

群体间的经济不平等在一个先验的分层社会中

Thiago Dias^a, Sebastián Gonçalves^b

^a Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Dois Vizinhos, Estrada para Boa Esperança, km 04, 85660-000, Dois Vizinhos PR, Brazil

^b Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Caixa Postal 15051, 91501-970 Porto Alegre RS, Brazil

Abstract

我们提出了一种基于代理的经济交换模型，该社会由两个群体组成，代表了两个不同的社会群体，并且对贫困代理人有不同的内部保护规则。目标是探讨当经济规则并非适用于所有个人时出现的财富分配情况。个体在没有潜在格子的情况下进行成对的财富交流。代理人的状态由其财富、风险厌恶因素和所属组别来表征。两个代理人之间交换的财富遵循一个公平原则：无论谁获胜，他们所投入的风险数量都是相同的。一个代理人可以与同一群体或另一群体中的另一个代理人互动，这种交互受控于模型的一个参数——交互率。跨群体交流遵循一个排他性保护规则，这可以被理解作为一种减少不平等的公共政策。我们展示了最受保护的组别积累了更多的财富，具有更少的不平等，并且比其他组别有更高的流动性。模拟结果与巴西按种族区分的收入分配进行了比较，作为应用我们的模型的一个实例。

Keywords:

1. 介绍

在分析不同经济体的财富或收入时，可以注意到一些相似之处。一个普遍特点是社会被划分为两个阶级。少数富裕阶级，其收入分布可以用帕累托幂律描述 [1, 2]，以及大多数人的收入分布可以通过吉布斯分布或对数正态函数拟合 [3]。大多数情况下，这些结果仅通过考虑个人的收入或财富来获得。

然而，社会还有其他形式来区分其个体。种族、性别和种族之间的不平等是分裂社会的例子，在这些社会中，属于特定亚群体的人拥有地位、权力和财富 [4, 5, 6]。确实，在许多社会中，统治阶级由与某一组相关的人组成，并且经济不平等可能与此非经济分类有关 [7, 8, 9, 10]。

巴西是种族和性别导致社会分层影响经济不平等的例子。根据巴西地理与统计研究院 (IBGE-2020) [11]，该国约 43% 的人口为白人，56% 自认为是非裔巴西人（由黑人和棕色人种组成的种族群体）。其余的 1% 是由黄种人和土著居民组成的。我们想指出的是，由于混血现象的存在，种族数据来自于个人申报。从 2018 年到 2020 年，白人的平均收入比非裔巴西人的平均收入高出 50%。在白人男性与黑人/棕色女性的收入差距甚至更大，超过 150%。

经济物理学领域已经证明非常有价值，其基于基本原理和成对财富交换的微观模型能够重现重要的经济实际数据 [12, 13, 14]。这些模型考虑了相互作用并部分交换财富的经济主体群体。在这种情况下，财富可以理解为用于某些商品或服务的钱 [15]。

*Corresponding author

Email addresses: thiagodias@utfpr.edu.br (Thiago Dias), sgonc@if.ufrgs.br (Sebastián Gonçalves)

虽然使用经济物理学方法进行的模拟和分析结果可以在所谓的“两类”状态下重现吉布斯分布和帕累托尾部，但据我们所知，没有一项研究区分了除经济特征之外的个体差异。

我们研究由两个社会群体组成的社会的经济，其中个体以其财富、储蓄倾向和所属群体为特征。群内和群间的交易遵循不同的规则。在下一节中，我们将详细描述该模型。

2. 两社会群体的动能交换模型

经济的动态通过基于代理的模拟运行，其中代理属于两个组中的一个。与 Lim 和 Min 的研究 [16] 不同，这里的组别与财富无关；它们代表不同的种族、性别或种姓。我们根据他们的财富 w_i 、风险厌恶因素 β_i 以及他们所属的组别（标记为 A 和 B ）来描述这些代理。风险厌恶因子设定代理人在交易过程中所冒财富比例的风险，该比例为 $(1 - \beta_i)w_i$ [17]。

在每个蒙特卡罗步骤（MCS）中，选择一对代理，因此每个个体平均进行一次交换。让代理 i 和 j 进行交易并假设前者获胜，我们得到

$$\begin{aligned} w_i(t+1) &= w_i(t) + \Delta w \\ w_j(t+1) &= w_j(t) - \Delta w, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $w_{i(j)}(t+1)$ 表示交易后代理 $i(j)$ 的财富，而 $w_{i(j)}(t)$ 表示交易前的财富。确定 Δw 的不同方法可以在文献 [17, 18, 19] 中找到。为了模拟实际的财富交换，两个个体所投入的金额必须相同，我们通过使用

$$\Delta w = \min[(1 - \beta_i)w_i(t), (1 - \beta_j)w_j(t)]. \quad (2)$$

需要强调的是，尽管这在理论上代表了“公平”的交换，但系统会进入凝结状态 [20]，在这种状态下，一个或少数几个个体拥有了一切而其他人则一无所有。凝结似乎就是全球经济遵循的道路，因为不平等现象持续增长 [21]。

一些修改已被提出以克服冷凝现象。在这里，我们研究了社会保护的影响，这种保护增加了最贫穷个体赢得交易的概率，这一概念最初由 Scafetta 在 [14, 18, 22] 中提出，它依赖于个体 i 和 j 在交换前的财富。

$$p = \frac{1}{2} + f \frac{|w_i(t) - w_j(t)|}{w_i(t) + w_j(t)}. \quad (3)$$

在方程 3 中， f 代表一个社会保护因子，它可以是政府法规或，在本例中，同一组代理之间的交易规则与另一组不同的规则。该保护因子可以取 0 到 0.5 的值。值 0（无保护）对应两个代理获胜的概率相等（0.5），而值 0.5（最高保护）总是有利于贫困代理。最富有的代理有互补概率 $1 - p$ 获胜。

同一组内的代理之间的互动有其自身的社会保护因素。例如，当 $A(B)$ 组的两个代理交换财富时， $f_{A(B)}$ 增加了较穷一方获胜的概率。不同群体间的贸易尊重由 f 提供的保护，对于 $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow A$ 交易也是如此。一旦 f 对应于减少不平等的公共政策，在真实经济中 f_A 和 f_B 的最小值必须是 f 。

我们使用 C. Gini 于 1912 年提出的基尼指数来衡量每个群体的不平等程度，计算公式为

$$G_I(t) = \frac{1}{2W_I(t)N_I} \sum_{ij}^{N_I} |w_i(t) - w_j(t)|, \quad (4)$$

其中 $I = A, B$ 表示进行指数计算的群体, $W_I = \sum_i^{N_I} w_i$ 则代表该群体 I 的财富。整个社会的 G 可以通过对所有个体求和来计算。基尼指数的变化范围从 0 (完全平等) 到 1, 这对应于只有一个人拥有全部可得财富 [23] 的状态。

流动性 L 是每次时间步长中被交换的财富量, 以总群体财富为基准进行归一化。鉴于总财富是守恒的, 富裕和贫穷的结果完全是由这些交换造成的。因此, 流动性是经济流动性的衡量标准。较大的 L 值表示更多的代理人在交换他们的财富, 而当经济停滞并凝结时则为 $L \rightarrow 0$ 。我们计算流动性 [17] 作为

$$L_I(t) = \frac{1}{2W_I(t)} \sum_i^{N_I} |w_i(t) - w_i(t-1)|. \quad (5)$$

模拟是在一个由 1000 个个体组成的系统中进行的——这些个体平均分为 A 组和 B 组——并且我们对每组关键参数进行了 200 次集合的平均, 每次集合包含 5×10^4 个蒙特卡罗步骤。初始条件是, w_i 和 β_i 在区间 (0,1) 内均匀分布; 而 β_i 是固定的, w_i 则是由于个体之间的交换而随时间变化的函数。我们通过设定一个个体必须持有的最低财富 $w_{min} = 1 \times 10^{-9}$ 来避免非常低的 Δw 值。因此, 具有 $w_i < w_{min}$ 的代理被排除在经济之外。

在前 10^3 个 MCS 中, 仅允许同一组成员之间的交易。然后将两组放在一起接触 (就像混合物中的两种气体), 组间交换可以以概率 p_{AB} 发生, 该概率在整个模拟过程中保持不变。组内交易以概率 $1 - p_{AB}$ 发生。我们在工作分析的关键参数是三个社会保护因素 (f_A 、 f_B 和 f) 和组间交易的概率 (p_{AB})。

3. 结果

为了说明目的, 图 1 显示了 Afro-Brazilians 和 Whites 在 2020 年 11 月的收入分布的定性比较 [24], 以及我们模型在 $f = f_B = 0.33, f_A = 0.40$ 和组间及组内交换概率相等时的结果。从左侧面板可以看出, 最低收入阶层中大多数是个体 Black 和 Brown, 而最高收入阶层的情况则相反。

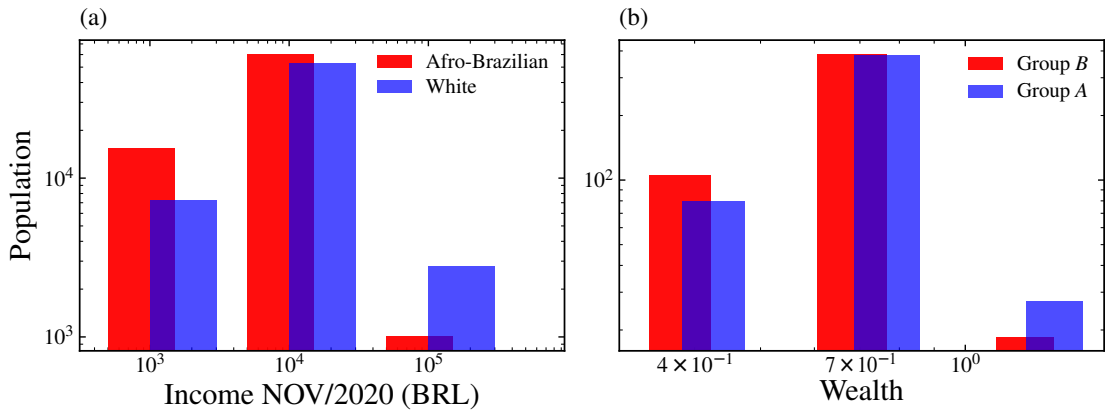


Figure 1: 定性比较 (a) 2020 年 11 月非裔巴西人和白人的收入分配与 (b) 模型数值模拟在对数-对数尺度下的 $f_A = 0.4$, $f = f_B = 0.33$ 和 $p_{AB} = 0.5$ 。左侧面板中的数据来自 [24]。蓝色条形图水平偏移以更好地可视化。请注意不同的水平和垂直比例尺。

Campante 的工作等。[7] 揭示了不仅教育水平和劳动力市场参与度是决定一个人收入的参数。通过使用适应的 Oaxaca-Blinder 方法论 [25, 26, 27], 他们认为存在一个种族歧视参数, 在巴西影响黑人

和棕色个体工资的确定。

诺贝尔奖得主 D. Card 及其合作者认为，在巴西，非白人工人更有可能被分配到低工资岗位。由于白人和非裔巴西人之间的教育差距，我们可以预期在较高职位上会有更多的白人工人。然而这仅仅代表了种族薪酬差异的一半贡献。剩余的“未解释”的 50%可能与歧视性政策 [28] 有关。我们在当前模型中包含了不对称性，因此通过社会保护因素来实现总财富和基尼系数的差异，即设定 $f_A \neq f_B$ 。

我们从固定 $f_A = 0.5$ 和 $p_{AB} = 0.1$ 开始模拟， f_B 是我们的自由参数。图 2 展示了两个子系统 (G_A 和 G_B) 及整个经济 (G) 的基尼系数作为 f_B 的函数。我们考虑了 f 的两个值：0.0 和 0.1。 G 并且在两种情况下， G_B 都会随着 f_B 的增加而减少。另一方面， G_A 随着 f_B 增大。组间保护也影响不平等，较大的 f 意味着对于我们分析的所有 f_B ， G 、 G_A 和 G_B 较小。即使导致了组 A 的不平等增加，保护 B 使得整个社会更加平等。

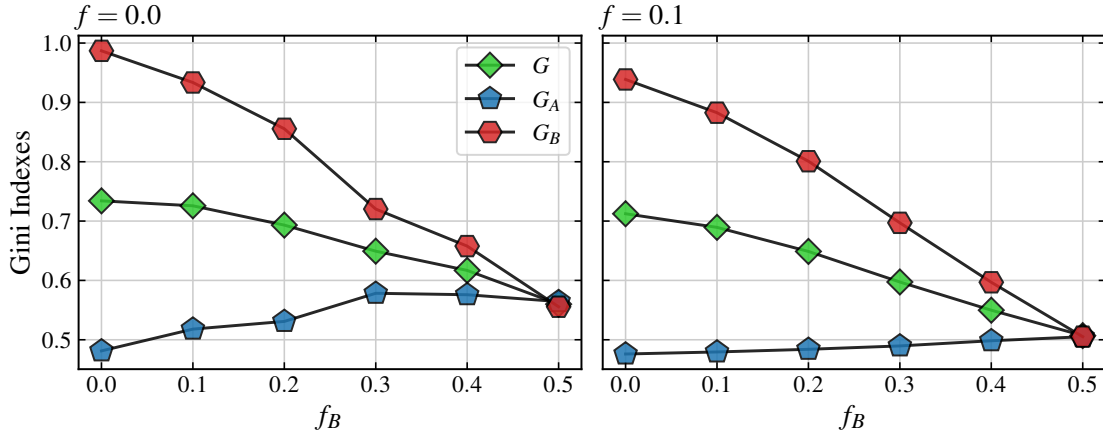


Figure 2: 基尼指数分别为 G_A 和 G_B 的组 A 和 B，以及整个系统的 G 作为社会保护因子 f_B 的函数，对于组 B 的 $f = 0.0$ (左) 和 0.1 (右)。模拟使用了 $f_A = 0.5$ 和 $p_{AB} = 0.1$ 。线条是眼睛的导向。

财富保守系统中，基尼系数与经济流动性呈负相关。不平等程度较低对应着较大的流动性，反之亦然。[29, 30] 我们的结果证实了这些发现。我们注意到由于 f_B 的增长（这也减少了 G_B ），B 的流动性得到了提升。在图 3 中，我们展示了 L_A 和 L_B 作为 f_B 的函数。考虑了两个组间保护因素，即 $f = 0.0$ 和 0.1，并且 $p_{AB} = 0.1$ 保持固定。如所见， L_A 也受到 f_B 的影响，但以负面方式。我们在图 2 中展示了 f_B 增加了 A 组的不平等。因此，随着 f_B ， L_A 的减少是可以预期的。这不利于 A 的代理，因为它们的移动性降低了，但这对整个系统的经济是有益的。

我们展示了从 B 到 A 的财富转移，如图 4 所示，在该图中我们观察到当 f_B 接近 0.5 时转移的财富变小，并在 $f_A = f_B = 0.5$ 时消失。组间社会保护也干扰了从一个群体转移到另一个群体的财富量。考虑了四种不同的 f ：0.0、0.01、0.1 和 0.5。令人惊讶的是，对于没有保护的组间交换，各组之间没有净财富转移。似乎 $f > 0$ 在 $f_A \neq f_B$ 的情况下促进了最受保护群体的财富积累。 $f = 0.01$ 的情况，即非常小的组间保护，导致了 A 的代理人积累了超过 95% 的可用财富当 $f_B = 0$ 为和 0.1 时。

f_A 对从 B 转移到 A 的财富的影响作为 f_A 的函数如图 5 所示。社会保护因素 f 和 f_B 保持固定在 0.1，考虑了 p_{AB} 的三个值。可以看出对于 $f_A = f_B = 0.1$ ，我们所用的所有 p_{AB} 都有 $W_A = W_B$ 。随着 p_{AB} 增加，各组持有的财富差异减小。不同组之间的代理交换导致财富在组内重新分配的机会减少，

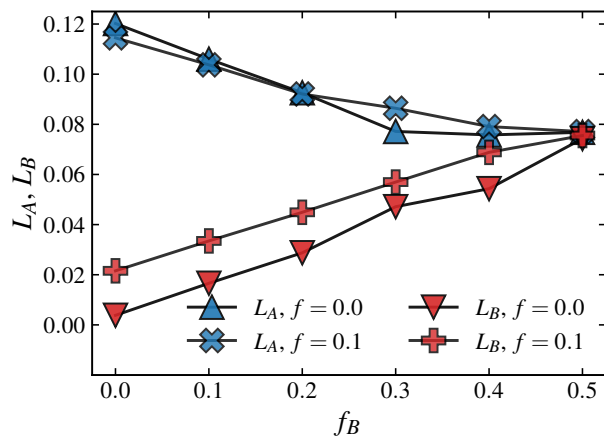


Figure 3: 群组 A 和 B 的流动性 L_A 和 L_B 分别作为 f_B 的函数。模拟中的固定参数是 $f_A = 0.5$ 和 $p_{AB} = 0.1$ 。两个组间社会保护因素被考虑, $f = 0$ 和 0.1 。

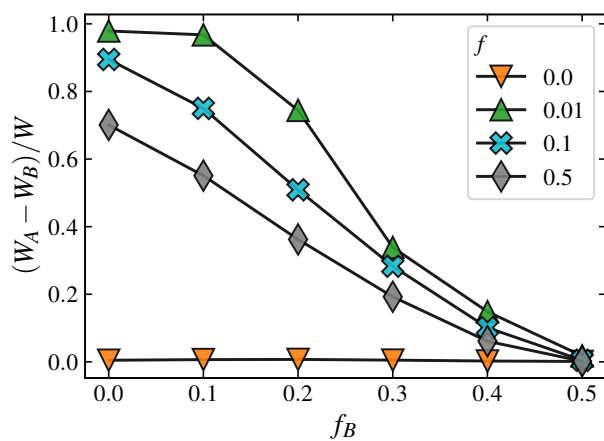


Figure 4: 财富从 B 转移到 A , 按总可用财富归一化, 作为 f_B 的函数, 对于 $f = 0, 0.01, 0.1$ 和 0.5 。 $p_{AB} = 0.1$ 和 $f_A = 0.5$ 在模拟过程中保持固定。线条是为了便于观察。

并根据其内部保护因素，组间保护变得更加重要。在极限情况下 $p_{AB} = 1$ （未显示在图 5 中），所有的交易都是在 A 的一个主体和 B 的一个主体之间进行；它们遵循相同的规则，没有观察到净财富转移。

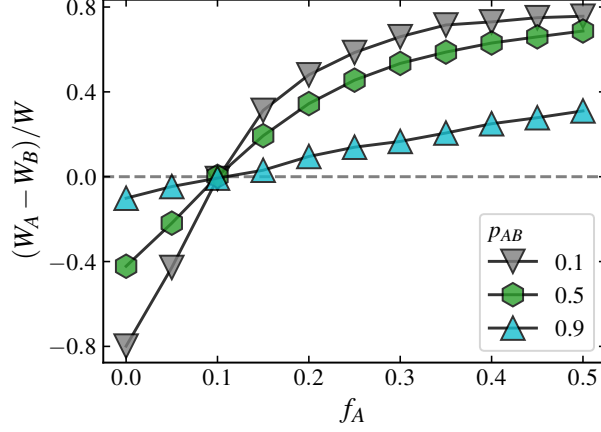


Figure 5: 财富从 B 转移到 A ，以总可用财富为基准，作为 f_A 的函数。其他社会保护因素 $f = f_B = 0.1$ 保持不变。不同的 p_{AB} 在图中有所指示。线条是为了引导视线。

图 6 显示了基尼指数作为 f_A 的函数对于 $f = f_B = 0.1$ 。对于 $p_{AB} = 0.1$ ，我们的结果对于 G_A 与在一个具有不可区分的代理的社会中获得的结果一致 [15]。完整系统的不等式也随着 f_A 减少，主要是因为组 A 减少了考虑的三个 p_{AB} 的不平等。 B 的基尼指数在修改 f_A 时几乎没有变化。当更多跨组贸易发生时，我们看到 G_A 和 G 的变化较小。这是另一个与 f 对系统相关性的增加相关的特性，如上所述。

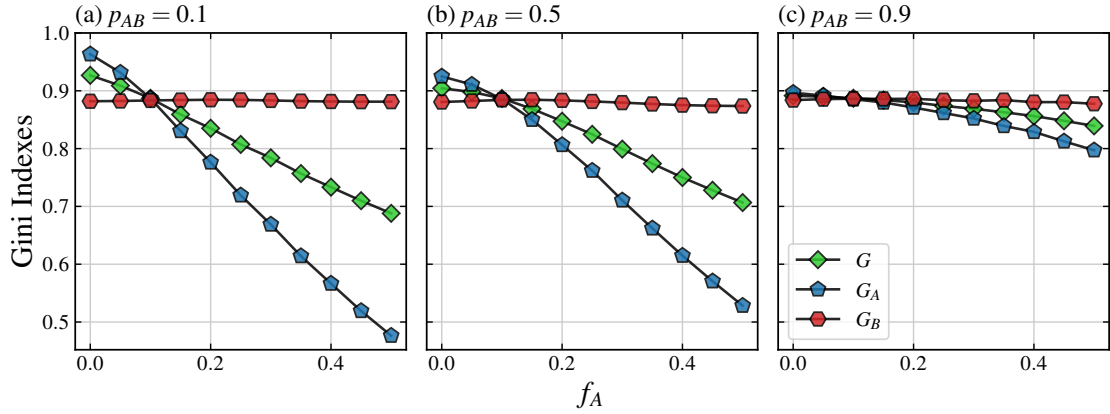


Figure 6: 基尼指数作为 f_A 的函数对 $f = f_B = 0.1$ 。图中指出了组间交换概率 p_{AB} 。实线是视觉引导线。

组间社会保护因素对财富转移和群体不平等的影响也被研究了。图 7 展示了 A 和 B 的财富差异以及两个群体和整个经济的基尼系数作为 f 与 $f_A = 0.5$ 、 $f_B = 0.1$ 及组内和组间交易概率相等的函数。可以注意到， $(W_A - W_B)/W$ 和三条不等式曲线表现出类似的行为：当 $f = 0.01$ 时有一个明显的峰值，随后是单调递减。我们已经表明，对最贫困群体的非零组间保护是对流向最受保护群体的财富流动的一种不可或缺的条件。

我们还可以在图 7 中识别出另一个意外特征，即当引入少量保护措施到群组间贸易时，不平等现象

也会最初增长。虽然内部保护因素的增加降低了群体间的不平等（作为结果， G 也下降），但 f 的增长增强了基尼系数。例如， $G_A(f)$ 总是大于其在 $f = 0$ 时的值。组 B 不等式从 $G_B = 0.78$ 开始，组间交易未受保护，并迅速降至 0.95 对于 $f = 0.01$ 。仅对于 $f \geq 0.3$ 它的值低于初始值。

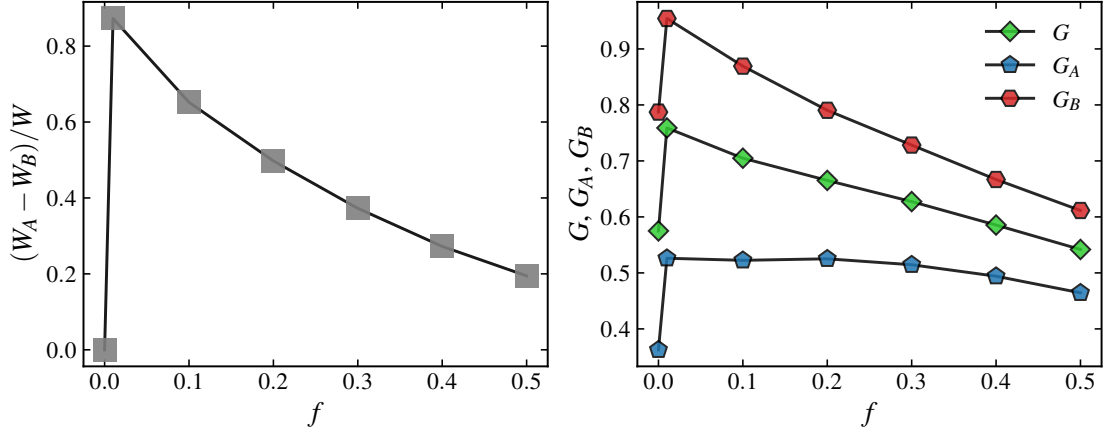


Figure 7: 左侧：群体 B 向群体 A 的财富转移作为组间保护因子的函数。右侧：基尼系数 G 、 G_A 和 G_B 作为相同数量的函数。固定参数为 $f_B = 0.1$ 和 $p_{AB} = 0.5$ 。注意财富转移曲线与不平等曲线之间的定性相似性。

我们还研究了组间交换概率对各组之间财富转移的影响。分析了各组的基尼系数和经济流动性及其与 p_{AB} 的依赖关系。我们将 $f = 0.1$ 和 $f_A = 0.5$ 固定，使 f_B 从 0 变化到 0.5。结果汇总在图 8 中。财富转移的分析，图 8(a) 显示了 $W_A = W_B$ 对于 $p_{AB} = 0$ 的情况为 1，而对于所有 f_B 值都为 1。第一种情况对应于两个孤立的经济体，并且 $p_{AB} = 1$ 表明每次交易都是在不同组的代理之间进行，尊重总体的社会保障 f 。

当 $f_A = f_B$ 时，两组的总财富也是相等的，无论组间交易的概率如何。另一方面，如果内部的社会保护不同，则财富会从较少受到保护的一组流向另一组。转移的数量随着这种差异的增大而变大。对于每个 f_B ，各组之间财富差额在给定的 p_{AB} 值处呈现最大值。这些极大值的水平位置与 f_A 和 f_B 之间的差异有关，具体表现为这些参数之间的较大差距会在较小的 p_{AB} 中产生最大的差距。

基尼指数作为 p_{AB} 的函数显示在图 8(b) 和 (c) 中。如果 $f_A = f_B = 0.5$ 我们看不到 G_A 和 G_B 之间的差异，它们几乎线性地从 0.47 增加到 ≈ 0.9 ，当只有组间交换发生时。 $G_A(p_{AB})$ 的形状变得更为弯曲，因为 B 保护减少。 G_B 的情况更加直接，如果只允许组内交易 $G_B(f_B) \approx 1 - f_B$ ，并且 p_{AB} 的增长将 G_B 带到 0.9，只要选择不同组的代理对。

图 8 的最后一两个面板显示了各组及其修改后的组间交换概率的流动性。我们观察到在 L_A 中， $p_{AB} = 0.1$ 和 $f_B < 0.5$ 出现峰值。这一特征是由于财富从 B 转移到 A 的结果。由于组 A 有更多的财富重新分配，并且它表现出较大的社会保护，其代理能够每次在 MCS 中相互交换更大的财富量。另一组则呈现出更复杂的流动性行为。对于 $p_{AB} \geq 0.7$ ， L_B 的值几乎独立于 f_B 。然而，当组间交换概率小于 0.7 时，可以看到非常不同的曲线。根据 B 社会保护的不同，增加与区间 $p_{AB} = [0, 0.6]$ 内的 A 代理人的相对交换数量可能是有利的。例外的是 $f = 0.3$ （其中未注意到 L_B 的显著变化）和 $f_B \geq 0.4$ ，其随 p_{AB} 的增加而减少。

我们的研究结果表明，有可能调整最佳条件以提高未受保护群体的流动性并减少不平等现象，而

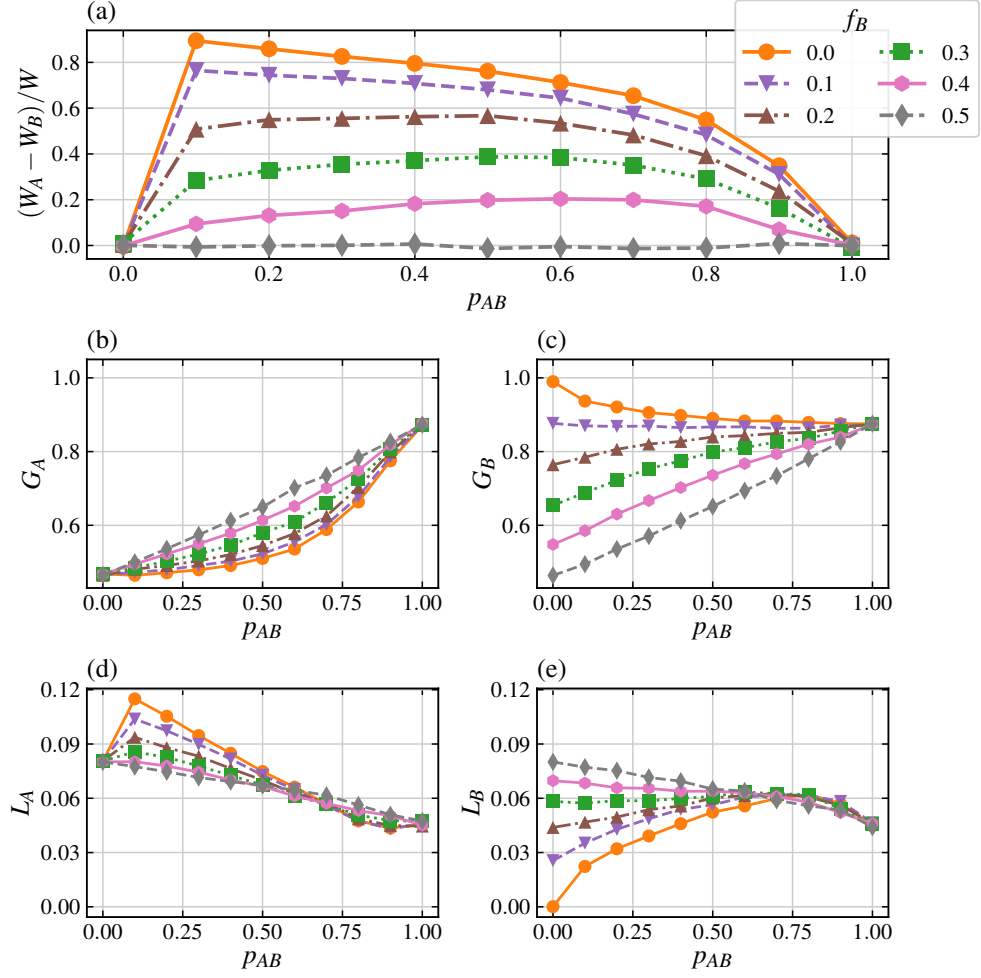


Figure 8: p_{AB} 对财富转移、基尼系数和各组流动性的影响力。(a) 各组之间的标准化财富差距，(b) 和 (c) 分别为 A 和 B 组的基尼系数。(d) L_A 和 (e) L_B 作为 p_{AB} 的函数。每条曲线的 f_B 在图中均有标示。我们已经固定了 $f = 0.1$ 和 $f_A = 0.5$ 。线条仅作为视觉引导。

不会失去大量财富。

4. 总结与结论

社会的复杂性导致其被划分为不同的阶级。不仅经济相关的特征负责将人们分类为不同的群体。这些划分影响了财富分配，并因此，一个群体以其他群体的利益为代价积累了财富。这项工作旨在研究在一个分层社会先验的中产生不平等和两个群体之间财富转移的微观机制。该模型考虑了两个群体， A 和 B ，其代理可以相互作用并通过交换部分财富进行交流。每个群体内部都有一个有利于最贫困者的社会保护，这可以理解作为一种集体行为，倾向于维持或提升整个群体的地位。群间交流以概率 p_{AB} 发生，并且我们定义这些交易的保护为 f 。

受保护程度最高的群体在与其他群体相比时，更为平等且拥有最大的财富份额，但前提是跨组贸易受到 $f > 0$ 的监管。我们发现有两种方法可以避免交互组之间的财富转移，（一）通过使保护因素平衡， $f_A = f_B$ ；或（二）如果没有任何保护作用于跨组交换。第一种情况也会导致两个群体的基尼系数相同。没有跨组保护的情况会以这样一种方式维持不同的基尼系数：受保护程度较低的群体更加不平等，并且如果没有对最贫穷的个体进行保护，就会促进财富凝结。

我们看到保护较少的群体（ B ）通过增加其保护可以对 A 的不平等产生负面影响。同时，它减少了转移财富的数量。另一方面，维持低保护水平的 B 并改变 f_A 不会显著影响 B 的基尼系数。可以得出结论，最脆弱的群体仅依赖其社会保护才能变得更加平等。在这两种情况下，整个经济都从某个群体保护水平的提高中获益。

组间社会保护也干扰了各组的经济。虽然 $f = 0$ 避免了组间的财富流动， $f = 0.01$ 导致受保护群体资源积累增加，并伴有 G 、 G_A 和 G_B 的上升。对于较大的 f 值，这些指标倾向于减少。某种程度上，我们的结果显示，在财富转移、不平等和经济流动性方面，不受保护的组间交换比有小规模保护的更好。我们分析了 p_{AB} 对这些措施的影响。这有利于最受保护的群体以较小的概率与其他群体进行贸易（ $p_{AB} = 0.1$ ），因为它增加了该群体持有的财富量，从而提高了流动性而没有显著改变其不平等性。随着群际交易的相对数量上升，我们注意到由于 f 的重要性，尽管存在群内保护措施，但各群体之间的基尼系数、流动性和可用财富差异有所缩小。

我们的模拟结果与巴西按种族划分的收入分布进行了比较，模型所涉及的两个群体是白人和非裔巴西人群体。定性的一致性表明该模型也可以应用于这种情况，以及两国之间的商品贸易。

致谢

...

References

- [1] V. Pareto, *Rouge*, Lausanne **2** (1897).
- [2] B. M. Boghosian, *Physical Review E*, **89**, 0420804 (2014).
- [3] A. A. Drăgulescu and V. M. Yakovenko, *European Physics Journal B* **20**, 585 (2001).
- [4] G. D. Berreman, *Race* **13** (4) 385 (1972).

- [5] F. Anthias, *Sociology* **35** (4) 835 (2001).
- [6] D. B. Grusky, *Social stratification, class, race and gender in sociological perspective. 2nd edition* (Cornell University, New York, 2019).
- [7] F. R. Campante, A. R. V. Crespo, and P. G. Leite, *Revista Brasileira de Economia* **58**, 185 (2004).
- [8] S. Kilsztajn, M. S. N. do Carmo, G. T. L. Sugahara, E. S. Lopes, and S. S. Petrohilos, *Revista de Economia Contemporânea* **9** (2), 367 (2005).
- [9] A. Shaikh, N. Papanikolaou, and N. Wiener, *Physica A* **415**, 54 (2014).
- [10] Darity, W. A. Jr., *Journal of Economic Literature*, **60**(2), 400 (2022).
- [11] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, *Características gerais dos domicílios e dos moradores 2019 – Pesquisa nacional por amostra de domicílios 2019* Updated in 2020-05-26 (Brasília, 2020).
- [12] V. Yakovenko and J. B. Rosser, *Reviews of Modern Physics* **81**, 1703 (2009).
- [13] Z. Burda, P. Wojcieszak, K. Zuchniak, *Comptes Rendus Physique* **20**, 349 (2019).
- [14] B.-F. Cardoso, S. Gonçalves, and J. R. Iglesias, *Physica A* **20**, 124201 (2020).
- [15] J. R. Iglesias, B.-H. F. Cardoso, S. Gonçalves, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **95**, 105646 (2021).
- [16] G. Lim and S. Min, *Entropy* **22**, 386 (2020).
- [17] J. R. Iglesias, and R. M. C. de Almeida, *European Physics Journal* **85**, 85 (2012).
- [18] G. Caon, S. Gonçalves, and J. Iglesias, *The European Physical Journal Special Topics* **143**, 69 (2007).
- [19] B. Hayes, *American Scientist* **90**, 400 (2002).
- [20] B.-H. Cardoro, J. R. Iglesias, S. Gonçalves, *Physica A* **579**, 126123 (2021).
- [21] T. Piketty, *Capital in the 21st Century* (Harvard University Press Cambridge, MA, 2014).
- [22] N. Scafetta, S. Picozzi, and B. J. West, arXiv preprint cond-mat/0209373 (2002).
- [23] G. Firebaugh *American Journal of Sociology* **104** (6) 1597 (1999).
- [24] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, *Pesquisa nacional por amostra de domicílios - PNAD-COVID-11/2020*, https://ftp.ibge.gov.br/Trabalho_e_Rendimento/Pesquisa_Nacional_por_Amostra_de_Domicilios_PNAD_COVID19/Microdados/Dados/PNAD_COVID_112020.zip, accessed: 2021-23-06.

- [25] R. L. Oaxaca, *International Economic Review*, **14** 693 (1973).
- [26] A. S. Blinder, *Journal of Human Resources*, **8** 436 (1973).
- [27] F. Bourguignon, F. Ferreira, and P. G. Leite, *The Journal of Economic Inequality* **6**, 117 (2008).
- [28] F. Gerard, L. Lagos, E. Severnini, and D. Card, *American Economic Review*, **11**(10), 3418 (2021).
- [29] M. L. Bertotti, and G. Modanese, *The European Physical Journal Special Topics* **225**, 1945 (2016).
- [30] J. Neñer, B.-H. F. Cardoso, M. F. Laguna, S. Gonçalves, and J. R. Iglesias, *Philosophical Transactions A*, **380**, 20210165 (2022).