

动力系统中的拓扑状态空间推断

Mishal Assif P K

mishal2@illinois.edu

Department of Electrical and Computer Engineering, Grainger College of Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL

Yuliy Baryshnikov

ymb@illinois.edu

Departments of Mathematics and Electrical and Computer Engineering, Grainger College of Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL

Abstract

我们提出了一种计算管道，旨在从动态系统轨迹样本的输出函数观察中恢复底层相空间的拓扑结构。

Keywords: 状态空间实现, 拓扑数据分析, 非线性动力学。

1. 介绍

状态空间实现的问题，即动态系统潜在空间和观测函数的重构，在系统理论中仍然是基础性的。核心在于基于仅有的观测数据或系统输出来重建或识别一个能够准确描述系统内部动力学的状态空间模型。这个问题起源于 Richard Bellman 和 Rudolf Kalman 的工作，他们在 20 世纪 60 年代开创性的研究为现代系统理论 (Schutter, 2000) 奠定了基础。

线性模型的状态空间实现问题已经被广泛研究。在这种情况下，可以依赖经典优美的解决方案，这些方案本质上基于多项式环上的模理论。线性使得系统动力学的描述清晰且可处理，其中系统动力学可以被建模为线性变换，提供了状态空间实现的成熟方法。

向非线性系统扩展，然而，引入了相当大的复杂性。非线性系统通常表现出复杂的特性，包括分岔和混沌。因此，实现或重构这类系统的状态空间远没有那么简单。在这篇笔记中，我们尝试利用一个数学理论作为指导来解决状态空间的非线性版本问题，就像 LTI 实现理论依赖于单变量多项式环上的模结构理论一样。

1.1. 设置

考虑一个动力系统 (M, ϕ) ，其中 M 是一个拓扑空间， $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ 是一个单参数变换群，即 ϕ 是一个连续函数

$$\mathbb{R} \times M \ni (t, m) \rightarrow \phi(t, m) := \phi_t(m) \in M \text{ such that } \phi_0(m) = m, \phi_t(\phi_s(m)) = \phi_{t+s}(m)$$

在我们的大多数例子中， M 将是一个光滑紧致流形，并且变换群将由一个向量场的流 $v: M \rightarrow TM$ 生成。我们将记 $\pi_x: \mathbb{R} \rightarrow M$ 为 v 的轨迹，使得

$$\pi_x(0) = x, \frac{d\pi_x(t)}{dt} = v(\pi_x(t)). \quad (1)$$

请注意,在这种情况下,变换群 ϕ 至少与向量场 v 一样光滑。

我们在这里研究的问题是:这样的动力系统上的空间 M 的拓扑是否可以从有限数量的轨迹 $\{\pi_{x_k}\}_{k=1,\dots,n}$ 中恢复出来的 M 。我们将看到这是确实可行的,并提供一个原理性的计算流程和一种从这些轨迹中提取 M 拓扑信息的方法论。

1.2. 数据解析设置

我们感兴趣的是建立一个算法框架,以从观测数据推断拓扑结构。为了使一般问题更易于进行此类数据分析,我们在问题设定中添加了以下约束:

1. 数据是在离散的时间间隔内收集的,无论是来自传感器的实际读数还是数值算法或模拟的结果。此外,这些读数只会在一个有限时间范围内被收集。我们无法期望得到从某个点 x 开始的完整轨迹 π_x 。相反,我们将获得通过在轨迹上以规则的时间间隔进行有限采样而得到的离散轨迹。假设采样间隔 δ 对所有轨迹都是恒定的,并且之后将不再在符号中标注这一点。
2. 我们只能观察到根据某种分布初始化的有限样本轨迹,这种分布可能在我们的控制之下,也可能不在。
3. 我们观察的不是状态空间 M 的点(该空间是未知的),而是这样一个平滑输出函数

$$g: M \rightarrow V \cong \mathbb{R}^p$$

,使得只有 $g^n(x) := (g(\pi_x(-l\delta)), g(\pi_x(-(l-1)\delta)), \dots, g(\pi_x(k\delta))) \in V^n, n = k + l + 1$ 是我们可获得的信息。 V 的维度可以远小于 M 的维度,这使问题更具挑战性。

因此我们在这里研究的整体问题就是:可以从动力系统在 M 上均匀采样的轨迹 $\{g^n(\pi_{x_\alpha})\}_{\alpha=1,\dots,N}$ 的有限集合中提取出关于 M 的哪些拓扑信息?

1.3. 塔肯嵌入

关于状态实现的问题,有一个众所周知的答案,归因于 Takens 嵌入定理 (Takens, 2006)。

定理 1.1 设 M 是一个紧致光滑流形, $n \geq 2\dim(M) + 1$ 是一个整数。然后,对于一个通用对 (ϕ, g) , 其中 $\phi: M \rightarrow M$ 是一个 C^2 -微分同胚, 且 g 是 $C^2(M, \mathbb{R})$ 中的一个函数, 映射

$$M \ni x \mapsto (g(x), g(\phi(x)), \dots, g(\phi^{n-1}(x))) \in \mathbb{R}^k$$

是 M 的一个嵌入。

这里的普遍性是以标准方式理解的: 满足此条件的 (ϕ, g) 对构成了此类对所在的巴拿赫流形中的一个开且处处稠密的子集。

Takens 嵌入定理保证, 对于一般的动力系统和观测, 给定从流形 M 上任意一点开始的均匀采样轨迹的无限集合, 其长度超过 M 维度的两倍时, 我们可以精确地恢复 M 到微分同胚。

虽然 Takens 定理令人鼓舞，并暗示我们的问题是可解的，但它并没有解决我们的问题，因为它只是一个纯粹的存在性结果，并没有提供一种可行的方法来从轨迹中重构 M ，即使在所有可能的初始点出发的轨迹都可用的理想情况下也是如此。

在我们的设定中，观察到的样本性质——一个有限样本——本质上与光滑流形 M 不同。然而，正如我们在下文所述，可以从轨迹的有限观测中恢复出拓扑不变量，即状态空间的同调群。

1.4. 相关结果

从观测数据实现非线性动力系统状态空间表示的问题已被许多作者探讨。因此，(Jakubczyk, 1980) 发展了非线性控制系统中 Taken 的嵌入定理的类比，而 (van der Schaft, 1986) 以类似的方式考察动态对函数的作用，最终导致了一种 Koopman 形式主义 (Budišić et al., 2012)。

最近的工作 (Otto et al., 2023) 考虑了使用机器学习方法进行数据驱动的状态空间恢复。在探索此类无模型方法的其他工作中，应提及 (Schmidt and Lipson, 2009; Brunton et al., 2016; Champion et al., 2019)。

2. 数学背景

我们理论的动机来自于 Cohen、Jones 和 Segal 的精彩工作 (Cohen et al., 1995)，然后将其与已建立的拓扑数据分析 (TDA) 工具 (Edelsbrunner and Harer, 2010) 相结合。

2.1. 基本定义

这是他们的设置。假设 M 是一个光滑闭黎曼流形，并且 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是 M 上的一个光滑莫尔斯函数。(Cohen et al., 1995) 的关键思想是描述一个组合构造，该构造从梯度向量场 ∇f 的流线空间重构 M 的拓扑结构。

为此，他们引入了富集范畴 $\mathcal{C}_f$ 。该范畴的对象是 f 的临界点，两个临界点 $\mathbf{a}_-, \mathbf{a}_+$ 之间的态射空间 $\text{Mor}(\mathbf{a}_-, \mathbf{a}_+)$ 是梯度向量场 $\mathbf{v}$ 的流线空间 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ 的闭包，使得当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时， $\gamma(t) \rightarrow \mathbf{a}_\pm$ 。

通过连接平滑的流线(其目标和源分别匹配)可以定义一个连续合成 $\text{Mor}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \times \text{Mor}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ 。

关键结果是 (Cohen et al., 1995)，即由 $\mathcal{BC}_f$ 表示的范畴的分类空间 $\mathcal{C}_f$ 同伦等价于 M 。回忆一下，一个范畴的分类空间 $\mathcal{BC}_f$ 是一个单纯空间，其 k -单纯形的空间由 $\mathcal{C}_f$ 中的可复合态射的 k -元组参数化，模去一种自然的等同程序。总体而言，这些识别操作产生了一种将各部分(拓扑空间 $\text{Mor}(\cdot, \cdot)$) 粘合在一起的组合过程，结果形成一个拓扑空间，即该范畴的分类空间 $\mathcal{C}_f$ 。这个空间与原流形 M 的关系由以下定理给出：

1. 范畴理论的语言(可以在 (Riehl, 2017) 等地方查阅)可以避免使用，但由于篇幅原因我们还是遵循原始的表述。这里的丰富范畴仅仅意味着任何对象之间的态射携带一个额外的结构(拓扑空间的)。

定理 2.1 ((Cohen et al., 1995)) 设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是闭黎曼流形 M 上的莫尔斯函数。设 $\mathcal{C}_f$ 是一个拓扑范畴，其对象是 f 的临界点，其两个临界点之间的态射空间是由梯度向量场 f 的分段流线连接这两个临界点构成的空间，并且态射的复合由分段流线的复合给出，则

1. 的分类空间 $\mathcal{BC}_f$ 同伦等价于 M , $\mathcal{BC}_f \simeq M$.
2. 的分类空间 $\mathcal{BC}_f$ 同胚于 M , 如果 f 是一个 (典型) 莫尔斯函数, 其梯度流满足莫尔斯-斯梅尔横截性条件, $\mathcal{BC}_f \cong M$.

2.2. 拓扑数据分析

我们简要介绍相关工具 (参见 (Edelsbrunner and Harer, 2010) 作为一般参考)。

令 X 是一个紧致度量空间 (例如, 一个流形)。给定一组从 X 中抽取的有限样本点 $\mathcal{A} = \{x_\alpha\}, \alpha \in A$ (以及这些点之间的诱导距离), 持久同调是一种工具, 可以从离散数据 $\mathcal{A}$ 恢复出空间 X 的拓扑特征 (例如, 在维度 $k \in \mathbb{N}$ 中的同调群 $H_k(X)$)。²

有限个开子集 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的集合覆盖 X 是一个好的覆盖, 如果这些子集的任意交集要么是空集, 要么是可缩的。在这种情况下, 经典神经定理表明一个组合对象——由子集 $S \subset A$ 形成的单纯复形, 其中开集 $\bigcap_{\alpha \in S} U_\alpha$ 的交集是非空的——是同伦等价于 X , 从而开启了一种计算 X 同调的有效程序。

一组开度量球 $U_\alpha = B_r^\circ(x_\alpha), \alpha \in A$ 可以作为这样一个开集, 如果能够克服两个困难。

一是检测这些球体的非空交集可能很困难。一个有效的补救措施是使用而不是神经元与 维托里奥斯-里普斯 单纯复形: 在这里, 如果所有 两两之间 点之间的距离 $x_\alpha, \alpha \in S$ 都不超过 r , 则宣布集合 $S \subset A$ 形成一个单纯。这在至少对于足够密集的样本, 对适当的 r (Latschev, 2001) 是有效的。

另一个困难是找到一个合适的尺度 r : 选择得太小, 则没有非平凡的单纯形; 选择得太大, 则结果空间是一个高维的单纯形。为了解决这个问题, 人们考虑一个过滤单纯复形, 即一系列递增的单纯复形 $\Sigma_r, r \in \mathbb{R}, \Sigma_r \subset \Sigma_{r'}, \text{ for } r < r'$ 。在我们的上下文中, Σ_r 是对应于截断距离 r 的 Vietoris-Rips 复形。

在这种设置下, 可以追踪在 Σ_r 中的周期模块和边界模块随着 r 的演化。一个持久的周期, 即对于较小的 r 出现但直到较大的 r 才被修补, 被认为代表空间 X 的真实同调。在过去二十年中发展起来的理论允许建立高效的计算程序来找到它们 (Edelsbrunner and Harer, 2010)。

3. 从观测中推断拓扑结构

我们将部署持久同调工具来处理我们定义的轨迹样本空间上的度量, 依赖于直观的图像, 从而推广 Cohen-Jones-Segal (CJS) 构造。

与他们的做法形成对比, 我们允许任意平滑动力学, 不需要它是梯度动力学。

2. 同调群在维度 k 是一个向量空间, 其维度反映了 X 中 k 维洞的数量。虽然空间还有其他重要的拓扑特征, 但同调群特别容易通过算法计算, 因此 TDA 的很大一部分关注这些群。

3.1. 近似值

CJS 设置与 Takens 嵌入的关键差异在于它依赖于无限长的轨迹。这迫使任何计算实现都需要相应的调整。

考虑片段的空间 $\Pi_T = \{\pi_t(x)(t), x \in M, t \in [-T, T]\}$, 这些片段的轨迹长度为 $2T$ 。它们由中心参数化 x (从而使空间与 M 微分同胚)。按照标准方式定义轨迹之间的距离, 使用 C^0 或类似范数实际上会重现 Takens (或 Koopman) 范式。相反, 我们使用的距离考虑了轨迹的长子区间的接近程度。

由于我们打算从观测中恢复状态空间, 我们需要测量的是观测到的值轨迹之间的距离。这些考虑使我们得出以下结论

定义 3.1 (松弛距离) 固定 $T, n = 2k + 1$ 和 δ 使得 $T = k\delta$ 。对于给定的观测函数 $g : M \rightarrow V \cong \mathbb{R}^d$, 令

$$y^n(x) := (g(\pi_x(-k\delta)), \pi_x(-(k-1)\delta)) \dots, g(\pi_x((k-1)\delta)), g(\pi_x(k\delta))) \in V^n.$$

设 $y_1^n = y^n(x_1), y_2^n = y^n(x_2)$ 是 V^n 的两个元素 (即, 动力系统在 M 上的两条长度为 n 的轨迹样本)。

我们说如果某些 $s \leq t$ 的子序列

$$(y_1^n(i), y_1^n(i+1), \dots, y_1^n(i+n-s)) \text{ and } (y_2^n(j), y_2^n(j+1), \dots, y_2^n(j+n-s))) \in V^{n-s}$$

处于最多 ϵ 的 sup 距离, 则 y_1^n 和 y_2^n 处于最多 (t, ϵ) 的松弛距离。

我们说如果 $y_1^n = y^n(x_1), y_2^n = y^n(x_2)$ 成立, 则 $x_1, x_2 \in M$ 处于松弛距离 (t, ϵ) 。

换句话说, 如果沿着轨迹 π_{x_1} 和 π_{x_2} 的测量值在至少 L 步内彼此 ϵ 接近, 则 $x_1, x_2 \in M$ 处于松弛距离 (t, ϵ) 处, 对于某些 $L \geq n - t$ 。

引理 3.2 如果 y_1^n, y_2^n 在松弛距离 (s, ϵ) 处, 并且 y_2^n, y_3^n 在松弛距离 (s', ϵ') 处, 那么 y_1^n, y_3^n 在松弛距离处最多为 $(s + s', \epsilon + \epsilon')$ 。

证明 有 s 个索引在 y_1^n 和 y_2^n 的端点处, 其距离大于 ϵ , 并且有 s' 个索引在 y_2^n 和 y_3^n 的端点处, 其距离大于 ϵ' 。这些索引的并集之外, 其长度最多为 $s + s'$, 轨迹对中的元素 (y_1^n, y_2^n) 和 (y_2^n, y_3^n) 分别在距离 ϵ 和 ϵ' 内。这意味着元素 (y_1, y_3) 在长度为 $s + s'$ 的一组索引之外距离 $\epsilon + \epsilon'$ 内。■

作为推论, 对于任意凸齐次次数 1 函数 d_π 的 s 和 d , $d_\pi(s, d)$ 满足三角不等式。松弛距离自然产生一个双过滤, 其顶点代表来自动力系统的观测轨迹, 如果两个轨迹在参数 (k, ϵ) 处的松弛距离为 (k, ϵ) , 则这两个轨迹之间出现一条边。

3.2. Vietoris-Rips 复形在松弛距离中的应用

考虑动态系统 (1) 的一个样本 $\mathcal{A}$, 该样本包含 N 条轨迹。对于这些轨迹中的每一条 $\pi_{x_l} : [-T, T] \rightarrow M, l = 1, \dots, N$, 我们假设在等间距的时间间隔内观察到了一个输出函数 $g : M \rightarrow V$, 从而得到一组长度为 n 的观测值集合 y_l^n 。我们的目标是从这组可观测量中恢复 M 的拓扑结构。

松弛距离 (以及引理 3.2) 的定义为通过 Vietoris-Rips 复形以松弛距离构建滤子提供了一种灵活的方法。

即, 我们将空间 $\Sigma(t, r)$ 定义为对应参数 (t, r) 的 $\mathcal{A}$ 的 Vietoris-Rips 复形。换句话说, $\Sigma(t, r)$ 的单纯形由条件

$$\Sigma(t, r) = \{\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_d) : \text{slack distance between } x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j} \text{ is at most } (t, \epsilon)\}.$$

给出。

两个轨迹之间的松弛距离在固定松弛 $t \leq n$ 下可以使用动态规划在 $O(n^2 \log(n))$ 时间内计算出来, 对应的双过滤器可以在 $O(n^2 \log(n)N^2)$ 时间内构建。该算法还需要 $O(n^2)$ 的空间。

算法的伪代码如下所示, 即算法 1。

Algorithm 1 构建 MSD 双过滤的算法

```

计算距离矩阵  $d(k, l) = \|x_k^i - x_l^j\|$ 
srted_indices  $\leftarrow \text{argsort}(d(k, l))$ 
ms_dist[i] =  $\infty$  for  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ 
for  $i, j \in \text{srted\_indices}$  do
    init_indices[i, j] =  $i, j$ 
    final_indices[i, j] =  $i, j$ 
    len = 1
    if  $i+1, j+1 \in \text{init\_indices}$  then
        init_indices[i, j] = init_indices[i+1, j+1]
        final_indices[init_indices[i, j]] = final_indices[i, j]
        len += init_indices[i+1, j+1][0] - i
    if  $i-1, j-1 \in \text{final\_indices}$  then
        final_indices[i, j] = final_indices[i-1, j-1]
        init_indices[final_indices[i, j]] = init_indices[i, j]
        len += i - final_indices[i-1, j-1][0]
    ms_dist[len] = min(ms_dist[len],  $d(i, j)$ )
end
```

Data: A pair of trajectories x^i, x^j both of length n

Result: List ms_dist of length n containing the Matching substring distances between x^i and x^j

3.3. 松弛距离和滑动窗口

我们构建过滤器的方案,从动力系统的可观测量轨迹中提取拓扑信息,与 (Perea and Harer, 2015) 中开发的滑动窗口设置在表面上相关。使我们的方法更有效的主要区别在于松弛度,它允许测量两个轨迹移位片段之间的距离。在滑动窗口方法中,没有松弛度允许轨迹在时间偏移后对齐:在某种程度上,从采样轨迹之间的距离拉回的点之间的距离与 M 上的原始度量结构准保形。

在我们的方法中,松弛的存在使得采样轨迹 $y^n(x)$ 接近于采样轨迹 $y^n(\phi(\tau, x))$ 对于有界 τ 实际上调整了底层度量结构以使轨迹 v 变得较小沿着。这种各向异性的度量重缩放应该与 (Ferry and Okun, 1995) 的构造进行比较,在那里,沿着映射 $M \rightarrow N$ 纤维放松黎曼度量导致在某些连通性假设下,在 M 上的所得度量结构的 Gromov-Hausdorff 收敛到那些在 N 上的。

我们猜想我们的算法令人惊讶的有效性可以沿着这些思路进行解释,这是一个独立的项目,将在其他地方继续进行。

4. 计算示例

笔记的其余部分涉及计算示例,我们在其中尝试使用轨迹的有限样本(大小为 N)、沿轨迹长度为 n 的有限观测以及某个松弛参数 t 的松弛距离来重构底层相空间的拓扑。结果显示了关于轨迹片段之间允许距离 r 的持久性图。

4.1. 梯度动力系统: 二维球面上的高度函数

我们将计算流程应用于二维球体 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上的梯度动力系统,该球体以标准意义上的子流形嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中。考虑高度函数

$$S^2 \ni (x, y, z) \mapsto h(x, y, z) = z \in \mathbb{R}$$

, 它将球体上的每个点映射到其 z 坐标,或者假设 z 轴垂直对齐,则映射到该点的高度。

该动力系统的流线正是连接两极的子午线,即函数 z 在 2-球面上的临界点。我们在球体上选取了从随机绘制的点开始的 $N = 400$ 段轨迹。这些轨迹绘于图 1 中。

由 MSSD 算法生成的该组轨迹的持久图也在图 1 中展示。持久图清楚地反映了球体 S^d 的同调在维度 0 和 d 上的秩为 1,并在其他地方消失。

4.2. 梯度动

力系统: 环面上的随机三角函数

我们考虑一个梯度动力系统在 $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ 中嵌入于 $\mathbb{R}^3$ 中的例

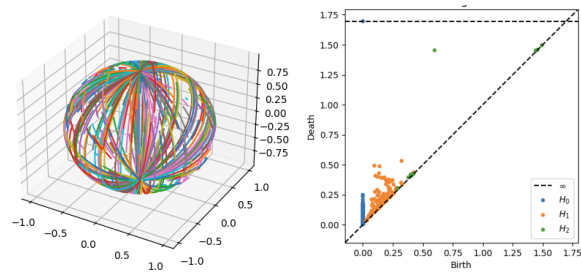


图 1: 球面上高度函数梯度的轨迹段。右: 由这些球面轨迹生成的持久图。这里 $N = 400, n = 15, t = 10, T = 1.5$ 。

子。我们可以用两个参数 $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ 参数化环面。

我们使用了一个随机有限傅里叶多项式 $f(\theta, \phi) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_{i,j} \cos((i+1)\theta + \theta_{i,j}) \cos((j+1)\phi + \phi_{i,j})$ 其中系数 $a_{i,j}$ 是从标准正态分布中采样的。我们在本文中使用了 $k = 2$ 。

我们生成了 $N = 400$ 条轨迹，从随机初始条件中采样。沿着每条轨迹，取 $n = 25$ 个样本，共 $T = 2.5$ 。在这个实验中，我们取 $V = \mathbb{R}^3$ ，可观测量由将环面嵌入到 3 维欧几里得空间给出。

所得轨迹绘制在图 2 的左显示中。对应于 $t = 3$ 的持续性图谱显示在图 2 的右显示中。

2-环面的同调群在维度 0 和 2 中秩为 1，在维度 1 中秩为 2。这一点清晰地反映在持续图 Figure 2 中。

为了验证我们的算法对于标量输出的有效性，我们考虑了一个由 $g(\theta, \phi) = b_0 x(\theta, \phi) + b_1 y(\theta, \phi) + b_2 z(\theta, \phi)$ 给出的随机观测函数，其中系数 (b_0, b_1, b_2) 是从高斯分布中采样的，而函数 x, y, z 是我们将 2-环面嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中的笛卡尔坐标。

因此，我们在图 3 的左侧显示了一组时间序列。持久图显示在右侧，仍然与 $\mathbb{T}^2$ 的同调性清晰匹配。

4.3. 混沌动力系统：洛伦兹系统

我们现在来看由洛伦兹动力系统给出的混沌动力系统的标准示例，在 $\mathbb{R}^3$ (Gilmore, 1998) 中：

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

这里 σ, ρ, β 是我们分别设置为 10, 28, $\frac{8}{3}$ 的参数。

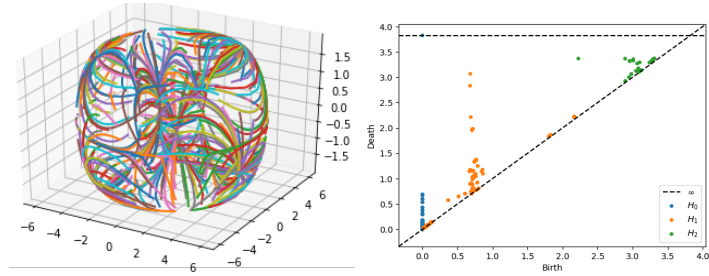


图 2: 在 2-环面上随机向量场的轨迹段。右图：由这些片段生成的持久性图。这里 $N = 400, n = 25, t = 3, T = 2.5$

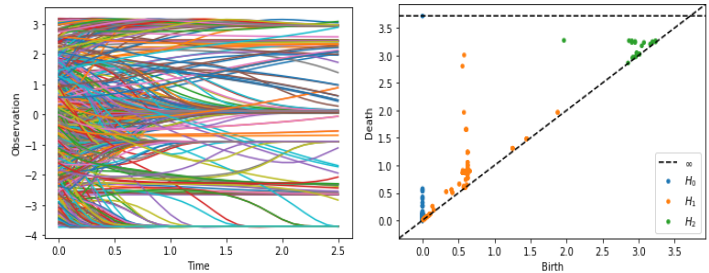
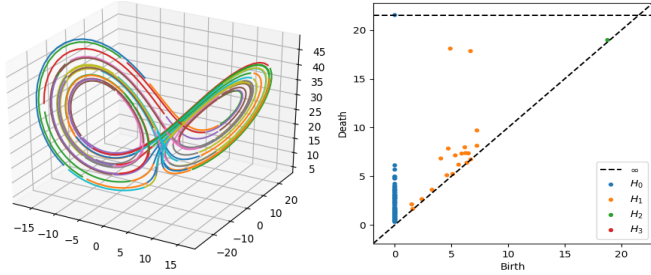


图 3: 在二维环面上随机向量场轨迹的片段。右侧：由这些片段生成的持久图。这里 $N = 650, n = 25, t = 1, T = 2.5$

已知系统在这些参数值下表现出混沌行为。我们从这个动力系统中模拟一条长时间轨迹,并将其分割成 100 段 (系统的双曲性使得这基本上等同于随机采样较短的轨迹)。所得轨迹绘制在图 4 的左侧显示。



由紧输出函数 $g = (x, y, z)$ 导出的松弛距离,其持续图显示如图 4 右侧所示。

图 4: 洛伦兹系统轨迹的片段。右侧: 由这些片段生成的持久性图像。这里 $N = 100, n = 25, t = 20, T = 0.25$

这些结果需要一些解释。虽然承载向量场的外围空间是 $\mathbb{R}^3$, 轨迹本质上是由一个与两个圆的楔和同伦等价的 2 维模板 (Birman and Williams, 1983) 支持的。由于我们不采样远离该模板的轨迹, 因此恢复其拓扑结构并不令人惊讶: 事实上, 在维度 0 中的同调群的秩应该是 1, 在维度 1 中的同调群的秩应该是 2, 其他情况下则消失, 这与图 4 右侧显示的内容一致。

我们也重复了实验, 将轨迹通过一个次数为 3 的随机多项式输出, 系数从高斯分布中抽取。这给出了如图 5 所示的一组时间序列观测值。相应的持久性图仍然与两个圆的楔和同调相匹配。

当我们将轨迹片段的长度 T 增加时, 结果变得更加有趣。当这段时间 T 足够长时, 轨迹段将两次撞击模板的屏障 (在那里流分裂为模板中的两个不同分支)。概念上, 这将导致一个重构后的模板, 现在具有 4 个圆的楔形同伦类型。

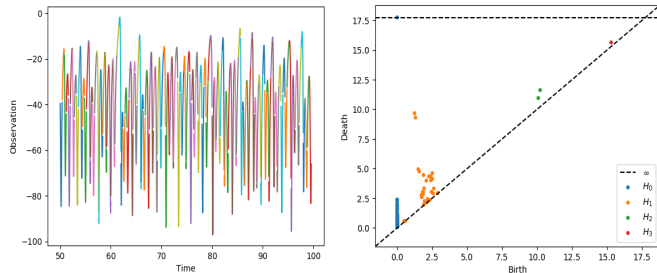
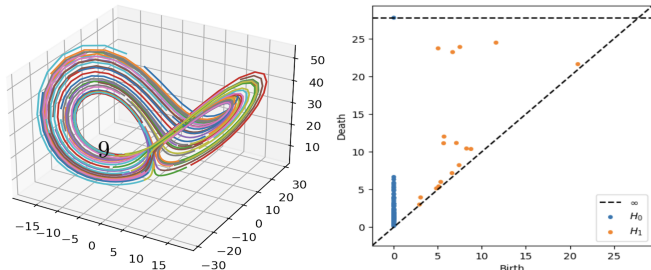


图 5: 洛伦兹系统轨迹观测段。右侧: 由这些段生成的持久图。这里 $N = 150, n = 25, t = 10, T = 0.25$

确实, 我们在图 6 中观察到了这一点。

或许最直观的思考这一现象的方式是将其与一个拓扑数据分析绘制出的康托集 $X \subset [0, 1]$ 的图像进行比较, 该康托集通过迭代地从区间中移除中间三分之一而获得, 初始时为单位区间: 在低分辨率 $1/18 \leq r < 1/6$ 下, 以点集 X 中的点为中心的 r 球的并集同伦等价于两个点; 在分辨率 $1/54 \leq r < 1/18$ 下, 即 4 个点等等。

鉴于洛伦兹型动力系统的吸引子是 cantor, 相应同调的这种倍增最终并不令人意外。



致谢

作者部分得到了 AFOSR MURI
动力学混合 - 拆解与聚合的支持。

References

- Joan S Birman and Robert F Williams. Knotted periodic orbits in dynamical systems i: Lorenz's equations. *Topology*, 22(1):47–82, 1983.
- Steven L. Brunton, Joshua L. Proctor, and J. Nathan Kutz. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113:3932–3937, 2016.
- Marko Budišić, Ryan Mohr, and Igor Mezić. Applied Koopmanism. *Chaos*, 22(4):047510, December 2012. ISSN 1054-1500. doi: 10.1063/1.4772195. URL <https://doi.org/10.1063/1.4772195>.
- Kathleen Champion, Bethany Lusch, J. Nathan Kutz, and Steven L. Brunton. Data-driven discovery of coordinates and governing equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116:22445–22451, 2019.
- Ralph L Cohen, John DS Jones, and Graeme B Segal. Morse theory and classifying spaces. preprint, 1995.
- Herbert Edelsbrunner and John Harer. Computational topology: an introduction. American Mathematical Soc., 2010.
- Steven C Ferry and Boris L Okun. Approximating topological met-

rics by riemannian metrics.
 Proceedings of the American
 Mathematical Society, 123(6):
 1865–1872, 1995.

Robert Gilmore. Topological analysis of chaotic dynamical systems. Reviews of Modern Physics, 70 (4):1455–1529, October 1998. ISSN 0034-6861, 1539-0756. doi: 10.1103/RevModPhys.70.1455. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.70.1455>.

Bronisław Jakubczyk. Existence and uniqueness of realizations of nonlinear systems. SIAM Journal on Control and Optimization, 18(4):455–471, 1980. doi: 10.1137/0318034.

J. Latschev. Vietoris-Rips complexes of metric spaces near a closed Riemannian manifold:. Archiv der Mathematik, 77(6):522–528, December 2001. ISSN 0003-889X. doi: 10.1007/PL00000526. URL <http://link.springer.com/10.1007/PL00000526>.

Samuel E. Otto, Gregory R. Machio, and Clarence W. Rowley. Learning nonlinear projections for reduced-order modeling of dynamical systems using constrained autoencoders. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 33, 2023.

Jose A. Perea and John Harer.

Sliding windows and persistence:
An application of topological
methods to signal analysis.
Foundations of Computational
Mathematics, 15(3):799–838,
2015.

Emily Riehl. Category theory
in context. Courier Dover
Publications, 2017.

Michael Schmidt and Hod Lipson.
Distilling free-form natural laws
from experimental data. Science,
324:81–85, 2009.

B. De Schutter. Minimal state-
space realization in linear system
theory: an overview. Journal
of Computational and Applied
Mathematics, 121(1):331–354,
September 2000. ISSN 0377-0427.
doi: 10.1016/S0377-0427(00)
00341-1. URL [https://www.
sciencedirect.com/science/
article/pii/S0377042700003411](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042700003411).

Floris Takens. Detecting strange
attractors in turbulence. In Dy-
namical Systems and Turbulence,
Warwick 1980: proceedings of a
symposium held at the Univer-
sity of Warwick 1979/80, pages
366–381. Springer, 2006.

A. J. van der Schaft. On real-
ization of nonlinear systems
described by higher-order differ-
ential equations. Mathematical

systems theory, 19(1):239–275,
December 1986. ISSN 1433-
0490. doi: 10.1007/BF01704916.
URL [https://doi.org/10.1007/
BF01704916](https://doi.org/10.1007/BF01704916).