

# 关于量子魏尔兰德不等式的一个注记

Owen Ekblad<sup>✉\*</sup>

Michigan State University, Department of Mathematics

## Abstract

在这篇笔记中, 我们展示了如何将 Rahaman 引入的算子代数方法扩展, 以证明任何原始 Schwarz 映射的本原性指标最多为  $2(D-1)^2$ , 其中  $D$  是底层矩阵代数的维数。这个不等式最初由 Rahaman 对既是单位也是保迹的 Schwarz 映射进行了证明。我们在此展示了原始 Schwarz 映射的单位假设是自动成立的 (在归一化意义下), 但一般来说, 并非所有原始单位 Schwarz 映射都是保迹的。因此, 这篇笔记的具体目的是展示如何将 Rahaman 的证明应用于任意原始 Schwarz 映射。作为该定理的一个推论, 我们展示了任何原始 2-正映射的本原性指标最多为  $2(D-1)^2$ , 因此这个界也适用于任意原始完全正映射。我们简要讨论了这与 Perez-Garcia、Verstraete、Wolf 和 Cirac 关于矩阵乘积态的父哈密顿量性质的一个猜想的关系。

**关键词** 魏兰德界, 正映射, 原始映射, 乘法域。

**致谢** 作者在部分得到杰弗里·申克教授的研究助理职位资助, 以及美国国家科学基金会拨款编号 DMS-2153946 资助的情况下完成了这项工作。

## 1 介绍

量子威兰德不等式多年来在各种背景下被隐含和明确地研究过, 但在最近几年受到了更多关注 [5, 7, 4], 这在很大程度上归功于 Perez-Garcia、Verstraete、Wolf 和 Cirac 关于矩阵乘积态 (MPS) 的工作 [6], 并自此被同时从其与 MPS 以及量子信息理论的关系方面进行研究 [8]。在这篇简短的笔记中, 我们证明了一般满足 Schwarz 不等式的原始映射的最优阶量子威兰德不等式 (定义如下), 没有任何额外假设。

令  $\mathbb{M}_D$  表示复数值条目  $D \times D$  矩阵的空间, 令  $\mathbb{P}_D$  表示正半定矩阵的集合, 令  $\mathbb{P}_D^\circ$  表示正定矩阵的集合, 令  $\mathbb{I} \in \mathbb{M}_D$  表示单位矩阵。我们称一个线性映射  $\phi : \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  为本原的, 如果存在  $n \in \mathbb{N}$  使得  $\phi^n(\mathbb{P}_D \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{P}_D^\circ$ , 我们说  $\phi$  是施瓦茨映射, 如果对所有  $a \in \mathbb{M}_D$  都有  $\phi(a^*a) \geq \phi(a)^*\phi(a)$ , 其中  $(\cdot)^*$  表示共轭转置, 并且我们说  $\phi$  是单位的, 如果  $\phi(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ 。对于原始映射  $\phi$ , 我们设  $q(\phi) = \min \{n \in \mathbb{N} : \phi^n(\mathbb{P}_D \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{P}_D^\circ\}$ , 并称  $q(\phi)$  为  $\phi$  的原始性指数。我们的主要定理如下。

---

\*ekbladow@msu.edu

**Theorem A.** 设  $\phi: \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  是一个原始的施瓦茨映射。则  $q(\phi) \leq 2(D-1)^2$ 。

这个界由 Rahaman 在 [7] 中假设  $\phi$  是一个保单位且保迹的 Schwarz 映射的情况下证明。如我们在下文所示 (命题 2.2), 假设原始 Schwarz 映射是单位的对于我们来说完全是人为设定的, 但存在许多不是保迹的单位 Schwarz 映射的例子。因此本文的主要目的是证明在 [7] 中假设保迹是没有必要的。

我们将定理 A 的下列推论作为一个定理陈述, 适用于一大类正映射。回忆一下, 线性映射  $\phi: \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  被称为 2-正的如果  $\phi \otimes \text{Id}_2: \mathbb{M}_D \otimes \mathbb{M}_2 \rightarrow \mathbb{M}_D \otimes \mathbb{M}_2$  是正的, 其中  $\text{Id}_2: \mathbb{M}_2 \rightarrow \mathbb{M}_2$  是恒等映射。

**Theorem B.** 令  $\phi: \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  为一个原始的 2-正映射。那么  $q(\phi) \leq 2(D-1)^2$ 。

请注意, 在定理 B 中没有要求  $\phi$  是单位或保持迹的。2-正映射的例子包括所有完全正映射, 因此定理 B 适用于任何完全正映射。并非所有的 2-正映射都是 Schwarz 映射, 然而, 简单的原因是所有的 Schwarz 映射都是收缩映射 [9, Ch. 2]。

我们的界限的阶确实是最佳的, 因为存在原始完全正映射  $\phi_D: \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$ , 对于这些映射  $q(\phi_D) = O(D^2)$  [8] 成立。一般来说, 我们不知道这个不等式是否是严格的, 尽管考虑到上述界与最优的经典 Wielandt 不等式—即  $(D-1)^2 + 1$  [10]—之间的相似性, 询问我们的界限中的乘法因子 2 是否可以降低似乎是有意义的。

## 2 施瓦茨映射

让我们从一些符号和 Schwarz 映射的一般讨论开始。为了表示  $x \in \mathbb{P}_D$ , 写成  $x \geq 0$ , 为了表示  $x \in \mathbb{P}_D^\circ$ , 写成  $x > 0$ 。令  $a^*$  表示矩阵  $a \in \mathbb{M}_D$  的共轭转置。称  $p \in \mathbb{M}_D$  为投影如果  $p \in \mathbb{P}_D$  和  $p^2 = p$ 。对于两个投影  $p, q \in \mathbb{M}_D$ , 写作  $p \sim q$  如果  $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(q)$ 。令  $\mathbb{I} \in \mathbb{M}_D$  表示单位。对于  $z > 0$ , 令  $\langle \cdot, \cdot \rangle_z$  表示在  $\mathbb{M}_D$  上由

$$\langle a, b \rangle_z := \text{Tr}(za^*b), \quad (2.1)$$

定义的内积, 其中  $\text{Tr}$  表示通常的迹。因为  $z > 0$ , 这是一个非退化的内积, 使得  $\mathbb{M}_D$  成为一个希尔伯特空间。在  $z = \mathbb{I}$  的情况下, 简单地写成  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{I}}$ 。对于  $\phi: \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  线性, 设  $\phi^*: \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  表示唯一的线性映射使得对于所有  $a, b \in \mathbb{M}_D$  都有  $\langle \phi(a), b \rangle = \langle a, \phi^*(b) \rangle$ 。

回顾映射  $\mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  的一些基本概念。

**Definition 1.** 令  $\mathcal{L}_D$  表示线性映射集合  $\phi: \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$ , 并令  $\text{Id}_D \in \mathcal{L}_D$  表示恒等算子。固定  $\phi \in \mathcal{L}_D$ 。

- $\phi$  称为正的如果  $\phi(\mathbb{P}_D) \subseteq \mathbb{P}_D$ 。
- $\phi$  称为完全正的如果存在一个有限集合  $\{v_i\}_{i=1}^g \subseteq \mathbb{M}_D$ , 使得对所有  $a \in \mathbb{M}_D$ ,  $\phi(a) = \sum_{i=1}^g v_i a v_i^*$  成立。
- $\phi$  被称为施瓦茨映射如果对于所有  $a \in \mathbb{M}_D$ ,  $\phi(a^*a) \geq \phi(a)^* \phi(a)$  成立。一般来说, 称方程  $\phi(a^*a) \geq \phi(a)^* \phi(a)$  为施瓦茨不等式。

- $\phi$  称为单位的如果  $\phi(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ 。
- $\phi$  被称为是严格正数如果  $\phi(\mathbb{P}_D \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{P}_D^\circ$ 。
- $\phi$  被称为原始的如果存在  $n \in \mathbb{N}$  使得  $\phi^n$  严格为正。
- $\phi$  被称为是不可约的如果对于所有的投影  $p \in \mathbb{M}_D$ , 如果存在  $\lambda > 0$  使得  $\phi(p) \leq \lambda p$ , 我们有  $p \in \{0, 1\}$ 。
- $\phi$  被称为是完全不可约如果对于所有投影  $p, q \in \mathbb{M}_D$  满足  $p \sim q$ , 如果存在  $\lambda > 0$  使得  $\phi(p) \leq \lambda q$ , 我们有  $q, p \in \{0, 1\}$ 。

显然, 任何原始正映射也是不可约的。回忆一下, 对于任何不可约的正映射  $\phi \in \mathcal{L}_D$ , 存在唯一的  $z > 0$  满足  $\text{Tr}(z) = 1$  条件, 使得  $\phi^n(z) = rz$ , 其中  $r > 0$  是  $\phi$  [2] 的谱半径。我们称这个  $z$  为 Perron-Frobenius 特征向量对于  $\phi$ 。以下事实是众所周知的, 但我们为了完整性提供了一个证明概要。

**Lemma 2.1.** 假设  $\phi: \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  是一个单态原始 Schwarz 映射。令  $\varrho$  表示  $\phi^*$  的 Perron-Frobenius 特征向量。那么对于所有的  $a \in \mathbb{M}_D$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(a) = \langle \varrho, a \rangle \mathbb{I}$ 。

*Proof.* 通过将  $\phi$  视为  $\mathbb{M}_{D^2}$  的一个元素并将其分解为其 Jordan 标准型, 然后, 由于原始性,  $\lambda = 1$  是  $\phi$  唯一具有  $|\lambda| = 1$  [2] 的特征值, 显然存在某个  $c \in \mathbb{C}$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(a) = c\mathbb{I}$  成立。另一方面, 取 Cesà 罗平均并注意到  $\phi^*(\varrho) = \varrho$ , 我们看到

$$c = \langle \varrho, c\mathbb{I} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle \varrho, \phi^n(a) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle \varrho, a \rangle = \langle \varrho, a \rangle, \quad (2.2)$$

这完成了证明。 ■

请注意, 我们并没有要求我们的 Schwarz 映射是么正的。在文献中, 如果一个映射  $\phi \in \mathcal{L}_D$  满足对于所有  $a \in \mathbb{M}_D$  的 Schwarz 不等式以及么正性, 则通常称之为 Schwarz 映射。我们的第一个目标是证明在这个假设下, 么正性的假定在我们的情况下是人为的, 只要进行归一化即可。

**Proposition 2.2.** Perron-Frobenius 特征向量的一个原始 Schwarz 映射  $\phi \in \mathcal{L}_D$  是  $D^{-1}\mathbb{I}$ 。

*Proof.* 令  $\phi \in \mathcal{L}_D$  是一个原始的施瓦茨映射, 令  $r$  表示  $\phi$  的谱半径。首先假设  $r = 1$  成立。令  $z$  是  $\phi^*$  的 Perron-Frobenius 特征向量。然后, 由于  $\phi^*(z) = z$  的谱半径与  $\phi$  和  $\phi^*$  的谱半径相等。通过原始性, 存在  $n \in \mathbb{N}$  使得  $\phi^n(\mathbb{I}) = x > 0$ 。因为  $\phi^n$  是 Schwarz 映射, 我们有  $x = \phi^n(\mathbb{I}) \geq \phi^n(\mathbb{I})^2$ 。迭代这个过程并利用  $y \mapsto y^{1/2}$  是一个算子单调函数的事实, 我们看到

$$x^{1/2^m} \geq \phi^n(\mathbb{I}) \quad (2.3)$$

对于所有的  $m \in \mathbb{N}$ 。取极限为  $m \rightarrow \infty$ , 并利用  $x > 0$  的事实, 我们得出结论  $\mathbb{I} \geq \phi^n(\mathbb{I})$ 。因此,

$$\langle z, \mathbb{I} - \phi^n(\mathbb{I}) \rangle = \langle z, \mathbb{I} \rangle - \langle (\phi^*)^n(z), \mathbb{I} \rangle = \langle z, \mathbb{I} \rangle - \langle z, \mathbb{I} \rangle = 0, \quad (2.4)$$

从而  $\phi^n(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ 。由于  $\phi$  的本原性, 这表明  $D^{-1}\mathbb{I}$  是  $\phi$  的 Perron-Frobenius 特征向量, 并且在  $r = 1$  的情况下完成了证明。在  $r \neq 1$  的情况下, 只需注意到  $\phi_r = r^{-1}\phi$  是一个具有谱半径为 1 的原始施瓦茨映射, 因此  $\phi_r$  的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量是  $D^{-1}\mathbb{I}$ , 从而得到  $\phi(D^{-1}\mathbb{I}) = rD^{-1}\mathbb{I}$ 。 ■

### 3 二次阶界对原始性指数的限制

现在, 对于原始映射  $\phi \in \mathcal{L}_D$ , 定义

$$q(\phi) = \min \{k \in \mathbb{N} : \phi^k \text{ is strictly positive}\}. \quad (3.1)$$

我们将  $q(\phi)$  称为本原性指数的  $\phi$ 。在这项工作中, 我们对计算  $q(\phi)$  在  $\phi \in \mathcal{L}_D$  是原始单位 Schwarz 映射情况下的界感兴趣。对于一个单位 Schwarz 映射  $\phi$ , 它满足 [9, Ch. 2]

$$\begin{aligned} \{a \in \mathbb{M}_D : \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \text{ and } \phi(ba) = \phi(b)\phi(a) \text{ for all } b \in \mathbb{M}_D\} \\ = \{a \in \mathbb{M}_D : \phi(a^*a) = \phi(a)^*\phi(a) \text{ and } \phi(aa^*) = \phi(a)\phi(a)^*\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

我们将上述集合 (这是一个冯·诺伊曼代数) 记为  $\mathcal{M}_\phi$ , 并称  $\mathcal{M}_\phi$  为  $\phi$  的乘法域。当  $\phi$  是本原时, 我们可以给出  $\mathcal{M}_\phi$  的另一种描述。

**Lemma 3.1.** 令  $\phi \in \mathcal{L}_D$  为一个原始的单体 Schwarz 映射, 令  $\varrho \in \mathbb{P}_D^\circ$  为  $\phi^*$  的 Perron-Frobenius 特征向量。对于所有  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{M}_{\phi^n} = \left\{a \in \mathbb{M}_D : \langle a, a \rangle_\varrho = \langle \phi^n(a), \phi^n(a) \rangle_\varrho \text{ and } \langle a^*, a^* \rangle_\varrho = \langle \phi^n(a)^*, \phi^n(a)^* \rangle_\varrho\right\}. \quad (3.3)$$

*Proof.* 如果  $a \in \mathcal{M}_{\phi^n}$ , 则  $\phi^n(a^*a) = \phi^n(a)^*\phi^n(a)$ 。因为  $\phi^*(\varrho) = \varrho$ , 我们有

$$\langle a, a \rangle_\varrho = \text{Tr}(\varrho a^*a) = \text{Tr}((\phi^n)^*(\varrho) a^*a) = \text{Tr}(\varrho \phi^n(a^*a)) \quad (3.4)$$

$$= \text{Tr}(\varrho \phi^n(a)^*\phi^n(a)) = \langle \phi^n(a), \phi^n(a) \rangle_\varrho. \quad (3.5)$$

同样地论证, 将  $a$  替换为  $a^*$ , 我们可以看到  $\langle a^*, a^* \rangle_\varrho = \langle \phi^n(a)^*, \phi^n(a)^* \rangle_\varrho$ 。反之, 假设  $a \in \mathbb{M}_D$  满足  $\langle a, a \rangle_\varrho = \langle \phi^n(a), \phi^n(a) \rangle_\varrho$ 。通过施瓦茨不等式应用于  $\phi^n$ , 我们有

$$\varrho^{1/2} \phi^n(a^*a) \varrho^{1/2} \geq \varrho^{1/2} \phi^n(a)^* \phi^n(a) \varrho^{1/2} \geq 0. \quad (3.6)$$

因此, 因为  $\varrho > 0$ , 取这个等式的迹并使用事实  $\langle a, a \rangle_\varrho = \langle \phi^n(a), \phi^n(a) \rangle_\varrho$ , 我们得出结论  $\phi^n(a^*a) = \phi^n(a)^*\phi^n(a)$ 。将  $a$  替换为  $a^*$  可以得出  $\phi^n(aa^*) = \phi^n(a)\phi^n(a)^*$ , 从而完成证明。■

作为推论, 我们得到以下结果。

**Corollary 3.2.** 令  $\phi \in \mathcal{L}_D$  为一个原始单体 Schwarz 映射。对于所有的  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{M}_{\phi^{n+1}} \subseteq \mathcal{M}_{\phi^n}$ 。

*Proof.* 令  $\varrho$  为  $\phi^*$  的 Perron-Frobenius 特征向量。一般地, 由 Schwarz 不等式, 我们有

$$\varrho^{1/2} \phi^{n+1}(a^*a) \varrho^{1/2} \geq \varrho^{1/2} \phi(\phi^n(a)^*\phi^n(a)) \varrho^{1/2} \geq \varrho^{1/2} \phi^{n+1}(a)^* \phi^{n+1}(a) \varrho^{1/2} \quad (3.7)$$

对于所有  $a \in \mathbb{M}_D$ 。因此, 如果  $a \in \mathcal{M}_{\phi^{n+1}}$ , 则引理 3.1, 事实  $\phi^*(\varrho) = \varrho$ , 以及上述一连串不等式给出

$$\langle \phi^{n+1}(a), \phi^{n+1}(a) \rangle_\varrho = \langle a, a \rangle_\varrho \geq \langle \phi^n(a), \phi^n(a) \rangle_\varrho \geq \langle \phi^{n+1}(a), \phi^{n+1}(a) \rangle_\varrho. \quad (3.8)$$

因此,  $\langle \phi^n(a), \phi^n(a) \rangle_\varrho = \langle a, a \rangle_\varrho$ 。通过用  $a^*$  替换  $a$  进行同样的论证, 我们得到  $\langle \phi^n(a)^*, \phi^n(a)^* \rangle_\varrho = \langle a^*, a^* \rangle_\varrho$ , 从而得出  $a \in \mathcal{M}_{\phi^n}$ 。■

由  $\mathbb{M}_D$  的有限维性和上述推论, 存在某个  $k \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{\phi^n} = \mathcal{M}_{\phi^k}. \quad (3.9)$$

设  $\kappa(\phi)$  为这样的最小的  $k$ , 并记  $\mathcal{M}_{\phi}^{\infty}$  表示  $\mathcal{M}_{\phi^{\kappa(\phi)}}$ 。

**Lemma 3.3.** 对于原始单位 Schwarz 映射  $\phi \in \mathcal{L}_D$ ,  $\mathcal{M}_{\phi}^{\infty} = \mathbb{C}\mathbb{I}$ 。

*Proof.* 设  $\varrho$  为  $\phi^*$  的 Perron-Frobenius 特征向量。因为  $\mathcal{M}_{\phi}^{\infty}$  是一个冯·诺伊曼代数, 它是其投影的闭包张量, 所以只需证明如果  $p \in \mathcal{M}_{\phi}^{\infty}$  是一个投影, 则  $p \in \{0, \mathbb{I}\}$ 。对于投影  $p \in \mathcal{M}_{\phi}^{\infty}$ , 我们知道

$$\mathrm{Tr}(\varrho p) = \langle p, p \rangle_{\varrho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \phi^n(p), \phi^n(p) \rangle_{\varrho} = \mathrm{Tr}(\varrho p)^2, \quad (3.10)$$

这是从引理 2.1 得出的。因此,  $\mathrm{Tr}(\varrho p) \in \{0, 1\}$ 。因为  $\varrho > 0$  和  $\mathrm{Tr}(\varrho) = 1$ , 这意味着  $p \in \{0, \mathbb{I}\}$ , 这完成了证明。■

**Corollary 3.4.** 对于任何原始的单体 Schwarz 映射  $\phi \in \mathcal{L}_D$ ,  $\phi^{\kappa(\phi)}$  是完全不可约的。

*Proof.* 令  $\varrho$  为  $\phi^*$  的 Perron-Frobenius 特征向量。令  $p, q \in \mathbb{M}_D$  为带有  $p \sim q$  的投影, 并假设存在  $\lambda > 0$  使得  $\phi^{\kappa(\phi)}(p) \leq \lambda q$ 。由 [7, Proposition 3.3] 可知, 这表明  $\phi^{\kappa(\phi)}(p) \leq q$ 。因此, 从  $\varrho > 0$  和  $\phi^*(\varrho) = \varrho$ , 我们发现  $0 \leq \varrho^{1/2} \phi^{\kappa(\phi)}(p) \varrho^{1/2} \leq \varrho^{1/2} q \varrho^{1/2}$ , 所以取迹并使用  $\varrho > 0$ , 我们得出  $\phi^{\kappa(\phi)}(p) = q$ 。因此,  $\phi^{\kappa(\phi)}(p)$  是一个投影。但是使用  $\phi^*(\varrho) = \varrho$ , 我们发现

$$\langle p, p \rangle_{\varrho} = \langle \phi^{\kappa(\phi)}(p), \phi^{\kappa(\phi)}(p) \rangle_{\varrho}, \quad (3.11)$$

因此  $p \in \mathcal{M}_{\phi}^{\infty}$ 。由引理 3.3, 这表明  $p \in \{0, \mathbb{I}\}$ , 并且因此也表明  $q = \phi(p) \in \{0, \mathbb{I}\}$ 。■

**Corollary 3.5.** 对于任何原始的单体 Schwarz 映射  $\phi \in \mathcal{L}_D$  和投影  $p$ , 其中  $p \notin \{0, \mathbb{I}\}$ , 我们有  $\mathrm{rank}(\phi^{\kappa(\phi)}(p)) > \mathrm{rank}(p)$ 。

*Proof.* 论证类似于 [7, Theorem III.7], 但为了完整性我们在此重复。对于任意投影  $p \in \mathbb{P}_D$ , 施瓦茨不等式给出  $\phi^{\kappa(\phi)}(p) \geq \phi^{\kappa(\phi)}(p)^2$ 。因为  $x \mapsto x^{1/2}$  是一个算子单增函数, 这给出了

$$\phi^{\kappa(\phi)}(p)^{1/2^n} \geq \phi^{\kappa(\phi)}(p) \quad (3.12)$$

对于所有的  $n$ 。令  $q$  表示  $\phi^{\kappa(\phi)}(p)$  的值域投影, 在上述不等式中取  $n$  的极限可得  $q \geq \phi^{\kappa(\phi)}(p)$ 。由推论 3.4 可知必须是  $\mathrm{Tr}(q) > \mathrm{Tr}(p)$ , 否则  $p \sim q$  因此  $p \in \{0, \mathbb{I}\}$  由于  $\phi^{\kappa(\phi)}$  的完全不可约性。但我们假设了  $p \notin \{0, \mathbb{I}\}$ , 所以确实有  $\mathrm{Tr}(q) > \mathrm{Tr}(p)$ , 即  $\mathrm{rank}(\phi^{\kappa(\phi)}(p)) > \mathrm{rank}(p)$ 。■

**Corollary 3.6.** 对于原始的单一位施瓦茨映射  $\phi \in \mathcal{L}_D$ ,  $q(\phi) \leq (D-1)\kappa(\phi)$ 。

*Proof.* 我们证明  $\phi^{(D-1)\kappa(\phi)}$  严格为正。为此, 根据谱定理, 只需证明对任意秩一投影  $p$ , 有  $\phi^{(D-1)\kappa(\phi)}(p) > 0$ 。这又由推论 3.5 推出, 其意味着

$$\mathrm{rank}(\phi^{(D-1)\kappa(\phi)}(p)) \geq \mathrm{rank}(p) + D - 1 = D, \quad (3.13)$$

完成证明。■

在我们能够证明我们的主要结果之前，我们需要一个最终的技术引理。

**Lemma 3.7.** 对于任何原始单位 Schwarz 映射和  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{M}_{\phi^n} = \mathcal{M}_{\phi^{n+1}}$  当且仅当  $n \geq \kappa(\phi)$ 。

*Proof.* 令  $\varrho$  为  $\phi^*$  的 Perron-Frobenius 特征向量。反方向是显然的，所以我们只需要证明前一个方向。为了证明这一点，反过来，根据引理 3.3，我们只需证明如果对于某个  $n \in \mathbb{N}$  我们有  $\mathcal{M}_{\phi^n} = \mathcal{M}_{\phi^{n+1}}$ ，则  $\mathcal{M}_{\phi^n} = \mathbb{C}\mathbb{I}$ 。为了做到这一点，注意到如果  $\mathcal{M}_{\phi^n} = \mathcal{M}_{\phi^{n+1}}$ ，我们有  $\phi(\mathcal{M}_{\phi^n}) \subseteq \mathcal{M}_{\phi^n}$ 。确实，由引理 3.1 和推论 3.2，

$$\langle \phi^n(\phi(a)), \phi^n(\phi(a)) \rangle_\varrho = \langle \phi^{n+1}(a), \phi^{n+1}(a) \rangle_\varrho = \langle a, a \rangle_\varrho = \langle \phi(a), \phi(a) \rangle_\varrho, \quad (3.14)$$

所以再次由引理 3.1 我们有  $\phi(a) \in \mathcal{M}_{\phi^n}$ 。然而，我们还知道从引理 3.1 以及事实  $\varrho > 0$  可知  $\phi|_{\mathcal{M}_{\phi^n}}$  是单射的，因此  $\phi(\mathcal{M}_{\phi^n}) = \mathcal{M}_{\phi^n}$ ，并且  $\phi|_{\mathcal{M}_{\phi^n}}$  是可逆的。定义  $\phi_\varrho^* \in \mathcal{L}_D$  由  $\phi_\varrho^*(a) := \phi^*(a\varrho)\varrho^{-1}$ 。然后很容易验证对于所有  $a, b \in \mathbb{M}_D$ ，都有  $\langle \phi(a), b \rangle_\varrho = \langle a, \phi_\varrho^*(b) \rangle_\varrho$ ，即  $\phi_\varrho^*$  是关于内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varrho$  的  $\phi$  的伴随。我们声称  $\phi_\varrho^*|_{\mathcal{M}_{\phi^n}} = \phi|_{\mathcal{M}_{\phi^n}}^{-1}$ 。确实，如果我们令  $\psi : \mathcal{M}_{\phi^n} \rightarrow \mathcal{M}_{\phi^n}$  表示  $\phi|_{\mathcal{M}_{\phi^n}}^{-1}$ ，则对于任意的  $a \in \mathcal{M}_{\phi^n}$  和  $c \in \mathbb{M}_D$  我们有

$$\langle c, \phi_\varrho^*(a) \rangle_\varrho = \langle \phi(c), a \rangle_\varrho = \langle \phi(c), \phi(\psi(a)) \rangle_\varrho = \text{Tr}(\varrho \phi(c) \phi(\psi(a))) \quad (3.15)$$

$$= \text{Tr}(\varrho \phi(c\psi(a))) \quad \psi(a) \in \mathcal{M}_{\phi^n} \subseteq \mathcal{M}_\phi \quad (3.16)$$

$$= \text{Tr}(\varrho c \psi(a)) \quad \phi^*(\varrho) = \varrho \quad (3.17)$$

$$= \langle c, \psi(a) \rangle_\varrho. \quad (3.18)$$

因此，由于  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varrho$  是一个非退化内积，我们可以得出结论  $\psi(a) = \phi_\varrho^*(a)$  对所有的  $a \in \mathcal{M}_{\phi^n}$  都成立。因此， $\phi : \mathcal{M}_{\phi^n} \rightarrow \mathcal{M}_{\phi^n}$  是关于非退化内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varrho$  的西映射。特别是对于任意的  $a \in \mathcal{M}_{\phi^n}$ ，我们有

$$\langle a, a \rangle_\varrho = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \phi^m(a), \phi^m(a) \rangle_\varrho. \quad (3.19)$$

像引理 3.3 中那样论证，我们可以得出  $\mathcal{M}_{\phi^n} = \mathbb{C}\mathbb{I}$ ，这结束了证明。■

我们现在可以证明定理 A。

定理的证明 A. 如果令  $r$  为  $\phi$  的谱半径，则显然有  $q(\phi) = q(r^{-1}\phi)$ ，因此根据命题 2.2 我们可以不妨假设  $\phi$  是单位元的。由推论 3.6，因此只需证明  $\kappa(\phi) \leq 2(D-1)$ 。由引理 3.7，我们知道  $\kappa(\phi)$  上界是单位  $C^*$ -子代数链的最大长度

$$\mathbb{M}_D \supseteq \mathcal{A}_1 \supsetneq \mathcal{A}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{A}_\ell = \mathbb{C}\mathbb{I}. \quad (3.20)$$

由 [3, Lemma 3.5]，我们知道这样的链的最大长度是  $2D-1$ 。然而，注意  $\mathcal{M}_\phi = \mathbb{M}_D$  表明  $\phi : \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  关于内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varrho$  是酉的，由引理 3.1 可知。因此，利用  $\phi$  是本原的事实，并像引理 3.3 中那样论证，我们得出  $\mathbb{M}_D = \mathcal{M}_\phi = \mathbb{C}\mathbb{I}$ ，这是荒谬的。因此，我们看到  $\kappa(\phi) \leq 2D-2$ ，这结束了证明。■

从此处开始，定理 B 的证明是常规的。

定理的证明 B. 令  $\phi : \mathbb{M}_D \rightarrow \mathbb{M}_D$  是任意一个 2-正本原映射, 并令  $z$  是  $\phi$  的 Perron-Frobenius 特征向量。定义  $\phi_z(a) = r^{-1} z^{-1/2} \phi(z^{1/2} a z^{1/2}) z^{-1/2}$ 。然后注意到对于  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\phi^n$  严格为正当且仅当  $\phi_z^n$  严格为正。事实上, 如果  $\phi^n$  严格为正, 则对于任意的  $x \in \mathbb{P}_D \setminus \{0\}$ , 我们有  $z^{1/2} x z^{1/2} \in \mathbb{P}_D \setminus \{0\}$ , 从而得到  $\phi^n(z^{1/2} x z^{1/2}) > 0$ 。因此, 由于  $z^{-1/2} > 0$  和  $r > 0$ , 我们得出结论  $\phi_z^n(x) > 0$ 。另一方面, 如果  $\phi_z^n$  是严格正的, 那么对于所有的  $x \in \mathbb{P}_D \setminus \{0\}$ , 我们有

$$\phi^n(x) = r^n z^{1/2} \phi_z^n(z^{-1/2} x z^{-1/2}) z^{1/2} > 0, \quad (3.21)$$

因此  $\phi^n$  是严格正的。因此,  $q(\phi) = q(\phi_z)$ 。但是由构造可知  $\phi_z(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ , 所以由于  $\phi_z$  是 2-正的 (作为两个正映射的复合), 根据 [1] 我们知道  $\phi_z$  是一个单位原始 Schwarz 映射。因此, 根据定理 A, 我们有  $q(\phi) = q(\phi_z) \leq 2(D-1)^2$ 。■

## 4 关系与 [6, Conjecture 2]

我们现在讨论我们的结果与 [6, Conjecture 2] 的关系, 现在我们回顾一下。对于矩阵集合  $S = \{v_{ij}\}_{i=1}^g \subset \mathbb{M}_D$ , 回顾  $S$  的维长定义:

$$\text{Wiel}(S) := \inf \{k \in \mathbb{N} : \text{span } S^k = \mathbb{M}_D\}, \quad (4.1)$$

其中  $S^k = \{v_\sigma\}_{\sigma \in \{1, \dots, g\}^k}$ , 其中对于  $\sigma = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, g\}^k$ ,  $v_\sigma := v_{i_k} \cdots v_{i_1}$ 。数  $\text{Wiel}(D)$  在物理上很有趣, 因为它与矩阵乘积态理论中的父哈密顿算子有关 [6]。猜想  $\text{Wiel}(D) \leq O(D^2)$ :

**Conjecture A** ([6, Conjecture 2]). 对于上述所有  $S \subseteq \mathbb{M}_D$ ,  $\text{Wiel}(S) \leq O(D^2)$ 。

一般来说, 已知  $\text{Wiel}(S) \geq q(\phi_S)$ , 其中这个不等式可能是严格的 [8]。这暗示了一种可能的方法, 说明如何使用定理 B 来证明这一猜想。定义

$$\text{Wiel}(D) = \max \{\text{Wiel}(S) : S \subseteq \mathbb{M}_D\} \quad \text{and} \quad q(D) = \max \{q(\phi) : \phi \in \mathcal{L}_D \text{ completely positive}\}, \quad (4.2)$$

其中的最大值通过 [8] 存在。据此, 我们可以对 [6, Conjecture 2] 进行如下修改。

**Conjecture B.**  $\text{Wiel}(D) \sim q(D)$ 。

从定理 B 可以看出这将意味着 [6, Conjecture 2]。一般来说, 猜想 B 提出了一个问题:  $\text{Wiel}(S)$  可能离  $q(\phi_S)$  多远? 这似乎是一个值得进一步研究的有趣方向。

## References

- [1] M.-D. Choi. “A Schwarz Inequality for Positive Linear Maps on C\*-Algebras”. In: *Illinois J. Math.* 18.4 (1974), pp. 565–574. DOI: <https://doi.org/10.1215/ijm/1256051007>.
- [2] D. E. Evans and R. Høegh-Krohn. “Spectral Properties of Positive Maps on C\*-Algebras”. In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-17.2 (1978), pp. 345–355. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.1112/jlms/s2-17.2.345>.

- [3] S. Jaques and M. Rahaman. “Spectral properties of tensor products of channels”. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 465.2 (Sept. 2018), pp. 1134–1158. ISSN: 0022247X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.05.052>.
- [4] Y. Jia and A. Capel. “A generic quantum Wielandt’s inequality”. In: *Quantum* 8 (May 2024), p. 1331. ISSN: 2521-327X. DOI: <https://doi.org/10.22331/q-2024-05-02-1331>.
- [5] M. Michałek and Y. Shitov. “Quantum Version of Wielandt’s Inequality Revisited”. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 65.8 (2019), pp. 5239–5242. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIT.2019.2897772>.
- [6] D. Perez-Garcia et al. “Matrix product state representations”. In: *Quantum Info. Comput.* 7.5 (July 2007), pp. 401–430. ISSN: 1533-7146.
- [7] M. Rahaman. “A New Bound on Quantum Wielandt Inequality”. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 66.1 (Jan. 2020), pp. 147–154. ISSN: 0018-9448. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIT.2019.2945776>.
- [8] M. Sanz et al. “A Quantum Version of Wielandt’s Inequality”. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 56.9 (Sept. 2010), pp. 4668–4673. ISSN: 0018-9448. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2054552>.
- [9] E. Størmer. *Positive Linear Maps of Operator Algebras*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-642-34368-1. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-34369-8>.
- [10] H. Wielandt. “Unzerlegbare, nicht negative Matrizen”. In: *Mathematische Zeitschrift* 52.1 (Dec. 1950), pp. 642–648. ISSN: 0025-5874. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02230720>.