Kerr-AdS 黑洞热力学中的高阶导数修正

Wei Guo[1,2,*] Xiyao Guo[1,2,†] Xin Lan[1,2,‡] Hongbao Zhang[1,2,§] and Wei Zhang[1,2¶]
[1]*School of Physics and Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*
[2] *Key Laboratory of Multiscale Spin Physics, Ministry of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*

(10Dated: 2025 年 5 月 2 日)

代替更为复杂的协变反演项方法，我们应用经过充分验证的背景减除方法来计算由黎曼张量立方项以内的高阶导数项引起的 Kerr-AdS 黑洞热力学的一阶修正，其中通过分解技巧进一步简化了体作用的计算。我们的结果的有效性还通过检查由 Gauss-Bonnet 项引起的修正得到了进一步证实。此外，通过将我们的结果与洛伦兹签名中通过 ADM 和 Wald 公式获得的结果进行比较，我们可以提取出每个高阶导数项引起的一阶修正黑洞解的一些通用信息。

I. 介绍

在量子引力的欧几里得方法中，有两种可用于计算静止黑洞的吉布斯自由能及相关热力学量的方法。一种被称为 Hawking 及其同伴 [1–5] 提出的背景减除法，另一种则被称为由 AdS/CFT 对偶启发而来的协变反演项法 [6–8]。这两种方法都被认为有各自的问题。协变反演项法通常需要在边界上添加臭名昭著的复杂项，加上广义的 Gibbons-Hawking-York 项，用于一个通用的微分同胚协变量引力理论，而背景减除法则被认为是非常限制性的，因为静止黑洞在边界的诱导度规不能总是嵌入到参考时空。然而，通过以创新方式应用协变相空间形式化方法，在 [9] 中最近已经表明，背景减除法适用的条件根本不需要上述等距嵌入。相反，事实证明背景减除法与协变反演项法一样具有广泛的适用性。具体而言，不仅 Einstein 引力的背景减除法应用得到了很好的确立，而且对于在渐近平坦和 AdS 时空中其高阶导数修正的应用也是一样。相应地，在探究黑洞热力学中高阶导数修正的研究工作中，更简单的背景减除法自然而然地成为首选方法。通过这种方法，不仅可以获得关于有效场论背景下量子引力的紫外行为的一些普遍信息，还可以通过对偶 AdS/CFT 透镜对边界量子系统在有限耦合和有限 N 的动力学有所了解。基于此，在本文中我们将应用背景减除法来计算由黎曼张量立方项之内的高阶导数项引起的四维 Kerr-AdS 黑洞热力学的一级修正，据我们所知，这一点尚未被探索，尽管最近对各种黑洞的热力学量的高阶导数修正进行了许多研究 [10–27]。为了实现这一目标，我们将利用在 [27] 中开发的战略来简化我们的计算，通过这种方法可以提取一些一级修正后的黑洞解的一般特征，尽管我们无需明确求解它。

本文的结构组织如下。在下一节中，我们将简要回顾背景减除方法对渐近 AdS 时空的适用性，在此过程中我们使用与 [9] 中不同的坐标系来证明背景减除方法的适用条件确实满足爱因斯坦引力的要求。然后在第 III 节中，我们将应用可行的背景减除方法计算大规范系综中的第一阶修正吉布斯自由能以及相关的熵、角动量和质量。通过将所得的角动量和质量与使用 ADM 公式获得的结果进行比较，以及将所得的熵与使用 Wald 公式获得的结果进行比较，我们进一步提取了关于完整的第一阶修正黑洞解的一些通用信息。此外，我们通过检查由高斯-博内项引起的修正来证实我们的结果的有效性。最后在最后一节中，我们将以一些讨论结束本文。

---

* guow@mail.bnu.edu.cn
† xiyaoguo@mail.bnu.edu.cn
‡ xinlan@mail.bnu.edu.cn
§ hongbaozhang@bnu.edu.cn
¶ w.zhang@mail.bnu.edu.cn

II. 背景减除方法在渐近 ADS 时空中的适用性

在本节中，我们将首先回顾背景减除方法在 $F(R_{abcd})$ 重力中的适用性准则。详细内容请参阅 [9]。然后通过选取与 [9] 中不同的坐标系，我们将会展示该准则满足了渐近 AdS 空间时的爱因斯坦重力，这可以被视为对 [9] 中所提出的声明的双重验证。最后，我们将总结 [9] 中关于背景减除方法在有效场论框架下作为爱因斯坦重力修正项应用于高阶导数重力时适用性的主要陈述。

现在让我们从以下 $F(R_{abcd})$ 引力拉格朗日形式开始，即

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\epsilon} F(R_{abcd}, g_{ab}) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\epsilon}$ 是时空体积，F 是里曼张量 R_{abcd} 和度量 g_{ab} 的任意函数。其变体进一步产生

$$\delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\epsilon} E_g^{ab} \delta g_{ab} + d\boldsymbol{\Theta}. \tag{2}$$

这里

$$E_g^{ab} = \frac{1}{2} g^{ab} F + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial g_{ab}} + 2\nabla_c \nabla_d \psi^{c(ab)d} \tag{3}$$

其中 $E_g^{ab} = 0$ 是运动方程，而 $\boldsymbol{\Theta} = \theta \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ 是体积辛位势，有

$$\theta^a = 2(\nabla_d \psi^{bdca} \delta g_{bc} - \psi^{bdca} \nabla_d \delta g_{bc}), \tag{4}$$

其中 ψ^{abcd} 定义为 F 关于 R_{abcd} 的导数，并假设它与度规无关，即 $\psi^{abcd} \equiv \frac{\partial F}{\partial R_{abcd}}$。

当在类时边界 Γ 处进行评估时，$\boldsymbol{\Theta}$ 可以采取以下形式

$$\boldsymbol{\Theta}|_{\Gamma} = -\delta \boldsymbol{B} + d\boldsymbol{C} + \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = 4\Psi_{ab} K^{ab} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(T_{hbc} \delta h^{bc} + T_{\Psi bc} \delta \Psi^{bc}) \tag{6}$$

其中 K_{ab} 是外在曲率，$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ 是定义为 $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{n} \wedge \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$，$\Psi_{ab} = \psi_{acbd} n^c n^d$ 的诱导体积。

$$\begin{aligned} \omega^a &= -2\Psi^{a}{}_{b} \delta A^b + 2h^{ae} \psi_{ecdb} n^d \delta h^{bc}, \\ T_{hbc} &= -2\Psi_{de} K^{de} h_{bc} + 2n^a \nabla^e \psi_{deaf} h^d{}_{(b} h^f{}_{c)} - 2\Psi_{a(b} K^a{}_{c)} - 2D^a (h_a{}^e h_{(c}{}^f \psi_{|efd|b)} n^d), \\ T_{\Psi bc} &= 4K_{bc}. \end{aligned} \tag{7}$$

当且仅当

$$\int_{\partial \Sigma_1} \xi \cdot [\boldsymbol{F}] = 0 \tag{8}$$

中括号表示与参考时空的差异为 $[\boldsymbol{F}] \equiv \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^0$，黑洞热力学第一定律成立，即，

$$T\delta S = \delta[H_\xi] \tag{9}$$

其中霍金温度为 $T = \frac{\kappa}{2\pi}$。这里 ξ 是垂直于黑洞事件视界并切向于 Γ 的 Killing 向量场，选择该场位于黑洞外部。黑洞的熵由以下给出

$$S = \beta \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{Q}_\xi \tag{10}$$

其中 $\beta = \frac{1}{T}$ 是沿欧几里得时间的周期 $\tau = it$, $\mathcal{B}$ 是分叉面，并且

$$\boldsymbol{Q}_\xi = -\psi^{cadb} \nabla_{[d} \xi_{b]} \boldsymbol{\epsilon}_{ca\cdots}. \tag{11}$$

与 ξ 共轭的哈密顿量可以表示为

$$H_\xi = \int_{\mathcal{S}} q_\xi \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \tag{12}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ 是在 Γ 上诱导出的体积，$\mathcal{S}$ 可以被视为 Γ 和一个从分叉面发出的空间类超曲面的交集，并且

$$q_\xi^a = \mathcal{T}^a{}_c \xi^c \tag{13}$$

其中广义布朗-约克边界能量动量张量为 $\mathcal{T}^a{}_c = -(2T_h{}^a{}_c + 2\Psi^{ab}T_{\Psi cb})$．条件 (8) 与 $[H_\xi]$ 的有限性条件一起产生了背景减除方法适用性的判据。如果这个判据得到满足，静止黑洞的吉布斯自由能可以表示为

$$\beta G \equiv \beta([H_\xi] - TS) = [I_E]. \tag{14}$$

这里的欧几里得作用量 I_E 由下式给出

$$I_E = \int_M \boldsymbol{L}_E + \int_\infty \boldsymbol{B}_E \tag{15}$$

其中包括 $\boldsymbol{L}_E = -i\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{B}_E = -i\boldsymbol{B}$。

接下来让我们证明上述准则满足爱因斯坦引力，其拉格朗日形式为

$$\boldsymbol{L}_{eh} = \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}(R + \frac{6}{l^2}). \tag{16}$$

因此很容易显示 $\psi_{abcd} = \frac{1}{32\pi}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$ 和 $\Psi_{ab} = \frac{1}{32\pi}h_{ab}$。相应地，我们得到

$$\boldsymbol{B} = \frac{K}{8\pi}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \boldsymbol{C} = -\frac{1}{16\pi}\delta A \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \boldsymbol{F} = -\frac{1}{2}T_{bc}\delta h^{bc}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad q_\xi^a = T^a{}_c\xi^c, \tag{17}$$

其中 $T_{bc} = -\frac{1}{8\pi}(K_{bc} - Kh_{bc})$ 是熟悉的布朗-约克边界能量动量张量。另一方面，相应的 Kerr-AdS 黑洞解在 Boyer-Lindquist 坐标下为

$$ds^2 = -W(1 + \frac{r^2}{l^2})dt^2 + \frac{2m}{U}(Wdt - \frac{a\sin^2\theta d\phi}{\Xi})^2 + \frac{U}{V - 2m}dr^2 + \frac{rU}{W\Xi}d\theta^2 + \frac{r^2 + a^2}{\Xi}\sin^2\theta d\phi^2 \tag{18}$$

其中

$$W = \frac{\sin^2\theta}{\Xi} + \cos^2\theta, \quad \Xi = 1 - \frac{a^2}{l^2}, \quad U = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r}, \quad V = \frac{1}{r}(1 + \frac{r^2}{l^2})(r^2 + a^2). \tag{19}$$

如本节开头所述，这里采用的坐标系统与 [9] 中的不同。这个坐标系统的最大优点是相应的 Killing 矢量场 $\frac{\partial}{\partial t}$ 在无穷远处不旋转。通过与黑洞事件视界正交的 Killing 矢量场取如下形式 $\xi = \frac{\partial}{\partial t} + (\frac{a\Xi}{r_+^2 + a^2} + \frac{a}{l^2})\frac{\partial}{\partial\phi}$，我们可以得到黑洞温度和角速度如下：

$$T = \frac{r_+(1 + \frac{a^2}{l^2} + 3\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{a^2}{r_+^2})}{4\pi(r_+^2 + a^2)}, \quad \Omega = \frac{a(1 + \frac{r_+^2}{l^2})}{r_+^2 + a^2}, \tag{20}$$

其中 r_+ 表示黑洞事件视界的半径，满足 $V(r_+) - 2m = 0$。

为了继续，我们将选择类时边界 Γ 为 $r = \bar{r}$ 的表面，并进行以下坐标变换

$$t \to \frac{\sqrt{V(\bar{r}) - 2m}}{\sqrt{V(\bar{r})}}t \tag{21}$$

对于具有 $m = 0$ 的解，这实际上是 Boyer-Lindquist 坐标中的纯 AdS 解，将作为我们的参考时空。在时间坐标的这种重新缩放之后，我们参考时空中度量为

$$ds^2 = -W\frac{V(\bar{r}) - 2m}{V(\bar{r})}(1 + \frac{r^2}{l^2})dt^2 + \frac{U}{V}dr^2 + \frac{rU}{W\Xi}d\theta^2 + \frac{r^2 + a^2}{\Xi}\sin^2\theta d\phi^2, \tag{22}$$

其中可以选择

$$e^0 \equiv \sqrt{W\frac{V(\bar{r})-2m}{V(\bar{r})}(1+\frac{r^2}{l^2})}dt, \quad e^1 \equiv \sqrt{\frac{U}{V}}dr,$$
$$e^2 \equiv \sqrt{\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{W\Xi}}d\theta, \quad e^3 \equiv \sqrt{\frac{r^2+a^2}{\Xi}}\sin\theta d\phi \tag{23}$$

为其正交基。因此，诱导度量和外在曲率在 Γ 处的非零基分量可以写为

$$h_{00} = -1 + \frac{2ma^2\sin^2\theta}{\Xi\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^5}), \quad h_{03} = -\frac{2mal\sin\theta\sqrt{W}}{\sqrt{\Xi}\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^5}), \quad h_{22} = 1, \quad h_{33} = 1 + \frac{2ma^2\sin^2\theta}{\Xi\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^5}),$$
$$K_{00} = -\frac{1}{l} + \frac{1}{2l\bar{r}^2}(l^2 - a^2\sin^2\theta) + \frac{m[-2l^2 + a^2(1+\cos^2\theta)]}{l\Xi\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}), \quad K_{03} = \frac{ma\sin\theta\sqrt{W}}{\sqrt{\Xi}\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}),$$
$$K_{22} = \frac{1}{l} + \frac{a^2 + l^2 - 3a^2\cos^2\theta}{2l\bar{r}^2} - \frac{ml}{\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}), \quad K_{33} = \frac{1}{l} + \frac{l^2 - a^2(1+\cos^2\theta)}{2l\bar{r}^2} - \frac{mlW}{\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}), \tag{24}$$

从而我们可以进一步得到

$$K = \frac{3}{l} + \frac{a^2 + l^2 - 5a^2\cos^2\theta}{2l\bar{r}^2} + \frac{l^4 - 2a^2l^2(1+3\cos^2\theta) + a^4(1 - 6\cos^2\theta + 21\cos^4\theta)}{8l\bar{r}^4} - \frac{ml(l^2 + a^2\sin^2\theta)}{\bar{r}^5} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^6}), \tag{25}$$

以及 Kerr 度规的 Brown-York 张量的非零基分量

$$T_{00} = -\frac{1}{4\pi l} - \frac{l^2 - 2a^2\cos^2\theta}{8\pi l\bar{r}^2} + \frac{ml[2 + \frac{a^2}{l^2}(5 - 7\cos^2\theta)]}{8\pi\Xi\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}), \quad T_{03} = \frac{7ma\sin\theta\sqrt{W}}{8\sqrt{\Xi}\pi\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}),$$
$$T_{22} = \frac{1}{4\pi l} - \frac{a^2\cos^2\theta}{8\pi l\bar{r}^2} + \frac{ml}{8\pi\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}), \quad T_{33} = \frac{1}{4\pi l} - \frac{a^2(2\cos^2\theta - 1)}{8\pi l\bar{r}^2} + \frac{ml[1 + \frac{a^2}{l^2}(6 - 7\cos^2\theta)]}{8\pi\Xi\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}) \tag{26}$$

其中 $m=0$ 对应于参考时空的结果。请注意，$\sqrt{|h|} = \frac{\sqrt{(V-2m)U}\sin\theta}{\Xi}$ 对于 Kerr-AdS 黑洞和参考时空是相同的，并且 $\sin\theta\bar{r}^2$ 是主导阶，但是 Kerr-AdS 黑洞在 Γ 处的诱导度量与参考时空不同。幸运的是，根据我们的标准，这不会破坏背景减除方法的应用性。更具体地说，我们有一阶扰动 Kerr-AdS 黑洞和参考时空的诱导度量

$$h'_{00} = -1 - \frac{2a\delta a\sin^2\theta}{l^2\Xi^2W} + \frac{1}{\bar{r}^3}[\frac{2ma^2\sin^2\theta + 2W\Xi l^2\delta m}{\Xi} + \frac{4ma\delta a\sin^2\theta(l^2 - a^2\cos2\theta)}{Wl^2\Xi^2}] + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}),$$
$$h'_{03} = -\frac{1}{\bar{r}^3}[\frac{2(m+\delta m)al\sin\theta\sqrt{W}}{\sqrt{\Xi}} + \frac{2m\delta a\sin^2\theta(l^4 + 3a^2l^2\sin^2\theta - a^4\cos^2\theta)}{l^3\Xi^2\sin\theta\sqrt{W\Xi}}] + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}),$$
$$h'_{22} = 1 + \frac{2a\delta a\cos^2\theta}{l^2W\Xi} + \frac{2a\delta a\cos^2\theta}{\bar{r}^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}),$$
$$h'_{33} = 1 + \frac{2a\delta a}{l^2\Xi} + \frac{2a\delta a}{\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}^3}[\frac{2(m+\delta m)a^2\sin^2\theta}{\Xi} + \frac{4ma\delta a(l^2+a^2)\sin^2\theta}{l^2\Xi^2}] + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}),$$
$$h'^0_{00} = -1 - \frac{2a\delta a\sin^2\theta}{l^2\Xi^2W} + \frac{2\delta ml^2}{\bar{r}^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}), \quad h'^0_{03} = 0,$$
$$h'^0_{22} = 1 + \frac{2a\delta a\cos^2\theta}{l^2W\Xi} + \frac{2a\delta a\cos^2\theta}{\bar{r}^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}), \quad h'^0_{33} = 1 + \frac{2a\delta a}{l^2\Xi} + \frac{2a\delta a}{\bar{r}^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}^4}) \tag{27}$$

。由 $\delta h^{ab}=-h^{ac}h^{bd}\delta h_{cd}$ 可进一步获得

$$
\begin{aligned}
\delta h'^{00} &= \frac{2a\delta a\sin^2\theta}{l^2\Xi^2 W}-\frac{1}{\bar r^3}[2\delta m W l^2+\frac{4ma\delta a\sin^2\theta}{W\Xi^2}]+\mathcal{O}(\frac{1}{\bar r^4}),\\
\delta h'^{03} &= \frac{1}{\bar r^3}[\frac{2a\delta ml\sin\theta\sqrt{W}}{\sqrt{\Xi}}+\frac{2m\delta a\sin\theta[l^4\Xi-3a^4\cos^2\theta+a^2l^2(7-5\cos^2\theta)]}{l^3\Xi\sqrt{W\Xi}}]+\mathcal{O}(\frac{1}{\bar r^4}),\\
\delta h'^{22} &= -\frac{2a\delta a\cos^2\theta}{l^2W\Xi}-\frac{2a\delta a\cos^2\theta}{\bar r^2}+\mathcal{O}(\frac{1}{\bar r^4}),\\
\delta h'^{33} &= -\frac{2a\delta a}{l^2\Xi}-\frac{2a\delta a}{\bar r^2}-\frac{1}{\bar r^3}[\frac{2a^2\delta m\sin^2\theta}{\Xi}+\frac{4ma\delta a\sin^2\theta}{\Xi}]+\mathcal{O}(\frac{1}{\bar r^4}),\\
\delta h'^{0 00} &= \frac{2a\delta a\sin^2\theta}{l^2\Xi^2W}-\frac{2\delta m l^2}{\bar r^3}+\mathcal{O}(\frac{1}{\bar r^4}),\quad \delta h'^{0 03}=0,\\
\delta h'^{0 22} &= -\frac{2a\delta a\cos^2\theta}{l^2W\Xi}-\frac{2a\delta a\cos^2\theta}{\bar r^2}+\mathcal{O}(\frac{1}{\bar r^4}),\quad \delta h'^{0 33}=-\frac{2a\delta a}{l^2\Xi}-\frac{2a\delta a}{\bar r^2}+\mathcal{O}(\frac{1}{\bar r^4}).
\end{aligned}\tag{28}
$$

然后通过直接计算可以得出 $\int_{\mathcal{S}}\xi\cdot[\boldsymbol{F}]$ 与 $\int_{-1}^{1}dx(1-3x^2)=0$ 成正比，比例系数为 $x=\cos\theta$，这保证了黑洞热力学第一定律的有效性。另一方面，我们有

$$
T^t{}_t=\frac{1}{4\pi l}+\frac{l^2-2a^2\cos^2\theta}{8\pi l\bar r^2}-\frac{ml[2+\frac{a^2}{l^2}(1-3\cos^2\theta)]}{8\pi\Xi\bar r^3}+\mathcal{O}(\frac{1}{\bar r^4}),\quad T^t{}_\phi=\frac{3mal\sin^2\theta}{8\pi\Xi\bar r^3}+\mathcal{O}(\frac{1}{\bar r^4})\tag{29}
$$

其中 $m=0$ 对应于参考时空中结果，由此可以看出 $[H_\xi]$ 的有限性。特别是，我们熟悉的 ADM 质量和角动量如下

$$
M\equiv[H_{\frac{\partial}{\partial t}}]=\frac{m}{\Xi^2},\quad J\equiv-[H_{\frac{\partial}{\partial\phi}}]=Ma,\tag{30}
$$

这是有限的。因此背景减除方法适用于渐近 AdS 时空中的爱因斯坦引力。

最终，如 [9] 中详细所述，在有效场论框架内，作为对爱因斯坦引力的修正，更高阶导数引力也满足背景减法方法的适用性标准。此外，相应的吉布斯自由能仅从体积项获得贡献，与爱因斯坦引力相同。然而，更高阶导数项有两个额外的效应。首先，AdS 半径仅由 $\frac{\varepsilon}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}R^n$ 项和 $n>2$ 校正，如下所示：

$$
R+\frac{12}{l^2}+\varepsilon(2-n)R^n=0.\tag{31}
$$

其次，ADM 质量和角动量的表达式仅由更高阶导数项 $\frac{\varepsilon}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}R^n$ 和 $\frac{\varepsilon}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}R^nC^2$ 以及 $C^2\equiv C_{abcd}C^{abcd}$ 校正。结果表明，ADM 质量与角动量的修正项与爱因斯坦引力的表达式成正比，前者的高阶导数修正项的比例常数为 εnR^{n-1}，后者的比例常数为 $\frac{\varepsilon 4R^n}{l_e^2}$，其中 l_e 表示修正后的 AdS 半径。

III. 克尔-反德西特黑洞热力学的高阶导数修正

在前一节的准备基础上，我们将应用背景减除方法通过高导数项计算 Kerr-AdS 黑洞热力学的一阶修正。更准确地说，我们将考虑由以下高导数项 [1] 校正的 Einstein-Hilbert 项 (16)

$$
\boldsymbol{L}_{hd}=\frac{1}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}(\varepsilon_1L^2R^2+\varepsilon_2L^2C^2+\varepsilon_3L^4R^3+\varepsilon_4L^4RC^2+\varepsilon_5L^4C_{abcd}C^{cdef}C^{ab}{}_{ef}),\tag{32}
$$

其中 L 作为某些紫外长度尺度已被插入以确保 ε_i 无量纲。首先，根据方程 (31)，AdS 半径的变换如下：

$$
\frac{12}{l_e^2}=\frac{12}{l^2}+\varepsilon_3L^4(\frac{12}{l^2})^3=-R.\tag{33}
$$

[1] 这里我们忽略了所有的二次项和三次项，因为它们的修正项由于所涉及的 Kerr-AdS 度规具有 Ricci 张量的迹为零部分 $\mathcal{R}_{ab}=0$ 以及一个方向反转等距 $\theta\to\pi-\theta$ 而消失。

然后我们采用在 [27] 中设计的小技巧来将完整的体作用量分解为以下形式：

$$I' = \int_M (\boldsymbol{L}'_{eh} + \boldsymbol{L}'_{hd}) \tag{34}$$

其中

$$\boldsymbol{L}'_{eh} = \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}(R + \frac{6}{l_e^2}), \quad \boldsymbol{L}'_{hd} = \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}(\frac{6}{l^2} - \frac{6}{l_e^2}) + \boldsymbol{L}_{hd}. \tag{35}$$

鉴于前一节中的详细分析，可以通过对相应的体 $[I'_E]$ 进行计算，在 Kerr-AdS 度规和纯 AdS 度规下使用 l_e 作为 AdS 半径来获得一次修正的吉布斯自由能。其根本原因是与在 [10] 中对渐近平坦情况所记录的相同，可以概括如下。首先，正如上一节末尾指出的那样，关联边界的项不会对吉布斯自由能作出贡献。此外，根据方程 (2) 和方程 (5)，从 $\boldsymbol{L}'_{eh}$ 在完全一级修正解上评估得到的对吉布斯自由能的贡献与在前述 Kerr-AdS 度量上的评估结果相同，因为它们之间的差异仅来源于边界项 $\int_\infty [\boldsymbol{F}_E] = \int_\infty d\tau \wedge \frac{\partial}{\partial\tau} \cdot \boldsymbol{F}_E = \beta \int_{\mathcal{S}} \xi \cdot [\boldsymbol{F}] = 0$ 和 $\boldsymbol{F}_E = -i\boldsymbol{F}$。最后但同样重要的是，由全一阶修正解评估的一阶修正吉布斯自由能中来自 $\boldsymbol{L}'_{hd}$ 的贡献与在上述 Kerr-AdS 度规上评估的相同，因为它们之间的差异，由方程 (2) 中的第一项决定，显然从 ε_i 的二阶开始，其中一个 ε_i 来自 $\boldsymbol{L}'_{hd}$ 中的系数，另一个 ε_i 则来自由高导数项诱导的度规变化。

鉴于此，我们首先计算 $\boldsymbol{L}'_{eh}$ 对 $[I'_E]$ 的总体贡献。因此，我们有

$$\int_{BH} \boldsymbol{L}'_{ehE} = \frac{\beta}{16\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_{r_+}^{\bar{r}} dr \frac{6}{l_e^2}\sqrt{|g|} = \frac{\beta(\bar{r} - r_+)(\bar{r}^2 + r_+\bar{r} + r_+^2 + a^2)}{2l_e^2\Xi} \tag{36}$$

和

$$\int_{AdS} \boldsymbol{L}'_{ehE} = \frac{\beta}{16\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^{\bar{r}} dr \frac{6}{l_e^2}\sqrt{|g|} = \frac{\beta}{2l_e^2\Xi}(\bar{r}^3 + a^2\bar{r} - ml_e^2) + \mathcal{O}(\frac{1}{\bar{r}}), \tag{37}$$

其中使用了 $\sqrt{|g|}_{BH} = \frac{rU\sin\theta}{\Xi}$ 和 $\sqrt{|g|}_{AdS} = \frac{\sqrt{V(\bar{r})-2m}}{\sqrt{V(\bar{r})}}\frac{rU\sin\theta}{\Xi}$。然后通过背景减除，得到对 $[I'_E]$ 的贡献为

$$-\frac{\beta(r_+^3 + a^2 r_+ - ml_e^2)}{2l_e^2\Xi} \tag{38}$$

取极限 $\bar{r} \to \infty$ 而得。同样地，并且对于 Kerr-AdS 度规有

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{48m^2(r^6 - 15a^2r^4x^2 + 15a^4r^2x^4 - a^6x^6)}{(r^2 + a^2x^2)^6}, \\ C_{abcd}C^{cdef}C^{ab}{}_{ef} &= \frac{96m^3r(r^8 - 36a^2r^6x^2 + 126a^4r^4x^4 - 84a^6r^2x^6 + 9a^8x^8)}{(r^2 + a^2x^2)^9} \end{aligned} \tag{39}$$

，可以进一步得到对 $[I'_E]$ 从 $\boldsymbol{L}'_{hd}$ 的相应贡献。因此，我们得到了以下一阶校正后的吉布斯自由能

$$\begin{aligned} G \simeq & -\frac{r_+^3 + a^2r_+ - ml_e^2}{2l_e^2\Xi} + (12\varepsilon_1\frac{L^2}{l_e^2} - 216\varepsilon_3\frac{L^4}{l_e^4})\frac{r_+^3 + a^2r_+ - ml_e^2}{l_e^2\Xi} - (4\varepsilon_2 - 48\varepsilon_4\frac{L^2}{l_e^2})\frac{L^2m^2r_+(r_+^2 - a^2)}{\Xi(r_+^2 + a^2)^3} - \\ & 4\varepsilon_5\frac{L^4m^3(7r_+^6 - 35a^2r_+^4 + 21a^4r_+^2 - a^6)}{7\Xi(r_+^2 + a^2)^6}, \end{aligned} \tag{40}$$

其中 $\simeq$ 表示该方程在一阶的 ε_i 处成立。

为了从上述大规范系综中的吉布斯自由能获得其他热力学量的相应高阶导数修正，我们应该将 m 以及 r_+ 和 a 看作是通过方程 (20) 隐式地依赖于 T 和 Ω 的函数，由此可以得到以下偏导数

$$\begin{aligned} &\frac{\partial r_+}{\partial T} = \frac{4\pi r_+^2 l_e^2(r_+^2 - a^2)}{4r_+^4 - (r_+^2 + l_e^2)(r_+^2 + a^2)}, \quad \frac{\partial r_+}{\partial\Omega} = \frac{4al_e^2r_+^3}{4r_+^4 - (r_+^2 + l_e^2)(r_+^2 + a^2)}, \\ &\frac{\partial a}{\partial T} = \frac{8\pi a l_e^4\Xi r_+^3}{[4r_+^4 - (r_+^2 + l_e^2)(r_+^2 + a^2)](r_+^2 + l_e^2)}, \quad \frac{\partial a}{\partial\Omega} = \frac{3r_+^6 + (8a^2 - l_e^2)r_+^4 + a^2(a^2 + 4l_e^2)r_+^2 + a^4l_e^2}{[4r_+^4 - (r_+^2 + l_e^2)(r_+^2 + a^2)](1 + \frac{r_+^2}{l_e^2})}. \end{aligned} \tag{41}$$

然后可以计算出相应的第一阶修正熵、角动量和质量如下：

$$
\begin{aligned}
S=&-\frac{\partial G}{\partial T}\simeq\frac{\pi(r_+^2+a^2)}{\Xi}-\varepsilon_1\frac{24\pi L^2(r_+^2+a^2)}{l_e^2\Xi}+\varepsilon_2\frac{4\pi L^2(r_+^2+l_e^2)}{l_e^2\Xi}+\varepsilon_3\frac{432\pi L^4(r_+^2+a^2)}{l_e^4\Xi}-\varepsilon_4\frac{48\pi L^4(r_+^2+l_e^2)}{l_e^4\Xi}\\
&-\varepsilon_5\frac{8\pi L^4m^2[a^8(3l_e^2+r_+^2)-6a^6r_+^2(3l_e^2+11r_+^4)-28a^4r_+^4(2l_e^2-7r_+^2)-14a^2r_+^6(l_e^2+r_+^2)+21r_+^8(l_e^2-r_+^2)]}{7\Xi(r_+^2+a^2)^5[4r_+^4-(r_+^2+a^2)(r_+^2+l_e^2)]},
\end{aligned}\tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
J=&-\frac{\partial G}{\partial\Omega}\simeq\frac{ma}{\Xi^2}-\varepsilon_1\frac{24maL^2}{l_e^2\Xi^2}+\varepsilon_2\frac{4maL^2}{l_e^2\Xi^2}+\varepsilon_3\frac{432maL^4}{l_e^4\Xi^2}-\varepsilon_4\frac{48maL^4}{l_e^4\Xi^2}\\
&+\varepsilon_5\{\frac{4m^2L^4[-a^{11}(r_+^2+l_e^2)+a^9r_+^2(35l_e^2+43r_+^2)-2a^7r_+^2(9l_e^4-5l_e^2r_+^2+18r_+^4)+10a^5r_+^4(l_e^4-3l_e^2r_+^2-28r_+^4)]}{7l_e^2\Xi^2r_+(r_+^2+a^2)^5[4r_+^4-(r_+^2+a^2)(r_+^2+l_e^2)]}\\
&+\frac{4m^2L^4[7a^3r_+^6(6l_e^4+17l_e^2r_+^2+11r_+^4)+7ar_+^8(2l_e^4-19l_e^2r_+^2+3r_+^4)]}{7l_e^2\Xi^2r_+(r_+^2+a^2)^5[4r_+^4-(r_+^2+a^2)(r_+^2+l_e^2)]}\},
\end{aligned}\tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
M=&G+TS+\Omega J\simeq\frac{m}{\Xi^2}-\varepsilon_1\frac{24mL^2}{l_e^2\Xi^2}+\varepsilon_2\frac{4mL^2}{l_e^2\Xi^2}+\varepsilon_3\frac{432mL^4}{l_e^4\Xi^2}-\varepsilon_4\frac{48mL^4}{l_e^4\Xi^2}\\
&-\varepsilon_5\{\frac{4m^2L^4[2a^{10}l_e^2-a^8(l_e^4+36l_e^2r_+^2+85r_+^4)+4a^6r_+^2(5l_e^4+9l_e^2r_+^2+55r_+^4)-14a^4r_+^4(l_e^4+12l_e^2r_+^2-7r_+^4)]}{7l_e^2\Xi^2r_+(r_+^2+a^2)^5[4r_+^4-(r_+^2+a^2)(r_+^2+l_e^2)]}\\
&+\frac{4m^2L^4[14a^2r_+^6(-2l_e^4+3l_e^2r_+^2+2r_+^4)+7r_+^8(l_e^4+4l_e^2r_+^2-3r_+^4)]}{7l_e^2\Xi^2r_+(r_+^2+a^2)^5[4r_+^4-(r_+^2+a^2)(r_+^2+l_e^2)]}\}.
\end{aligned}\tag{44}
$$

通过将上述修正后的质量和角动量与前一节末尾所述的 ADM 公式获得的结果进行比较，可以知道除了与 ε_5 相关的一项外，高阶导数项不会修正出现在所考虑的 Kerr-AdS 度规中的参数 m 和 a。另一方面，根据方程 (10)，在分岔面 $\mathcal{B}$ 上的 $\nabla_d\xi_b=\kappa\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{db}$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}=\bar{\boldsymbol{\epsilon}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$，其中 $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ 是 $\mathcal{B}$ 的次法线，$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ 是在 $\mathcal{B}$ 处诱导出的体积，黑洞熵可以由 Wald 公式表示为 [28, 29]

$$
S=-2\pi\int_{\mathcal{B}}\psi^{cadb}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{db}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{ca}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}},\tag{45}
$$

从而一阶修正后的熵可以写成如下形式：

$$
S\simeq\frac{A(\mathcal{B})}{4}+\frac{\delta A(\mathcal{B})}{4}-2\pi\int_{\mathcal{B}}\psi_{hd}^{cadb}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{db}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{ca}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}.\tag{46}
$$

这里 $A(\mathcal{B})$ 表示 AdS 曲率半径为 l_e 的 Kerr-AdS 黑洞的视界面积，由下式给出：

$$
A(\mathcal{B})=\int_{\mathcal{B}}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}=\frac{4\pi(r_+^2+a^2)}{\Xi},\tag{47}
$$

其中我们使用了 $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}=\frac{(r_+^2+a^2)\sin\theta}{\Xi}d\theta\wedge d\phi$。当 $\delta A(\mathcal{B})$ 表示由于全一阶修正黑洞解与 Kerr-AdS 度规的偏差而引起的面积校正，这种偏差是由高导数项造成的。另一方面，在上述 Kerr-AdS 黑洞处计算方程 (46) 中的第三项，则会得到来自高导数项的其余校正。特别是，通过 $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}=\frac{r_+^2+a^2\cos^2\theta}{r_+^2+a^2}dt\wedge dr$ 和

$$
\begin{aligned}
\psi_{hd}^{abcd}=&\frac{1}{16\pi}\{(2\varepsilon_1L^2R+3\varepsilon_3L^4R^2+\varepsilon_4L^4C^2+\varepsilon_5L^4C^2)g^{a[c}g^{d]b}+(2\varepsilon_2L^2+2\varepsilon_4L^4R)C^{abcd}+\\
&3\varepsilon_5L^4[C^{abmn}C_{mn}{}^{cd}-(C^{mnpa}C_{mnp}{}^{[c}g^{d]b}-C^{mnpb}C_{mnp}{}^{[c}g^{d]a})]\},
\end{aligned}\tag{48}
$$

我们可以明确地计算如下：

$$
\begin{aligned}
-2\pi\int_{\mathcal{B}}\psi_{hd}^{cadb}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{db}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{ca}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}=&-\varepsilon_1\frac{24L^2\pi(r_+^2+a^2)}{l_e^2\Xi}+\varepsilon_2\frac{4\pi L^2(r_+^2+l_e^2)}{l_e^2\Xi}+\varepsilon_3\frac{432\pi L^4(r_+^2+a^2)}{l_e^4\Xi}-\varepsilon_4\frac{48\pi L^4(r_+^2+l_e^2)}{l_e^4\Xi}\\
&+\varepsilon_4\frac{48\pi L^4m^2(a^4-10a^2r_+^2+5r_+^4)}{5\Xi(r_+^2+a^2)^4}+\varepsilon_5\frac{24\pi L^4m^2(a^4-10a^2r_+^2+5r_+^4)}{5\Xi(r_+^2+a^2)^4}.
\end{aligned}\tag{49}
$$

通过检查方程 (42) 和 (49)，我们发现与 ε_1、ε_2 和 ε_3 相关的高阶导数项不会引起黑洞视界面积的额外变化，而与 ε_4 和 ε_5 相关的项则会引起这种变化。

为了简单验证我们的结果的有效性，我们希望通过将其应用于由 Gauss-Bonnet 项

$$R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd} = \frac{1}{6}R^2 - 2\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} + C^2, \tag{50}$$

引起的修正来结束这一节，众所周知，在四维中这是一个拓扑项，并不会纠正爱因斯坦引力的解。

一方面，从上一节结尾所做的备注可以得出，来自 R^2 项对 ADM 质量和角动量的修正被来自 C^2 项的修正精确抵消。因此，我们最终得到未被修正的 ADM 质量和角动量，这与方程（43）和方程（44）一致。另一方面，注意当在 Kerr-AdS 黑洞上评估时 $\mathcal{R}_{ab} = 0$，因此通过方程 (49) 得到的相应熵修正恰好与通过方程 (42) 得到的结果相同，正如预期的那样。

IV. 结论

通过有效的背景减除方法，我们已经完成了由黎曼张量立方项及更高阶导数项在大正则系综中对一阶修正的吉布斯自由能以及相应的熵、角动量和质量的计算。我们的结果的有效性进一步通过对高斯-邦奈项引起的校正进行检验而得到证实。尽管我们的策略不需要我们通过高阶导数项来求解完整的一阶修正黑洞解，但我们可以通过对欧几里得方法获得的结果与洛伦兹签名下 ADM 和 Wald 公式获得的结果进行比较，提取一些关于一阶修正黑洞解的通用信息。

其中，有两个值得关注的问题值得进一步研究。一个是通过比里曼张量三次以上的高阶导数项对我们所研究的 Kerr-AdS 黑洞的一阶修正。另一个是将背景减除法应用于计算更高维度旋转黑洞热力学量的高阶导数修正，这在使用协变反演计数器方法时显得更为复杂。我们希望在未来其他地方报告这方面的工作。

ACKNOWLEDGMENTS

该项工作得到国家重点研发计划（编号：2021YFC2203001）和国家自然科学基金（编号：12075026 和 12361141825）的部分支持。

[1] J. B. Hartle and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **13**, 2188 (1976).
[2] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **15**, 2752 (1976).
[3] S. W. Hawking and D. N. Page, Commun. Math. Phys. **87**, 577 (1983).
[4] S. W. Hawking and G. T. Horowitz, Class. Quant. Grav. **13**, 1487 (1996).
[5] G. W. Gibbons, M. J. Perry, and C. N. Pope, Class. Quant. Grav. **22**, 1503 (2005).
[6] M. Bianchi, D. Z. Freedman, and K. Skenderis, Nucl. Phys. B **631**, 159 (2002).
[7] I. Papadimitriou and K. Skenderis, JHEP **0508**, 004 (2005).
[8] R. B. Mann and D. Marolf, Class. Quant. Grav. **23**, 2927 (2006).
[9] W. Guo, X. Guo, X. Lan, H. Zhang, and W. Zhang, Phys. Rev. D **111**, 084088 (2025).
[10] H. S. Reall and J. E. Santos, JHEP **04**, 021 (2019).
[11] C. Cheung, J. Liu, and G. N. Remmen, Phys. Rev. D **100**, 046003 (2019).
[12] S. Cremonini, C. R. T. Jones, J. T. Liu, and B. McPeak, JHEP **09**, 003 (2020).
[13] N. Bobev, A. M. Charles, K. Hiristov, and V. Reys, Phys. Rev. Lett. **125**, 131601 (2020).
[14] J. F. Melo and J. E. Santos, Phys. Rev. D **103**, 066008 (2021).
[15] N. Bobev, V. Dimitrov, V. Reys, and A. Vekemans, Phys. Rev. D **106**, L121903 (2022).
[16] Y. Xiao, Phys. Rev. D **106**, 064041 (2022).

[17] D. Cassani, A. Ruiperez, and E. Turetta, JHEP **11**, 059 (2022).
[18] T. Noumi and H. Satake, JHEP **12**, 130 (2022).
[19] D. Cassani, A. Ruiperez, and E. Turetta, JHEP **06**, 203 (2023).
[20] L. Ma, Y. Pang, and H. Lu, JHEP **06**, 087 (2023).
[21] M. Zatti, JHEP **11**, 185 (2023).
[22] P. Hu, L. Ma, H. Lu, and Y. Pang, Sci. China Phys. Mech. Astron. **67**, 280412 (2024).
[23] L. Ma, P. Hu, Y. Pang, and H. Lu, Phys. Rev. D **110**, L021901 (2024).
[24] P. A. Cano and M. David, JHEP **03**, 036 (2024).
[25] S. Massai, A. Ruiperez, and M. Zatti, JHEP **04**, 150 (2024).
[26] D. Cassani, A. Ruiperez, and E. Turetta, JHEP **05**, 276 (2024).
[27] Y. Xiao and Y. Liu, Phys. Rev. D **110**, 104043 (2024).
[28] R. M. Wald, Phys. Rev. D **48**, R3427 (1993).
[29] V. Iyer and R. M. Wald, Phys. Rev. D **50**, 846 (1994).