长度为 3 和 $n-1$ 的有向图循环在 Bang-Jensen-Gutin-Li 类型条件下的情况

Zan-Bo Zhang[1,2*], Wenhao Wu[1], Weihua He[3†]

[1] School of Statistics and Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou 510320, China

[2] Institute of Artificial Intelligence and Deep Learning, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou 510320, China

[3] School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China

摘要

Bang-Jensen-Gutin-Li 型条件是对有向图的哈密顿性施加于不相邻且具有共同入邻居或共同出邻居的顶点上的度限制。

它们可以被视为无向图中 Fan 类型条件的扩展，也是局部 (入-, 出-) 半完全有向图的推广。自 1996 年首次出现以来，出现了各种 Bang-Jensen-Gutin-Li 类型的哈密顿性条件。

在本文中，我们建立了一个 Bang-Jensen-Gutin-Li 型条件，它不仅蕴含一个哈密顿圈，还蕴含一个 3-圈和一个 $(n-1)$-圈，并且异常图特征明显。我们猜想这个条件蕴含了每个长度的圈的存在。

关键词：哈密顿圈，泛圈性，Bang-Jensen-Gutin-Li 型条件，局部半完全有向图

1 介绍和术语

我们考虑没有自环和多重弧的有限有向图。令 D 为一个有向图，以及 $u, v \in V(D)$。如果从 u 到 v 存在一条弧，我们写 $u \to v$，否则 $u \nrightarrow v$。令 F 和 H 是 D 的两个不相交子有向图，或 $V(D)$ 的两个不相交子集，如果 F 中的每个顶点都向 H 中的每个顶点发送一条弧，则我们写为 $F \to H$。用 $d(F, H)$ 表示 F 和 H 之间的弧的数量。令 $u \in V(D)$ 和 F 是 D 的一个子有向图（可能 $u \in V(F)$），$d_F(u)$ 表示 u 和 $V(F)$ 之间的弧的数量。令 C 为一个环，$u, v \in V(C)$，其中 $u \neq v$，通过 $C[u, v]$ 我们指从 u 到 v 的 C 段。对于路径 P 和 $u, v \in V(P)$，其中 $u \neq v$，$P[u, v]$ 表示从 u 到 v 的 P 段。C-绕过是一个 (u, v)-路径 P，其长度至少为二，且端点是 u, v 但在 C 上没有其他顶点，其中 $u \neq v$。当 C 从上下文中很明显时，我们只将 P 称为旁路。路径 $C[u, v]$ 是 P 的*差距*。围长的 D 是 D 中最短环的长度，记为 $g(D)$。在一个无向图中，u 和 v 之间的距离记为 $d(u, v)$。对于此处未定义的术语，请参见 [1]。

度条件是图中哈密尔顿圈存在性的最基本条件之一。对于有向图，最流行的哈密尔顿度条件可能是 Ghouila-Houri 条件和 Meyniel 条件（见 [1] 的第 6.4 章），分别涉及一个顶点的度数和两个不相

*Email address: eltonzhang2001@gmail.com, zanbozhang@gdufe.edu.cn. Supported by Guangdong Basic and Applied Basic Research Foundation (2024A1515012286).

†Corresponding author. E-mail address: hwh12@gdut.edu.cn. Supported by National Natural Science Foundation of China (Grant Number: 12426663)

邻顶点的度数之和。1996 年，Bang-Jensen、Gutin 和 Li ([2]) 引入了仅对具有共同入邻或共同出邻的非相邻顶点施加度限制的条件。对于有向图 D 中的一对不相邻顶点 x 和 y，如果它们有一个共同的入邻居（分别是一个共同的出邻居），我们说它们形成一个非相邻支配对（分别为一个非相邻被支配对）。Bang-Jensen、Gutin 和 Li 的主要定理之一具有以下形式。

定理 1.1. *([2]) 设 D 是一个在 $n \geq 2$ 个顶点上的强图。假设，对于每个不相邻的支配对 $\{x, y\}$，要么 $d(x) \geq n$ 和 $d(y) \geq n-1$，要么 $d(x) \geq n-1$ 和 $d(y) \geq n$。那么 D 是哈密顿图。*

涉及非邻接支配对和非邻接被支配对的条件可以视为无向图中以下 Fan 条件的扩展，对于有向图 D 中的非邻接被支配对和非邻接支配对，在基础图 D 中的距离为 2。

定理 1.2. *([6]) 设 G 是一个 2-连通的、有 $n \geq 3$ 个顶点的图，并且设 u 和 v 是 G 的不同顶点。如果 $d(u, v) = 2$ 表明 $\max(d(u), d(v)) \geq n/2$，那么 G 具有一个哈密尔顿圈。*

此类条件也是三种研究充分的有向图的一般化，即，*局部半完全有向图*（简称 LSD），*局部内半完全有向图*（简称 LiSD）和*局部外半完全有向图*（简称 LoSD）。一个 LiSD（相应地 LoSD）是有向图，在其中每个顶点的入邻域（相应地出邻域）诱导了一个半完全有向图。一个 LSD 是一个既是 LiSD 又是 LoSD 的有向图。没有 2-圈的 LSD 称为*本地锦标赛*。LiSD、LoSD 和 LSD 的哈密顿性均已得到验证（[3]）。

邦迪的元猜想（[4]）指出，任何非平凡的哈密尔顿性条件也意味着泛圈性，除了少数例外图类。这一猜想激发了对*泛圈性*的研究，这意味着在一个图 G 中存在从 3 到 $|G|$ 长度的每个圈。基于这个想法，已经证明了各种范类型条件意味着泛圈性。另一方面，LSD 的泛圈性也得到了验证（[7]），其详细内容如下，并将在我们的工作中使用。

一个有 n 个顶点的有向图称为有向图，如果我们能够标记它的顶点 $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ 使得对于每个 i,$N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \ldots, V_{i+d^+(v_i)}\}$ 和 $N^-(v_i) = \{v_{i-d^-(v)}, \ldots, v_{i-1}\}$，其中下标取模 n。一个 LSDD 若能以形式 $D = R[S_1, S_2, \ldots, S_r]$ 表示，则称其为*可分解的圆*，其中 R 是一个具有 r 个顶点的局部竞赛 $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$，并且 D 是通过将 R 中的每个顶点 v_i 替换为强半完全有向图 S_i，同时将每条弧 $v_i v_j$ 替换为从 $V(S_i)$ 到 $V(S_j)$ 的所有弧而得到的。$D = R[S_1, S_2, \ldots, S_r]$ 称为*环分解的* D。

定理 1.3. *一个强大的 LSDD 是泛圈的当且仅当它不是形式为 $D = R[S_1, S_2, \ldots, S_r]$ 的，其中 R 是一个具有 $g(R) > max\{2, |V(S_1)|, |V(S_2)|, ..., |V(S_r)|\} + 1$ 的圆形局部锦标赛。([7])*

然后，提出一个 Bang-Jensen-Gutin-Li 类型的泛圈条件似乎是自然的。一些尝试已经进行了。例如，Darbinyan 和 Karapetyan ([5]) 证明了在定理 1.1的条件下附加半度限制时，存在长度为 $n-1$ 的圈。他们还指出，存在长度为 $n-1$ 的圈往往有助于证明泛圈性（例如在 [8, 9] 中）。然而，证明泛圈性的潜在困难在于以下事实。定理 1.1中的条件只对非相邻的支配对施加度限制，这扩展了 LiSD 的类别。因此任何结果表明定理 1.1中的条件意味着泛圈性都必须将非泛圈性的 LiSD 类别作为例外类别。但是，完全刻画非泛圈性的 LiSD 似乎很困难并且尚未找到。

因此，首先考虑涉及非邻接支配对和非邻接受控对的 Bang-Jensen-Gutin-Li 条件是有意义的，这些条件推广了 LSD。所以我们猜想如下。记 $\mathcal{D}_L$ 为定理 1.3中定义的一类非泛圈 LSD，记 $\mathcal{D}_B$ 为至少有 4 个顶点的平衡完全二部图。

猜想 1. *令 D 为一个阶数为 $n \geq 3$ 的有向图。假设对于任何属于非邻接支配对或非邻接被支配对的 $u \in V(D)$，$d(u) \geq n$，则 D 是泛圈的，除非 $D \in \mathcal{D}_L$ 或 $D \in \mathcal{D}_B$。*

猜想的条件暗示了定理 1.1的条件，从而意味着哈密顿圈的存在。在本文中，我们证明该条件还意味着长度为 3 和 $n-1$ 的圈的存在，这支持了猜想。如上所述，长度为 $n-1$ 的圈通常有助于证明泛圈性。另一方面，如果我们通过归纳法对圈的长度进行泛圈性的证明，那么存在 3 圈是基本步骤。因此，这两个结果可能都有助于证明猜想 1。本文的主要结果如下两个定理，在随后的部分中进行了证明。

定理 1.4. 令 D 为一个阶数为 $n \geq 3$ 的强有向图。假设对于每个属于非相邻支配对或非相邻被支配对的顶点 u，存在 $d(u) \geq n$，则 D 包含一个 3-圈，除非 n 是偶数且 $D \in \mathcal{D}_B$，或者 $B \in \mathcal{D}_L$ 并且在 D 的轮分解中的每个强半完全有向图 S 满足 $|S| \leq 2$。

当 $n = 3$ 时，根据泛环性的定义只需存在 3-圈，因此在接下来的定理中我们假设 $n \geq 4$。

定理 1.5. 令 D 为一个具有阶数 $n \geq 4$ 的强有向图。假设对于每个属于非邻接支配对或非邻接过支配对的顶点 u，则 $d(u) \geq n$，那么 D 具有一个长度为 $n-1$ 的圈，除非 n 是偶数且 $D \in \mathcal{D}_B$，或者 $D = C_n$（属于 $\mathcal{D}_L$）。

2 定理 1.4的证明：存在一个 3-循环

我们需以下引理来证明该定理。

引理 2.1. 令 D 是一个没有有向 3-环的强有向图，并且 $u, v \in V(D)$。如果 $uv, vu \in A(D)$，则 $d(u) + d(v) \leq 2n$，且等号成立当且仅当对于每一个 $x \in V(D)\backslash\{u, v\}$，$d(\{u, v\}, x) = 2$。

证明. 对于每一个 $x \in V(D)\backslash\{u, v\}$，我们不能有 $u \to x \to v$ 或 $v \to x \to u$。因此 $|A(D) \cap \{ux, xv\}| \leq 1$，$|A(D) \cap \{vx, xu\}| \leq 1$，从而 $d(\{u, v\}, x) \leq 2$，进而 $d(u) + d(v) \leq 2 + 2 + 2(n-2) = 2n$。若等式成立，则对于每一个 $x \in V(D)\backslash\{u, v\}$ 都有 $d(\{u, v\}, x) = 2$。 □

假设在 D 中不存在 3-圈。如果 $u_0u_1 \dots u_k$ 和 $u_k \dots u_1u_0$ 都是 D 中的有向路径，我们称 $u_0u_1 \dots u_k$ 为一个双向路径，并且称为双向弧如果 $k = 1$。现在让我们将讨论分为两种情况，分别对应于 D 中最长的双向路径。

情况 1。D 中最长的双向路径长度最多为 1。

如果根本没有双向路径，那么每个顶点的度数至多为 $n-1$。根据定理的条件，不能存在任何不相邻的支配对或不相邻的被支配对，因此 D 是一个 LSD。

如果在 D 中至少存在一条长度为 1 的双向路径，比如说 uv，那么我们可以证明 u 和 u 在 $D\backslash\{u, v\}$ 中的入邻域和出邻域相同。否则，不失一般性地假设存在一个顶点 x，使得 $u \to x$ 但 $v \nrightarrow x$，因为 D 是 3-圈自由的，$x \nrightarrow v$。但随后 $\{x, v\}$ 是一个非相邻支配对，根据定理的条件 $d(v) \geq n$。由引理 2.1，$d(u) + d(v) \leq 2n$。因此 $d(v) \geq n \geq d(u)$。令 w 是与 u 和 v 都相邻的任意一个顶点，我们有 $d(u, w) = d(v, w) = 1$。由于 x 与 u 相邻但不与 v 和 $d(v) \geq d(u)$ 相邻，因此必须存在另一个顶点 y，它与 v 相邻但不与 u 相邻。但是然后 $\{u, y\}$ 形成一个非相邻支配对或一个非相邻受控对。因此，$d(u) \geq n$ 成立，从而我们有 $d(u) = d(v) = n$。现在引理 2.1中的等式成立，并且我们有 $d(\{u, v\}, x) = 2$。然后我们有 $x \to u$ 和 xuv 是长度为 2 的双向路径，这是一个矛盾。因此，u 和 v 在 $D\backslash\{u, v\}$ 中具有相同的入邻域和出邻域。

现在我们可以让 N^+_{uv} 和 N^-_{uv} 分别成为 u 和 v 在 $D\backslash\{u, v\}$ 中的出邻域和入邻域。由于没有 3-循环，因此不可能存在从 N^+_{uv} 到 N^-_{uv} 的弧。由 D 的强性可知，存在一个顶点 $x \notin \{u, v\} \cup N^+_{uv} \cup N^-_{uv}$，使得从 N^+_{uv} 到 x 存在一条路径，并且从 x 到 N^-_{uv} 也存在一条路径。然后

$$d(u) = d(v) = |N^+_{uv}| + |N^-_{uv}| + 2 \leq n - 3 + 2 = n - 1.$$

对于任何不与双向弧关联的顶点 w，我们也得到 $d(w) \leq n-1$。因此 $\delta(D) \leq n-1$。根据定理的条件，在 D 中不能存在非邻接支配对和非邻接被支配对。因此 D 是一个 LSD。

现在已经证明在所有情况下 D 是一个 LSD。由于 D 不包含任何 3-循环，D 不是泛圈的，因此是 $D \in \mathcal{D}_L$。此外，每个强半完全有向图 S 都是泛圈的，即，包含从 3 到 $|S|$ 的所有长度的圈（定理 1.5.3 在 [1] 中）。因此，在 D 的轮分解中的每个半完全有向图中，我们一定有 $|S| \leq 2$。

情况 2。D 中的最长双向路径长度至少为 2。

首先我们声称在这种情况下最长的双向路径的实际长度至少为 3。设 uvw 是一条双向路径。由于 D 是 3-无环的，u 和 w 不能相邻。因此，$\{u,w\}$ 是一个非相邻支配对，并且 $d(u),d(w)\geq n$。但是，$d(u,V(D)\backslash\{u,v,w\})\geq n-2$，则至少有一个顶点 $x\in V(D)\backslash\{u,v,w\}$ 与 u 相邻，并通过双向弧相连。所以，$xuvw$ 是一个长度为 3 的双向路径。

令 $P=u_0u_1\ldots u_k$ 是 D 中具有 $k\geq 3$ 的最长双向路径。由于不存在 3-循环，对于 $0\leq i\leq k-2$，u_i 不能与 u_{i+2} 相邻，并且 $\{u_i,u_{i+2}\}$ 形成一个非相邻支配对。因此 $d(u_i)\geq n$ 和 $u_{i+2}\geq n$。当 i 从 0 运行到 $k-2$ 时，我们实际上得到 $d(u_j)\geq n$ 对于 $0\leq j\leq k$。结合引理 2.1，我们有 $2n\leq d(u_i)+d(u_{i+1})\leq 2n$ 对于 $0\leq i\leq k-1$ 成立，因此 $d(u_j)=n$ 对于 $0\leq j\leq k$ 成立。

此外，对于 $0\leq i\leq k-1$，根据引理 2.1，$d(\{u_i,u_{i+1}\},x)=2$ 对所有 $x\in V\backslash\{u_i,u_{i+1}\}$ 成立，并且由于不存在 3-循环，我们必须有 $A(D)\cap\{u_ix,xu_{i+1}\}=A(D)\cap\{u_{i+1}x,xu_i\}=1$。因此，对于 $0\leq j\leq k-2$ 和 $y\in V\backslash\{u_j,u_{j+1},u_{j+2}\}$，如果 $u_j\to y$，那么 $y\not\to u_{j+1}$ 和 $u_{j+2}\to y$，反之亦然。还需要注意的是 u_j 和 u_{j+2} 不相邻。因此，u_{j+2} 和 u_j 具有相同的出邻居集，即

$$N^+(u_j)=N^+(u_{j+2}). \tag{1}$$

令 j 遍历从 0 到 $k-2$，我们得到

$$N^+(u_0)=N^+(u_2)=\cdots=N^+(u_{2\lfloor k/2\rfloor}) \text{ and } N^+(u_1)=N^+(u_3)=\cdots=N^+(u_{2\lfloor (k-1)/2\rfloor+1}). \tag{2}$$

对于 P 上顶点的入度也有类似的等式成立，

$$N^-(u_0)=N^-(u_2)=\cdots=N^-(u_{2\lfloor k/2\rfloor}) \text{ and } N^-(u_1)=N^-(u_3)=\cdots=N^-(u_{2\lfloor (k-1)/2\rfloor+1}). \tag{3}$$

由于 $0\leq j\leq k-2$ 的任何情况下，u_j 和 u_{j+2} 都不相邻，并且 u_i 和 u_{i+1} 通过双向弧连接对于任意的 $0\leq i\leq k-1$，(2) 和 (3) 暗示顶点子集 $N_0=\{u_0,u_2,\ldots,u_{2\lfloor k/2\rfloor}\}$ 是独立的，顶点子集 $N_1=\{u_1,u_3,\ldots,u_{2\lfloor (k-1)/2\rfloor+1}\}$ 也是独立的，并且 N_0 中的所有顶点通过双向弧与 N_1 中的所有顶点相邻，或者等价地，$\langle V(P)\rangle$ 是一个完全二部有向图。

令 $x\in V(D)\backslash V(P)$. 由于 $\langle V(P)\rangle$ 是完全二分图，x 不能通过双向弧与 P 中的任何顶点相邻，否则我们将找到一个包含 $V(P)\cup\{x\}$ 中所有顶点的双向路径，这与 P 是最长的矛盾。然而，对于任意的 $u_{2i},u_{2j+1}\in V(P)$、u_{2i} 和 u_{2j+1} 通过双向弧连接，以及 $d(u_{2i})+d(u_{2i+1})=n+n=2n$，因此根据引理 2.1，$d(\{u_{2i},u_{2j+1}\},x)=2$。所以 $d(u_{2i},x)=d(u_{2j+1},x)=1$，由于不存在 3-循环，要么是 $x\to\{u_{2i},u_{2j+1}\}$，要么是 $\{u_{2i},u_{2j+1}\}\to x$。由于 u_{2i} 和 u_{2j+1} 是任意选择的，我们有要么 $x\to V(P)$ 要么 $V(P)\to x$。

令 N_P^+ 和 N_P^- 分别为满足 $V(P)\to x$ 和 $x\to V(P)$ 的 $x\in V(D)\backslash V(P)$ 集合。那么 $N_P^+\cup N_P^-=V\backslash V(P)$。由于不存在 3-循环，因此不可能存在从 N_P^+ 到 N_P^- 的弧。由于 $V(P)\cup N_P^+\cup N_P^-=V(D)$，$D$ 不能是强的，除非 $N_P^+=N_P^-=\emptyset$。因此，$V(D)=V(P)$ 和 D 是一个完全二部有向图，进一步由于每个顶点的度为 n，D 必须是一个平衡的完全二部有向图，这完成了第 2 种情况以及整个定理的证明。

3 定理 1.5的证明：存在一个 $(n-1)$-圈

在本节的证明中，我们将需要几个预备结果。第一个是多插入技术，这是一种解决图中的路径和环问题的强大工具。关于有向图中多插入技术的详细解释及其应用可以在 [1] 的第 6.4.2 章找到。为了保持论文的完整性，我们在这里简要介绍相关概念和思想。

令 $P=u_0u_2\ldots u_s$ 是有向图 D 中的一条路径，令 $Q=v_0v_2\ldots v_t$ 是 $D\backslash V(P)$ 中的一条路径。路径 P 被认为可以是插入到 Q，如果存在一个整数 $0\leq i\leq t-1$ 满足 $v_i\to u_1$ 和 $u_s\to v_{i+1}$，即路径 Q

可以扩展为一个新的 (v_0,v_t)-路径 $Q[v_1,v_i]PQ[v_{i+1},v_t]$，其顶点集为 $V(P)\cup V(Q)$。接下来，路径 P 可以是多插入到 Q，如果存在整数 $i_1=0<i_2<\cdots<i_m=s+1$，使得对于每一个 $k\in\{1,2,\ldots,m\}$，子路径 $P[u_{i_{k-1}},u_{i_k-1}]$ 可以插入到 Q 中。对于 Q 是循环的情况，可以给出类似的定义。

多插入的定义意味着 P 可以划分成若干子路径，每个子路径都可以插入到 Q 中。这里的关键结果是，在这个假设下，所有 P 的顶点都可以插入到 Q 中形成一条路径，其顶点集为 $V(P)\cup V(Q)$，并且与 Q 具有相同的端点（或者仅仅是一个顶点集为 $V(P)\cup V(Q)$ 的循环，当 Q 是循环时）。

引理 3.1. *(多插入技术) 设 P 是有向图 D 中的一条路径，设 $Q=v_0v_1\ldots v_t$ 是 $D\backslash V(P)$ 中的一条路径（或环）。如果 P 可以多插入到 Q 中，那么在 D 中存在一个 (v_0,v_t)-路径 R（循环，分别）使得 $V(R)=V(P)\cup V(Q)$。*

下一个引理是两个在各种文献中经常使用的简单事实。我们不给出证明就陈述它。

引理 3.2. *令 D 为有向图。*

(a) 设 $P=u_0u_1\ldots u_{p-1}$ 是在 D 和 $v\in V(D)\backslash V(P)$ 中带有 $|P|\geq 2$ 的路径。如果 v 不能插入到 P 中，则 $d_P(v)\leq |P|+1$。如果我们进一步有 $v\nrightarrow u_0$ 或 $u_{p-1}\nrightarrow v$，则 $d_P(v)\leq |P|$。

(b) 令 Q 是一个包含 $|Q|\geq 3$ 在 D 和 $v\in V(D)\backslash V(Q)$ 中的循环。如果 v 不能插入到 Q 中，则 $d_Q(v)\leq |Q|$。

引理 3.3. *([8], 引理 2) 设 D 是一个包含长度为 $n-2$ 的圈 $C=u_0u_1\ldots u_{n-3}u_0$ 的强有向图，其中 $n=|D|$。令 v_0,v_1 不包含在 C 中的顶点。*

(a) 如果 $d(v_0),d(v_1)\geq n$ 和 D 不包含长度为 $n-1$ 的圈，则 n 是偶数，并且可以选取记号使得 v_0 控制并受控于恰好 $u_1,u_3\ldots,u_{n-3}$，而 v_1 控制并受控于恰好 $u_0,u_2,\ldots,u_{n-4}$。

(b) 如果 D 满足 $\delta(D)\geq n$ 并且不包含长度为 $n-1$ 的循环，那么 n 是偶数并且 D 与 $\overleftrightarrow{K}_{n/2,n/2}$ 同构。

以下引理表明，在满足我们提出条件的有向图中，与最长非哈密顿圈相邻的顶点满足某些良好的结构或度数条件。

引理 3.4. *令 D 为一个强有向图，阶数为 $n\geq 4$。假设对于每个属于非邻接支配对或非邻接过支配对的顶点 u，$d(u)\geq n$。令 C 是 D 中最长的非哈密顿循环，并且 $|C|\leq n-2$，而 $w\in V(D)\backslash V(C)$ 与 C 上的某个顶点相邻。如果 $d(w)\leq n-1$，那么要么 $w\to C$ 要么 $C\to w$。*

证明. （引理 3.4）设 $C=u_0u_1\ldots u_{k-1}$。根据引理条件，w 与 C 上的至少一个顶点相邻，假设为 $u_0\to w$。由于 C 是最长的非哈密顿循环且包含 $|C|\leq n-2$，因此 w 不能插入到 C 中，故 $w\nrightarrow u_1$。但 w 和 u_1 受 u_0 支配，并且根据引理的条件和 $d(w)\leq n-1$，它们必须相邻。所以 $u_1\to w$。反复应用上述论点，我们得出结论，对于 $u_i\to w$，即 $0\leq i\leq k-1$，也就是说，$C\to w$。类似地，如果我们假设开始时 $w\to u_0$，则会得到 $w\to C$。 □

现在我们准备证明定理 1.5。我们首先证明定理对于 $n\in\{4,5\}$ 成立。根据上述讨论，D 中存在一个哈密顿圈。

如果 $n=4$ 和 D 不与 C_4 同构（注意 $C_4\in\mathcal{D}_B\cap\mathcal{D}_L$），那么 D 包含一条和弦，这将生成一个 3-圈，如所要求。

如果 $n=5$ 和 D 不同构于 C_5。我们用 $C=u_0u_1u_2u_3u_4u_0$ 表示 D 中的哈密顿圈，那么 C 至少有一条弦。假设通过矛盾法，D 没有 4-圈，那么 C 的每条弦 u_iu_{i+2} 都不存在，或者我们有一个 4-圈 $u_iu_{i+2}\ldots u_i$，其中下标取模为 n。因此只能有形式为 u_iu_{i-2} 的弦。(1) 现在假设 C 只有一条弦，比如说 u_2u_0，那么 u_0 和 u_3 形成一个非相邻的支配对，因此 $d(u_3)\geq 5$。但没有以 u_3 为端点的弦，因

此 $d(u_3) \leq 4$，矛盾。因此 C 至少有两条弦。(2) 如果一个顶点关联两条弦，假设我们有弦 u_2u_0 和 u_0u_3，那么我们有一条路径 $u_1u_2u_0u_3u_4$，因此我们不能有弦 u_3u_1 和 u_4u_2，否则可以形成一个 4-圈。但然后 $\{u_1, u_3\}$ 和 $\{u_2, u_4\}$ 是非相邻支配或支配对。因此对于 $i \in \{1,2,3,4\}$，有 $d(u_i) \geq 5$。那么在 C 上的每条弧的反向弧都必须存在，并且同样适用于 u_1u_4。现在在 D 中可以有很多 4-循环，比如说 $u_4u_3u_2u_1u_4$，再次产生矛盾。(3) 如果至少有三条弦，则必须有两条以同一端点结束的弦，在 (2) 中已经讨论过这种情况。(4) 因此恰好存在两条不共端点的弦，记为 u_0u_2 和 u_3u_1，那么 u_4 和 u_1 形成一个非邻接支配对，并且 $d(u_4) \geq 5$，但是 u_4 不与任何弦关联，因此 $d(u_4) \leq 4$ 产生矛盾，这就完成了对 $n = 5$ 的证明。

现在我们假设 $n \geq 6$，并且在 D 中不存在 $(n-1)$-圈。我们进一步假设 D 不同构于 C_n。注意定理的条件暗示了一个哈密尔顿圈的存在。由于 D 不同构于 C_n，因此在哈密尔顿圈上存在一条弦，这条弦产生了一个更短的圈。因此我们可以在 D 中找到一个非哈密顿回路。令 $C = u_0u_1 \dots u_{k-1}u_0$ 为 D 中最长的非哈密顿回路，其中 $3 \leq k \leq n-2$。

我们声称存在一个 C-绕路在 D 中。假设相反，不存在 C-绕路。由 D 的强性可知，存在一个循环 Q 带有 $|V(Q) \cap V(C)| = 1$。不失一般性我们可以进一步假设 Q 和 C 的公共顶点为 u_0，并记 u_0 在 Q 上的后继者为 v。现在从 v 到 u_β 的任何弧线，加上 $\beta \neq 0$ 将产生一个 C-旁路，并导致矛盾，因此 $d_C(v) \leq 2$。同时，$\{v, u_1\}$ 是一个非相邻支配对，因此根据定理的条件 $d(v), d(u_1) \geq n$。对于任意的 $w \in V(R)\backslash v$，如果 $v \to w \to u_1$ 或 $u_1 \to w \to v$ 我们在 v 和 u_1 之间有一个路径，这再次形成了一个与 $Q[u_0, v]$ 或 $Q[v, u_0]$ 的 C-旁路，这是一个矛盾。因此 $d(w, \{v, u_1\}) \leq 2$，总计 $d(V(R)\backslash v, \{v, u_1\}) \leq 2(|R|-1)$。然后

$$2n \leq d(v) + d(u_1) = d_C(v) + d_C(u_1) + d(V(R)\backslash v, \{v, u_1\})) \leq 2 + 2(|C|-1) + 2(|R|-1) = 2n-2,$$

矛盾。因此必须存在一个 C-旁路。

我们取一个具有最小间隙的 C-旁路 $P = x_0x_1 \dots x_l$，并且不失去一般性，我们假设 $x_0 = u_0$ 并设 $x_l = u_\alpha$，其中 $l \geq 2$ 是旁路的长度，而 $\alpha \geq 1$ 是间隙的长度。进一步，令 $C' = C[u_1, u_{\alpha-1}]$ 和 $C'' = C[u_\alpha, u_0]$。我们将讨论分为 $|C| \leq n-3$ 和 $|C| = n-2$ 的情况。

情况 1$|C| \leq n-3$，然后 $|R| \geq 3$。我们进一步将这种情况分为两种，根据是否可以选择 P 使得 $V(R)\backslash V(P) \neq \emptyset$。

情形 1.1 存在一个绕行路径 P，其具有最小的差距和 $|V(R)\backslash V(P)| \geq 1$。

在这种情况下，我们有 $\alpha \geq 2$，因为如果 $\alpha = 1$，则可以将 P 插入到 C 中以形成一个更长的非哈密顿回路（因为 $|V(R)\backslash V(P)| \geq 1$），这与选择 C 相矛盾。并且根据 $\alpha \geq 2$，C' 至少包含一个顶点 u_1。

由于 P 与 C 的差距最小，x_1 不能与 C' 上的任何顶点 u_β 相邻，并且在 $V(R)\backslash\{x_1\}$ 中不存在任何顶点 w 使得 $x_1 \to w \to u_\beta$ 或 $u_\beta \to w \to x_1$ 成立，因此我们有

$$d_{C'}(x_1) + d_{C'}(u_\beta) \leq 2(|C'|-1), \tag{4}$$

和

$$d_R(x_1) + d_R(u_\beta) \leq 2(|R|-1) = 2(n-k-1), \tag{5}$$

由于 C 是最长的非哈密顿循环，包含 $|C| \leq n-3$，x_1 不能插入到 C'' 中，根据引理 3.2(a)，

$$d_{C''}(x_1) \leq |C''| + 1 \tag{6}$$

现在我们证明对于任意的 u_γ 在 C' 上，使得 $u_0 \to u_\gamma$（至少存在一个这样的 u_γ，即 u_1），

$$d_{C''}(u_\gamma) \geq |C''| + 3. \tag{7}$$

x_1 和 u_γ 不相邻且都受 u_0 控制这一事实意味着 $d(x_1), d(u_\gamma) \geq n$。将 β 代入（4）和（5）中的 γ，结合（6），我们得到

$$\begin{aligned} 2n &\leq d(x_1) + d(u_\gamma) \\ &= d_R(x_1) + d_R(u_\gamma) + d_{C'}(x_1) + d_{C'}(u_\gamma) + d_{C''}(x_1) + d_{C''}(u_\gamma) \\ &\leq 2n - |C''| - 3 + d_{C''}(u_\gamma) \end{aligned} \tag{8}$$

这表明（7）。

注意 $u_0 \to u_1$，因此 $d_{C''}(u_1) \geq |C''| + 3$，从而 u_1 可以插入到 C'' 中。如果 C' 可以多插入到 C'' 中，那么根据引理 3.1，我们得到一个包含 $V(Q) = V(C) \cup V(P)$ 的循环 Q，由于 $|V(R) \backslash V(P)| \geq 1$，$Q$ 是非哈密顿的但比 C 长，这与我们对 C 做出的假设相矛盾。因此 C' 不能被多插入到 C'' 中。

由于 u_1 可以插入到 C'' 中，因此必须存在一个 $\eta \in \{2, \ldots, \alpha - 1\}$，使得 $C[u_1, u_{\eta-1}]$ 可以多处插入到 C'' 中，但 $C[u_1, u_\eta]$ 不能。特别地，由引理 3.1，u_η 不能插入到 C'' 中。然后由 (7)，$u_0 \nrightarrow u_\eta$，再由引理 3.2(a)，$d_{C''}(u_\eta) \leq |C''|$。结合 (4)，(5) 和 (6) 我们有 $d(x_1) + d(u_\eta) \leq 2n - 3$，但我们已经有了 $x_1 \geq n$，所以

$$d(u_\eta) \leq n - 3. \tag{9}$$

根据多插入的定义，存在 u_j 在 $C[u_1, u_{\eta-1}]$ 和 u_i 在 $C[u_\alpha, u_{k-1}]$ 使得 $u_i \to u_j$ 和 $u_{\eta-1} \to u_{i+1}$。现在 u_η 和 u_{i+1} 都受到 $u_{\eta-1}$ 的支配，根据 (9) 和定理的条件，它们必须相邻。如果 $u_\eta \to u_{i+1}$，那么 $C[u_1, u_\eta]$ 可以插入到 C'' 中，这与我们的假设相矛盾。因此 $u_{i+1} \to u_\eta$。考虑 u_η 和 u_{i+2}，通过类比论证我们得出 $u_{i+2} \to u_\eta$。继续这一过程，我们最终得出 $u_0 \to u_\eta$，这与上述关于 $u_0 \nrightarrow u_\eta$ 的论证相矛盾，并完成对情形 1.1 的证明。

情况 1.2 对于每个具有最小间隙的旁路 P，$V(R) \backslash V(P) = \emptyset$。

在这种情况下，有可能 $\alpha = 1$ 意味着 C' 为空，因为将 P 插入 C 中会形成一个哈密顿圈，这不会导致类似于 1.1 情况中的任何矛盾。现在我们首先假设 $\alpha \geq 2$，然后是 $|C'| \geq 1$ 和 $|C''| \leq k - 1$。

让我们估计 x_1 的度数。由于 P 具有最小差距，x_1 不与 C' 上的任何顶点相邻。如果 $x_1 \to x_i$ 和 $3 \leq i \leq l$，那么我们得到一个最小间隙 $P' = x_0 x_1 P[x_i, x_l]$ 和 $|V(R) \backslash V(P')| \geq 1$，这与本情况的假设相矛盾。因此对于 $3 \leq i \leq l$ 有 $x_1 \nrightarrow x_i$。因此

$$d_R(x_1) \leq 2 + |R| - 2 = |R| = n - k. \tag{10}$$

由于 C 是最长的非哈密顿循环，且 $|C| \leq n - 3$，x_1 不能插入到 C 中，特别是 x_1 不能插入到 $C'' = C[u_\alpha, u_0]$ 中。注意，$x_1 \nrightarrow x_l = u_\alpha$，由引理 3.2(a)，

$$d_{C''}(x_1) \leq |C''|. \tag{11}$$

由 (10) 和 (11)，我们得到以下矛盾。

$$n \leq d(x_1) = d_R(x_1) + d_{C''}(x_1) + d_{C'}(x_1) \leq n - k + |C''| + 0 \leq n - k + k - 1 = n - 1. \tag{12}$$

现在我们必须有 $\alpha = 1$，因此 $x_l = u_1$。

考虑 x_1 的次数。x_1 由 $x_0 = u_0$ 支配，其位于 C 上，然而 x_1 不能被 u_{k-1} 支配，否则我们将得到一个 $(n-1)$-循环 $P[x_1, u_1]C[u_1, u_{k-1}]x_1$。因此既不是 $x_1 \to C$ 也不是 $C \to x_1$。由引理 3.4，$d(x_1) \geq n$。

由于 x_1 不能插入到 C 中，根据引理 3.2(b)，得到 $d_C(x_1) \le |C|$。如果对于任意的 $3 \le i \le l$ 均有 $x_1 \to x_i$，则会存在一个具有最小间隙但不包含 R 中所有顶点的旁路，这与该情况的假设相矛盾。因此 $d_R(x_1) \le |R|-1+1 = |R|$. 所以 $n \le d(x_1) = d_C(x_1)+d_R(x_1) \le |C|+|R| = n$ 并且所有等式都必须成立，特别是 $d_C(x_1) = |C|$。

由于 $u_0 \to x_1$，$u_{k-1} \nrightarrow x_1$ 和 $d_C(x_1) = |C|$，存在一些从 x_1 到 C 的弧。进一步由于 x_1 不能插入到 C, $x_1 \nrightarrow u_1$。设 j 是那个 $x_1 \to u_j$ 但是对所有 $1 \le i \le j-1$ 都有 $x_1 \nrightarrow u_i$。然后 $j \ge 2$. 由于 x_1 不能插入到 C，$u_{j-1} \nrightarrow x_1$ 和 u_{j-1} 不与 x_1 相邻。现在令 $0 \le r \le j-1$ 为那个 $u_r \to x_1$，但 u_i 不与 x_1 相邻对于所有的 $r+1 \le i \le j-1$。然后，$u_r x_1 u_j$ 是一个具有至少长度为 2 的缺口的旁路，其中 x_1 不与该缺口的内部顶点相邻。

如果 $j = r+2$, 考虑 x_1 和 u_{r+1} 的度数和。它们受 u_r 控制且不相邻，因此 $d(x_1), d(u_{r+1}) \ge n$。由于 $|R| \ge 3$，对于每一个 $w \in R \backslash x_1$，我们不能有 $x_1 \to w \to u_{r+1}$ 或 $u_{r+1} \to w \to x_1$，或者有一个较小间隙的旁路，这与 P 的选择矛盾。因此 $d_R(x_1)+d_R(u_{r+1}) \le 2(|R|-1)$。注意，$C[u_{r+2}, u_r]x_1u_{r+2}$ 是另一个最长的非哈密顿循环，因此不能将 u_{r+1} 插入此循环中，特别是不能将 u_{r+1} 插入路径 $Q = C[u_{r+2}, u_r]$ 中。由引理 3.2(a)，$d_C(u_{r+1}) = d_Q(u_{r+1}) \le |Q|+1 = k$。结合 $d_C(x_1) = |C|$，我们有 $d(x_1)+d(u_{r+1}) \le d_R(x_1)+d_R(u_{r+1})+d_C(x_1)+d_C(u_{r+1}) \le 2(|R|-1)+2k = 2n-2$，这与 $d(x_1), d(u_{r+1}) \ge n$ 矛盾。

因此 $j \ge r+3$。然而，在这种情况下我们将有 $d(x_1) \le n-1$，这是矛盾的。设 $Q = C[u_j, u_r]$, x_1 不能插入到 Q 中，因此根据引理 3.2(a)，$d_C(x_1) = d_Q(x_1) \le |Q|+1 = k-(j-r-1)+1 \le k-1$。因此 $d(x_1) = d_C(x_1)+d_R(x_1) \le |R|+k-1 = n-1$，这导致矛盾，完成了情形 1.2 的证明。

情况 2$|C| = n-2$，从而 $|R| = 2$。

在这种情况下我们应用引理 3.3。现在，对于 $C = u_0u_1 \dots u_{n-3}u_0$ 我们表示不在 C 中的顶点为 v_0 和 v_1。

我们证明了 $d(v_0) \ge n$ 和 $d(v_1) \ge n$。假设相反，其中至少一个不成立，比如说 $d(v_0) \le n-1$。

如果 v_0 不与 C 上的任何顶点相邻，则由 D,$v_0 \to v_1$,$v_1 \to v_0$ 和 v_1 的强性可知，它们被 C 上的某个顶点支配并且也支配该顶点。但然后 v_0 包含在一个不相邻的支配对中，因此 $d(v_0) \ge n$，这与假设 $d(v_0) \le n-1$ 矛盾。因此，v_0 与 C 上的一些顶点相邻。

由引理 3.4, $v_0 \to C$ 或 $C \to v_0$。不失一般性假设 $v_0 \to C$。由 D 的强性，必存在一个 $0 \le j \le k-3$ 使得 $u_j \to v_1 \to v_0$。但然后我们有一个 $(n-1)$-循环 $v_0u_{j-2}Cu_jv_1v_0$，这是矛盾的。因此 $d(v_0) \ge n$，类似地 $d(v_1) \ge n$。

现在，C、v_0 和 v_1 满足引理 3.3 (a) 的条件，根据 (a) 的结论，n 是偶数，并且我们可以假设 v_0 支配并被精确地由 $u_1, u_3, \dots, u_{n-3}$ 支配，以及 v_1 支配并被精确地由 $u_0, u_2, \dots, u_{n-4}$ 支配。然后 u_2 和 v_0 不相邻且都受 u_1 控制，因此是 $d(u_2) \ge n$，同样地，$d(u_i) \ge n$ 对于 $0 \le i \le n-3$ 也是如此。所以我们有 $\delta(D) \ge n$，并且引理 3.3(b) 的条件得到满足，那么我们得出结论 D 同构于 $\overleftrightarrow{K}_{n/2,n/2}$，从而完成第二情况和定理的证明。

参考文献

[1] Bang-Jensen, J., & Gutin, G. Z. (2008). Digraphs: theory, algorithms and applications. Springer Science & Business Media.

[2] Bang-Jensen, J., Gutin, G., & Li, H. (1996). Sufficient conditions for a digraph to be Hamiltonian. Journal of Graph Theory, 22(2), 181–187.

[3] Bang-Jensen, J., Huang, J., & Prisner, E. (1993). In-tournament digraphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 59(2), 267–287.

[4] Bondy, J. A. (1973). Pancyclic graphs: recent results, Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdos on his 60th birthday), Vol. I, 181–187. In Colloq. Math. Soc. János Bolyai (Vol. 10).

[5] Darbinyan, S. K., & Karapetyan, I. A. (2017). On longest non-Hamiltonian cycles in digraphs with the conditions of Bang-Jensen, Gutin and Li. Discrete Applied Mathematics, 216, 537–549.

[6] Fan, G. H. (1984). New sufficient conditions for cycles in graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 37(3), 221–227.

[7] Guo, Y. (1995). Locally semicomplete digraphs. Verlag der Augustinus-Buchhandlung.

[8] Häggkvist, R., & Thomassen, C. (1976). On pancyclic digraphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 20(1), 20–40.

[9] Overbeck-Larisch, M. (1977). A theorem on pancyclic oriented graphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 23(2–3), 168–173.