb{V}(|X|^r\ge i).
\end{aligned}
$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[(|X_j|-j^{\frac{1}{r}})^+]}{j^{\frac{1}{r}}} &\le \frac{C}{r}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{V}(|X|\ge j^{\frac{1}{r}})+\frac{C}{r}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{i^{\frac{1}{r}-1}\mathbb{V}(|X|^r\ge i)}{j^{\frac{1}{r}}}\\
&\le \frac{C}{r}\cdot C_{\mathbb{V}}(|X|^r)+\frac{C}{r}\sum_{i=2}^{\infty}i^{\frac{1}{r}-1}\mathbb{V}(|X|^r\ge i)\sum_{j=1}^{i-1}j^{-\frac{1}{r}}\\
&\le \frac{C}{r}\cdot C_{\mathbb{V}}(|X|^r)+\frac{C}{r}\sum_{i=2}^{\infty}i^{\frac{1}{r}-1}\mathbb{V}(|X|^r\ge i)\cdot\frac{r}{r-1}i^{1-\frac{1}{r}}\\
&\le \frac{2C}{r-1}C_{\mathbb{V}}(|X|^r)<\infty,
\end{aligned}
$$

其中第三个不等式是由于对于 $i \geq 2$，

$$\sum_{j=1}^{i-1} j^{-\frac{1}{r}} \leq \int_0^i x^{-\frac{1}{r}} dx = \frac{r}{r-1} i^{1-\frac{1}{r}}.$$

由 Kronecker 引理，我们有

$$\frac{\sum_{j=1}^n \widehat{\mathbb{E}}[(|X_j| - j^{\frac{1}{r}})^+]}{n^{\frac{1}{r}}} \to 0, n \to \infty.$$

证明了 (4.2)。

步骤 2。对于 $\epsilon > 0$，我们证明

$$P\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n (Y_j - E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}]) \geq \frac{\epsilon}{4}\right) \to 0, n \to \infty, \text{uniformly for all } P \in \mathcal{P}.$$

根据切比雪夫不等式，对于所有 $\epsilon > 0$ 和 $P \in \mathcal{P}$ 我们有

$$P\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n (Y_j - E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}]) \geq \frac{\epsilon}{4}\right) \leq \frac{16}{\epsilon^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n E_P[Y_j^2]}{n^{\frac{2}{r}}} \leq \frac{16}{\epsilon^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{\mathbb{E}}[Y_j^2]}{n^{\frac{2}{r}}}.$$

根据克罗内克引理，我们只需要证明

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\widehat{\mathbb{E}}[Y_j^2]}{j^{\frac{2}{r}}} < \infty,$$

这导致了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{\mathbb{E}}[Y_j^2]}{n^{\frac{2}{r}}} = 0.$$

注意

$$\begin{aligned}
Y_j^2 &= \sum_{i=1}^j X_j^2 I_{[(i-1)^{\frac{1}{r}} \leq |X_j| < i^{\frac{1}{r}}]} + j^{\frac{2}{r}} I_{[|X_j| \geq j^{\frac{1}{r}}]} \\
&\leq \sum_{i=1}^j i^{\frac{2}{r}} (I_{[|X_j| \geq (i-1)^{\frac{1}{r}}]} - I_{[|X_j| \geq i^{\frac{1}{r}}]}) + j^{\frac{2}{r}} I_{[|X_j| \geq j^{\frac{1}{r}}]} \\
&\leq 1 + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{r} (i+1)^{\frac{2}{r}-1} I_{[|X_j| \geq i^{\frac{1}{r}}]} \\
&\leq 1 + 4 \sum_{i=1}^j i^{\frac{2}{r}-1} I_{[|X_j| \geq i^{\frac{1}{r}}]},
\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}[Y_j^2] &\leq 1 + 4 \sum_{i=1}^j i^{\frac{2}{r}-1} \mathbb{V}(|X_j| \geq i^{\frac{1}{r}}) \\
&\leq 1 + 4C \sum_{i=1}^j i^{\frac{2}{r}-1} \mathbb{V}(|X| \geq i^{\frac{1}{r}}).
\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[Y_j^2]}{j^{\frac{2}{r}}} &\le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{2}{r}}}+4C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^{\frac{2}{r}-1}\mathbb{V}(|X|\ge i^{\frac{1}{r}})}{j^{\frac{2}{r}}}\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{2}{r}}}+4C\sum_{i=1}^{\infty}i^{\frac{2}{r}-1}\mathbb{V}(|X|\ge i^{\frac{1}{r}})\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{2}{r}}}\\
&\le(1+4C)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{2}{r}}}+4C\sum_{i=2}^{\infty}i^{\frac{2}{r}-1}\mathbb{V}(|X|\ge i^{\frac{1}{r}})\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{2}{r}}}\\
&\le(1+4C)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{2}{r}}}+4C\sum_{i=2}^{\infty}i^{\frac{2}{r}-1}\mathbb{V}(|X|\ge i^{\frac{1}{r}})\cdot\frac{r}{2-r}(i-1)^{-\frac{2}{r}+1}\\
&\le(1+4C)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{2}{r}}}+\frac{8rC}{2-r}C_{\mathbb{V}}(|X|^r)<\infty,
\end{aligned}$$

其中我们使用了对于 $i\ge 2$ 的事实，

$$\sum_{j=i}^{\infty}j^{-\frac{2}{r}}\le\int_{i-1}^{\infty}x^{-\frac{2}{r}}dx=\frac{r}{2-r}(i-1)^{-\frac{2}{r}+1}.$$

步骤 3。对于 $\epsilon>0$，我们证明

$$P\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}|X_j-Y_j|\ge\frac{\epsilon}{4}\right)\to 0, n\to\infty, \text{uniformly for all } P\in\mathcal{P}.$$

类似于第二步，我们用马尔可夫不等式得到对于所有 $\epsilon>0$ 和 $P\in\mathcal{P}$ 的结论，

$$P\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}|X_j-Y_j|\ge\frac{\epsilon}{4}\right)\le\frac{4}{\epsilon}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{n}E_P[|X_j-Y_j|]}{n^{\frac{1}{r}}}\le\frac{4}{\epsilon}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{n}\widehat{\mathbb{E}}[|X_j-Y_j|]}{n^{\frac{1}{r}}}.$$

在第一步中已经证明了

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[|X_j-Y_j|]}{j^{\frac{1}{r}}}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[(|X_j|-j^{\frac{1}{r}})^+]}{j^{\frac{1}{r}}}<\infty.$$

然后根据克罗内克引理，对于所有 $P\in\mathcal{P}$，我们有

$$P\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}|X_j-Y_j|\ge\frac{\epsilon}{4}\right)\le\frac{4}{\epsilon}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{n}\widehat{\mathbb{E}}[|X_j-Y_j|]}{n^{\frac{1}{r}}}\to 0,\ n\to\infty.$$

通过 (4.1) 我们得出结论为对于所有 $\epsilon>0$ 和 $P\in\mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\widehat{\mathbb{E}}[X_j])\geq\epsilon\right)&\leq P\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}|X_j-Y_j|\geq\frac{\epsilon}{4}\right)+P\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}])\geq\frac{\epsilon}{4}\right)\\
&\quad+P\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}|\widehat{\mathbb{E}}[Y_j]-\widehat{\mathbb{E}}[X_j]|\geq\frac{\epsilon}{2}\right)\\
&\leq\frac{4}{\epsilon}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{n}\widehat{\mathbb{E}}[|X_j-Y_j|]}{n^{\frac{1}{r}}}+\frac{16}{\epsilon^2}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{n}\widehat{\mathbb{E}}[Y_j^2]}{n^{\frac{2}{r}}}\\
&\quad+\frac{2}{\epsilon}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}|\widehat{\mathbb{E}}[Y_j]-\widehat{\mathbb{E}}[X_j]|\to0,n\to\infty.
\end{aligned}
$$

然后取 $P\in\mathcal{P}$ 的上确界，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{V}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j-\widehat{\mathbb{E}}[X_j])}{n^{\frac{1}{r}}}\geq\epsilon\right)=0,\ \forall\epsilon>0.$$

另一方面，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{V}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j-\widehat{\mathcal{E}}[X_j])}{n^{\frac{1}{r}}}\leq-\epsilon\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{V}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}(-X_j-\widehat{\mathbb{E}}[-X_j])}{n^{\frac{1}{r}}}\geq\epsilon\right)=0,\ \forall\epsilon>0.$$

由于 $\mathbb{V}$ 的次可加性，(3.1) 被证明。证明现在已完成。 □

4.2 Marcinkiewicz 型强大数定律

现在，我们展示 (3.2) 的证明。

定理的证明 3.2. 记截断随机变量 $Y_j\triangleq(-j^{\frac{1}{r}})\vee X_j\wedge j^{\frac{1}{r}}$, $\forall j\in\mathbb{N}^*$，这与定理 3.1 的证明相同。注意

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\widehat{\mathbb{E}}[X_j])\leq\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}|X_j-Y_j|+\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\widehat{\mathbb{E}}[Y_j])+\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}|\widehat{\mathbb{E}}[Y_j]-\widehat{\mathbb{E}}[X_j]|.\quad(4.4)$$

类似于定理 3.1 的证明，我们也分三步证明 (3.2)。

步骤 1。我们证明

$$\mathbb{V}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\widehat{\mathbb{E}}[Y_j])>0\right)=0.\qquad(4.5)$$

注意，对于每个 $P\in\mathcal{P}$，$\{\sum_{j=1}^{n}\frac{Y_j-E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}]}{j^{\frac{1}{r}}},\mathcal{F}_n,n\geq1\}$ 都是一个鞅。通过简单的计算，

$$E_P\left[\sum_{j=1}^{\infty}E_P\left[\frac{(Y_j-E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}])^2}{j^{\frac{2}{r}}}\middle|\mathcal{F}_{j-1}\right]\right]\leq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{E_P[Y_j^2]}{j^{\frac{2}{r}}}\leq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[Y_j^2]}{j^{\frac{2}{r}}}<\infty,$$

其中最后一个不等式已在定理 3.1 的第二步证明中得到证明。

因此，

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} E_P\left[\frac{(Y_j - E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}])^2}{j^{\frac{2}{r}}}\middle|\mathcal{F}_{j-1}\right] < \infty\right) = 1$$

意味着

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{Y_j - E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}]}{j^{\frac{1}{r}}} < \infty\right) = 1$$

由引理 2.2 得出。

由克罗内克引理，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^{n} (Y_j - E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}]) = 0,\ \ P-a.s.,\ \forall P \in \mathcal{P}.$$

注意到

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^{n} (Y_j - \widehat{\mathbb{E}}[Y_j]) > 0\right) \le P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^{n} (Y_j - E_P[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}]) > 0\right) = 0, \forall P \in \mathcal{P}.$$

取 $P \in \mathcal{P}$ 上的上确界，我们得到 (4.5)。

步骤 2. 我们证明了

$$\mathbb{V}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^{n} |X_j - Y_j| > 0\right) = 0. \tag{4.6}$$

显然，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{V}(|X_j - Y_j| > 0) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{V}(|X_j| \ge j^{\frac{1}{r}}) \le C \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{V}(|X| \ge j^{\frac{1}{r}}) \le C \cdot C_{\mathbb{V}}(|X|^r) < \infty.$$

根据 Borel-Cantelli 引理，我们有

$$\mathbb{V}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^{n} |X_j - Y_j| > 0\right) \le \mathbb{V}(|X_j - Y_j| > 0, i.o.) = 0.$$

步骤 3。这是真的

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^{n} |\widehat{\mathbb{E}}[Y_j] - \widehat{\mathbb{E}}[X_j]| = 0, \tag{4.7}$$

这在定理 3.1 的证明第一步中已经得到证明。

由 (4.5),(4.6) 和 (4.7)，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \widehat{\mathbb{E}}[X_j]) > 0\right) &\le \mathbb{V}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^{n} |X_j - Y_j| > 0\right) \\ &\quad + \mathbb{V}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^{n} (Y_j - \widehat{\mathbb{E}}[Y_j]) > 0\right) = 0.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\mathbb{V}\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\widehat{\mathcal{E}}[X_i])}{n^{\frac{1}{r}}}<0\right)=\mathbb{V}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n(-X_i-\widehat{\mathbb{E}}[-X_i])}{n^{\frac{1}{r}}}>0\right)=0.$$

证明完成。 □

参考文献

[1] X. Guo and X. Li. On the laws of large numbers for pseudo-independent random variables under sublinear expectation. *Statistics and Probability Letters 172* (2021), 109042.

[2] J. Fu. Strong laws of large numbers for sequences of blockwise m-dependent and orthogonal random variables under sublinear expectations. *arXiv preprint, arXiv:2504.07706*, 2025.

[3] S. Peng. Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty: with Robust CLT and G-Brownian Motion, volume 95. *Springer Nature*, 2019.

[4] Y. Song. A strong law of large numbers under sublinear expectations. *Probability, Uncertainty and Quantitative Risk*, 8(3), 333-350, 2023.

[5] X. Li. Pseudo-independence, independence and related limit theorems under sublinear expectations. *arXiv preprint, arXiv:2105.14928*, 2021.

[6] W. Gu and L. Zhang. Strong law of large numbers for m-dependent and stationary random variables under sub-linear expectations. *arXiv preprint, arXiv:2404.01118*, 2024.

[7] L. Zhang. Rosenthal’s inequalities for independent and negatively dependent random variables under sub-linear expectations with applications. *Science in China-Mathematics*, 59(4):751 – 768, 2016.

[8] Z. Chen. Strong laws of large numbers for sub-linear expectations. *Sci. China Math*, 59,945-954, 2016.

[9] L. Zhang. The limit points of the strong law of large numbers under the sub-linear expectations. *arXiv preprint, arXiv:2311.11100*, 2024.

[10] L. Zhang. The sufficient and necessary conditions of the strong law of large numbers under sub-linear expectations. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 39(12):2283-2315, 2023.

[11] P. Hall and C.C. Heyde. Martingale Limit Theory and Its Application. *Academic Press*, 1980.