

计算包含指定子群的有限群的子群的数量

LORENZO GUERRA, FABIO MASTROGIACOMO, AND PABLO SPIGA

摘要. 令 R 为一个有限群, T 为 R 的子群. 我们证明包含 T 的 R 的子群至多有

$$7.3722[R : T]^{\frac{\log_2[R:T]}{4} + 1.8919}$$

个。

1. 介绍

令 R 为一个阶数为 r 的有限群. 由于任何在 R 中的严格下降的子群链长度最多为 $\log_2 r$, 因此每个子群 $H \leq R$ 可以由至多 $\lfloor \log_2 r \rfloor$ 个元素生成. 因此, R 中子群的总数上限为

$$r^{\lfloor \log_2 r \rfloor} \leq r^{\log_2 r}.$$

这一经典估计给出了有限群中子群数量的一般上限。

这个界限结果接近紧致. 例如, 如果 R 是一个阶为 $r = 2^a$ 的初等阿贝尔 2-群, 则阶为 $2^{\lfloor a/2 \rfloor}$ 的子群数量由 2-二项式系数给出

$$\left[\begin{matrix} a \\ \lfloor \frac{a}{2} \rfloor \end{matrix} \right]_2 = \frac{2^a - 1}{2^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} - 1} \cdot \frac{2^{a-1} - 1}{2^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor - 1} - 1} \cdots \frac{2^{a - \lfloor \frac{a}{2} \rfloor + 1} - 1}{2 - 1}.$$

这个数量满足 $\left[\begin{matrix} a \\ \lfloor \frac{a}{2} \rfloor \end{matrix} \right]_2 \geq 2^{a^2/4}$, 因此在这种情况下我们有

$$2^{a^2/4} = r^{\log_2 r/4}$$

作为 R 的子群数量的下界。

Borovik、Pyber 和 Shalev 的一个更强的结果 [2, Corollary 1.6], 依赖于有限单群分类定理, 表明对于任意阶为 r 的有限群, 其子群的数量至多为

$$r^{\log_2 r \cdot \left(\frac{1}{4} + o(1) \right)}.$$

这证实了上面的例子实际上达到了最大可能的增长率。

在许多应用中, 指数中有显式的常数是很重要的. 在这个方向上, Spiga [8] 获得了结果的有效版本: 每个阶为 r 的有限群最多有

$$7.3722 \cdot r^{\frac{\log_2 r}{4} + 1.5315}$$

Key words and phrases. 子群, p -群, 界限.

The authors are members of the GNSAGA INdAM research group and kindly acknowledge their support.

The first and third authors are funded by the European Union via the Next Generation EU (Mission 4 Component 1 CUP B53D23009410006, PRIN 2022, 2022PSTWLB, Group Theory and Applications).

个子群。这个界在 [3] 中得到了改进，在指数中的加性常数 1.5315 被去掉了。这个显式的界也被用作证明 [4] 主要定理的关键步骤。

在本文中，我们感兴趣的是该问题的一个推广。设 R 是一个有限群，并设 $T \leq R$ 是其子群。定义

$$\text{Sub}(R, T) = \{H \leq R : T \leq H\}.$$

我们的目标是给 $|\text{Sub}(R, T)|$ 建立一个上界。使用相同的论据，我们可以得到一个初步的界限：如果 $|R| = r$ 和 $|T| = t$ ，那么包含 T 的 R 子群链的长度至多为 $\log_2(r/t)$ 。因此，每个这样的子群都可以由一个最多 $\lfloor \log_2(r/t) \rfloor$ 个元素的集合生成，再加上 T 。因此，最多有

$$\left(\frac{r}{t}\right)^{\log_2\left(\frac{r}{t}\right)}$$

个包含 T 的 R 子群。如前所述，这个界限不是最优的——当 T 是平凡子群时这一点已经很明显了。我们在这里提供了一个该不等式的改进版本，推广了 [8] 的主要结果。

定理 1.1. 令 R 是一个有限群，并令 $T \leq R$ 。那么

$$|\text{Sub}(R, T)| \leq 7.3722 \cdot [R : T]^{\frac{\log_2[R:T]}{4} + 1.8919}.$$

我们相信指数中的常数 1.8919 可以被移除，就像主要结果 [3] 中那样。这个定理在置换群的背景下也有一个自然的解释。假设 R 是一个有限传递群，作用在一个集合 Ω 上，其定点稳定化子为 T 且度数为 $n = [R : T]$ 。众所周知， R 的不可分系统与包含稳定子的 R 的子群一一对应。因此，定理 1.1 导出了以下推论。

推论 1.2. 令 R 是一个次数为 n 的传递群。那么 R 至多有

$$7.3722 \cdot n^{\frac{\log_2 n}{4} + 1.8919}$$

个非本原系统。

定理 1.1 的证明紧跟着 [8] 中的论证，后者给出了 [2, Corollary 1.6] 的初等证明。论证的核心部分在 [2, Corollary 1.6] 中依赖于估计有限群中的极大子群的数量。论文 [1, 5] 提供了朝这个方向的有价值的结果，尽管隐含常数的存在使得提取显式界限变得困难。

类似地，关于极大非本原系统数量的结果可以在 [6] 中找到。

对于一个非零整数 n ，我们定义 $\lambda(n)$ 为 n 的素因子个数，重复次数也被计算在内。我们相信可以通过用 $\lambda([R : T])$ 替换 $\log_2([R : T])$ 来改进我们的主要结果。

猜想 1.3. 存在一个常数 $c > 0$ ，使得如果 R 是一个有限群，并且 $T \leq R$ ，则

$$|\text{Sub}(R, T)| \leq [R : T]^{\lambda([R:T]) + c}.$$

对于这个猜想，我们几乎没有证据：从第 2 节的结果来看，在幂零群中它是成立的。函数 λ 的灵感来源于其在 Pyber 的著名且重要的结果 [7] 中的类似应用。

证明的关键步骤是建立定理 1.1 对于 p -群的有效性。这一工作在第 2 节中完成。一般情况则在第 3 节中处理，我们首先给出子群计数的论证，然后发展一些算术观察结果，这些最终导致了界限的确立。贯穿全文，如果 k 是整数， R 是一个群并且 $T \leq R$ ，我们定义

$$\text{Sub}_k(R, T) = \{H \in \text{Sub}(R, T) : [R : H] = k\}.$$

2. 素数幂阶群的界

如果 p 是素数且 m, r 是非负整数，高斯二项式系数被定义为

$$\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_p = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{p^{m-i} - 1}{p^{i+1} - 1}.$$

我们将使用这个涉及高斯二项式系数的递推方程：

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ r \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_p p^r + \begin{bmatrix} m \\ r-1 \end{bmatrix}_p.$$

命题 2.1. 令 P 是一个 p -群，其中 p 是素数，设 T 是 P 的一个指数为 p^c 的子群。然后，

$$|\text{Sub}_{p^k}(P, T)| \leq \begin{bmatrix} c \\ k \end{bmatrix}_p.$$

证明. 我们通过归纳法对 k 进行论证。如果 $k = 0$ ，那么该命题是显然的。假设 $k > 0$ ，并取一个包含 T 的最大子群 $M \leq P$ 。一个指数为 p^k 的子群 H 有两种可能的情况：要么是 $H \leq M$ ，要么是 $H \not\leq M$ 。

如果 $H \leq M$ ，那么通过归纳法，对于 H 至多有

$$\begin{bmatrix} c-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_p$$

种选择。

假设 $H \not\leq M$ 。取 $x \in P \setminus M$ 。那么， $P = \langle M, x \rangle$ 。此外，由于 $M \trianglelefteq P$ ， P 的每个元素都具有形式 mx^α ，对于某些 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 和某些 $m \in M$ 。因为 M 是最大的，所以 $x^p \in M$ 。因此，通过选择 m ， P 的每个元素都具有形式 $m'x^\beta$ ，对于某些 $m' \in M$ 和 $\beta \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ 。

观察到 $H = \langle H \cap M, mx^\beta \rangle$ ，带有 $m \in M$ 和 $\beta \in \{1, \dots, p-1\}$ 。通过将 mx^β 替换为 $(mx^\beta)^\gamma$ ，其中 $\beta\gamma \equiv 1 \pmod{p}$ ，我们可以假设，不失一般性地， $\beta = 1$ ，使得 $H = \langle H \cap M, mx \rangle$ 。此外，如果 $(H \cap M)m' = (H \cap M)m$ ，则 $\langle H \cap M, mx \rangle = \langle H \cap M, m'x \rangle$ 。因此，为了确定子群 H ，只需要指定它与 M 的交集，以及在 M 中的一个陪集 $H \cap M$ 。有 $[M : H \cap M] = p^k$ 个陪集，并且通过归纳法，最多有

$$\begin{bmatrix} c-1 \\ k \end{bmatrix}_p$$

种选择用于 $H \cap M$ 。因此，我们总共有最多

$$\begin{bmatrix} c-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} c-1 \\ k \end{bmatrix}_p p^k = \begin{bmatrix} c \\ k \end{bmatrix}_p$$

个指数为 p^k 的子群。 □

在 [8] 中, 作者定义了一个函数 $S(p, a)$ 使得每个阶为 p^a 的群最多有 $S(p, a)$ 个子群。该函数定义如下。

$$S(p, a) = \begin{cases} 2 & \text{if } a = 1, \\ p + 3 & \text{if } a = 2, \\ 2p^2 + 2p + 4 & \text{if } a = 3, \\ p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 3p + 5 & \text{if } a = 4, \\ 2p^6 + 2p^5 + 6p^4 + 6p^3 + 6p^2 + 4p + 6 & \text{if } a = 5, \\ c(p)p^{\frac{a^2}{2}} & \text{if } a \geq 6, \end{cases}$$

其中

$$(1) \quad C(p) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^i}},$$

$$(2) \quad c(p) = 2.129C(p).$$

此外, 他观察到

$$\sum_{k=0}^a \begin{bmatrix} a \\ k \end{bmatrix}_p \leq S(p, a).$$

特别地, 如果 P 和 T 如命题 2.1 所示, 则我们有

$$|\text{Sub}(P, T)| \leq \sum_{k=0}^c |\text{Sub}_{p^k}(P, T)| \leq \sum_{k=0}^c \begin{bmatrix} c \\ k \end{bmatrix}_p \leq S(p, c).$$

3. 定理的证明 1.1

我们从一个初步的观察开始。

引理 3.1. 令 R 是一个有限群, T 是 R 的子群, p 是一个素数, 并且令 $\text{Syl}_p(R, T)$ 表示满足 $T \cap P \in \text{Syl}_p(T)$ 的 R 的 p -西罗子群 P 的集合。然后在 $\text{Syl}_p(R, T)$ 上由共轭作用的 T 轨道数最多为 $[R : T]/p^c$, 其中 p^c 是 p 整除 $[R : T]$ 的最大幂。

证明. 令 $P \in \text{Syl}_p(R, T)$ 。由西罗定理, $\text{Syl}_p(R, T)$ 的每个元素都具有形式 P^x , 对于某些 $x \in R$, 使得 $T \cap P^x \in \text{Syl}_p(T)$ 。定义

$$\mathcal{P} = \{x \in R \mid T \cap P^x \in \text{Syl}_p(T)\},$$

并观察 $\mathcal{P}$ 是 $(\mathbf{N}_R(P), T)$ -双倍集的并。

设 $x_1, \dots, x_t$ 是 $(\mathbf{N}_R(P), T)$ -双倍集在 $\mathcal{P}$ 中的代表集。注意到 t 是 T -轨道在 $\text{Syl}_p(R, T)$ 上的数量。然后,

$$\frac{|\mathbf{N}_R(P)x_iT|}{|T|} = |\mathbf{N}_R(P) : \mathbf{N}_R(P) \cap T^{x_i^{-1}}| = |\mathbf{N}_R(P^{x_i}) : \mathbf{N}_R(P^{x_i}) \cap T|.$$

由于除以 $|\mathbf{N}_R(P^{x_i})|$ 的最大 p 的幂是 $|P|$ ，且除以 $|\mathbf{N}_R(P^{x_i}) \cap T|$ 的最大 p 的幂是 $|T \cap P|$ ，因此

$$|\mathbf{N}_R(P^{x_i}) : \mathbf{N}_R(P^{x_i}) \cap T|$$

能被 p^c 整除。因此，每个 $(\mathbf{N}_R(P), T)$ -双陪集在 $\mathcal{P}$ 中至少包含 p^c 个不同的右陪集 T 在 R 中。因此，这样的双陪集的数量至多为 $[R : T]/p^c$ 。 $\square$

命题 3.2. 令 R 为一个有限群，并设 $T < R$ 。假设

$$[R : T] = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{c_i},$$

其中 $c_i > 0$ 和 p_i 是不同的素数。那么，

$$|\text{Sub}(R, T)| \leq [R : T]^{\ell-1} \prod_{i=1}^{\ell} S(p_i, c_i).$$

证明. 令 $H \in \text{Sub}(R, T)$ 。然后， H 由 T 和一个 ℓ -元组 $(H_1, \dots, H_\ell)$ 生成，其中每个 H_i 都是 H 的 p_i -Sylow 子群。

如引理 3.1 中所述，对于每个 $i \in \{1, \dots, \ell\}$ ，令

$$\text{Syl}_{p_i}(R, T) = \{R_i \in \text{Syl}_{p_i}(R) \mid R_i \cap T \in \text{Syl}_{p_i}(T)\}.$$

通过可能替换 ℓ -元组 $(H_1, \dots, H_\ell)$ ，我们可以不失去一般性地假设对于所有 i 都有 $H_i \in \text{Syl}_{p_i}(H, T)$ 。由西罗定理，每个 H_i 都包含在 R 的一个 p_i -西罗子群 R_i 中。注意到

$$R_i \cap T = R_i \cap H \cap T = H_i \cap T \in \text{Syl}_{p_i}(T),$$

所以 $R_i \in \text{Syl}_{p_i}(R, T)$ 。此外，由于 H 包含 T ，对于每一个 $t_1, \dots, t_\ell \in T$ ， ℓ -元组 $(H_1, \dots, H_\ell)$ 和 $(H_1^{t_1}, \dots, H_\ell^{t_\ell})$ 与 T 一起生成相同的子群 H 。

因此，为了限定包含 T 的 R 的子群数量，我们估计 ℓ 元组 $(R_1, \dots, R_\ell)$ 的数量，这些元组满足 $R_i \in \text{Syl}_{p_i}(R, T)$ ，并以 T 共轭。一旦 R_i 被固定，我们计算可能的子群 $H_i \leq R_i$ 的数量，使得 $H_i \in \text{Syl}_{p_i}(H, T)$ 。

由命题 2.1，我们知道

$$|\text{Sub}(R_i, R_i \cap T)| \leq S(p_i, c_i).$$

应用引理 3.1，这样的 R_i 的 T -共轭类的数量至多为 $[R : T]/p_i^{c_i}$ 。因此，这样的 ℓ 元组的数量至多为

$$\prod_{i=1}^{\ell} \frac{[R : T]}{p_i^{c_i}} = [R : T]^{\ell-1}$$

结果随之得出。 $\square$

3.1. 算术观察.

引理 3.3. 令 p 是一个素数, 令 c 是一个正整数, 并且令 r/t 是 p^c 的倍数. 那么 $S(p, c) \leq 7.3722 \cdot p^{c \frac{\log_2(r/t)}{4}}$.

证明. 由于 $r/t \rightarrow \log_2(r/t)$ 是单调递增的, 我们可以假设 $r/t = p^c$. 特别地, $7.3722 \cdot p^{c \frac{\log_2 r/t}{4}} = 7.3722 \cdot p^{\frac{c^2}{4} \log_2 p}$. 现在通过区分 c 的各种可能性来完成证明. 当 $c = 1$ 时, 我们有 $S(p, 1) = 2$ 和

$$7.3722 \cdot p^{\frac{c^2}{4} \log_2 p} = 7.3722 \cdot p^{\frac{\log_2 p}{4}} \geq 7.3722 \cdot 2^{1/4} = 9.5136.$$

当 $c = 2$ 时, $S(p, 2) = p + 3$ 和

$$7.3722 \cdot p^{\frac{c^2}{4} \log_2 p} = 7.3722 \cdot p^{\log_2 p} \geq 7.3722 \cdot p;$$

显然, $p + 3 \leq 7.3722 \cdot p$. 案例 $c \in \{3, 4, 5\}$ 完全相似. 假设 $c \geq 6$. 现在, $c(p)p^{\frac{c^2}{4}} = S(p, c) \leq 7.3722 \cdot p^{\frac{c^2}{4}}$ 当且仅当 $c(p) \leq 7.3722$. 从 (1), $p \mapsto c(p)$ 是一个单调递减函数, 因此 $c(p) \leq c(2) = 7.372187 < 7.3722$. $\square$

引理 3.4. 令 r 为一个整数, 令 t 为 r 的一个除数, 令 p 为 r/t 的一个素因子, 并且令 p^c 为 p 的最大幂次, 该幂次可以整除 r/t . 然后,

$$\frac{r}{t} S(p, c) \leq \left(\frac{r}{t}\right)^{c \frac{\log_2(r/t)}{4}},$$

除非 $(p, c, r/t)$ 如表 3.1 所示。

证明. 由引理 3.3-3.8 得自于 [8]. $\square$

命题 3.5. 令 R 为一个有限群, 令 T 为 R 的子群, 令 p 为 $[R : T]$ 的素数因子, 且令 p^c 为 p 整除 $[R : T]$ 的最大幂. 然后, 要么是 $r/t S(p, c) \leq p^{c \frac{\log_2(r/t)}{4}}$, 或者是以下情况之一成立

- (1) R 和 T 满足定理 1.1,
- (2) $p \in \{5, 7, 11, 13, 17\}$ 和 $c = 1$,
- (3) $p = 3$ 和 $c \leq 3$,
- (4) $p = 2$.

证明. 假设 $(r/t)S(p, c) > p^{c \frac{\log_2(r/t)}{4}}$. 特别是, $(c, p, r/t)$ 如表 3.1 所示. 我们依次考虑这些情况. 当 $c = 1$ 时, 我们处于表 3.1 的第一行. 特别是, 我们只需要处理 $p = 19$ 和 $p = 23$, 因为当 $p \leq 17$ 时, 我们可以看到部分 (2)–(4) 得以满足. 特别是, 我们只有有限的情况需要考虑. 令 $r = p_1^{a_1} \cdots p_\ell^{a_\ell}$ 和 $t = p_1^{b_1} \cdots p_\ell^{b_\ell}$ 为 r 和 t 的不同素数幂的分解. 让我们考虑函数

$$f\left(\frac{r}{t}\right) := \left(\frac{r}{t}\right)^{\ell-1} \prod_{i=1}^{\ell} S(p_i, a_i - b_i).$$

根据命题 3.2, 如果 $f(r/t) \leq 7.3722 \cdot (r/t)^{\log_2(r/t)/4 + 1.8919}$ 成立, 则定理 1.1 成立, 从而部分 (1) 得以满足. 因此, 我们可以假设 $f(r/t) > (r/t)^{\log_2(r/t)/4 + 1.8919}$. 我们已在计算机上实现了此功

c	p	Comments on r/t
1	23	$r/t \leq 184$
	19	$r/t \leq 71\,896$
	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17	any r/t
2	7	$r/t \leq 294$
	5	$r/t \leq 407\,850$
	2, 3	any r/t
3	5	$r/t \leq 250$
	2, 3	any r/t
4	3	$r/t \leq 9\,396$
	2	any r/t
5	3	$r/t \leq 34\,375$
	2	any r/t
$c \geq 6$	3	$r/t \in \{729, 1\,458, 2\,187, 2\,916\}$
	2	any r/t

表 1. 引理 3.5 中的小素数例外情况

能, 并已检查在表 3.1 中描述的范围没有 r/t 满足 $f(r/t) > 7.3722 \cdot (r/t)^{\log_2(r/t)/4+1.8919}$ 。当 $c = 2$ 时, 我们处于表 3.1 的第二行。特别是, 我们只需要处理 $p = 5$ 和 $p = 7$, 因为当 $p \leq 3$ 时, 我们可以看到部分 (2)–(4) 得以满足。特别地, 我们只有有限数量的情况需要考虑。我们已经验证在表 3.1 所描述的范围没有 r/t 满足 $f(r/t) > 7.3722 \cdot (r/t)^{\log_2(r/t)/4+1.8919}$ 。这些情况 $a \geq 3$ 类似。 $\square$

我们现在准备完成定理 1.1 的证明。如同命题 3.2, 我们写作 $[R : T] = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{c_i}$ 。令 $\mathcal{I}$ 为指标 $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ 的集合, 其中包含

$$\frac{r}{t} S(p_i, c_i) > p_i^{\frac{c_i \log_2(r/t)}{4}},$$

, 并且令 $\mathcal{P} = \{p_i : i \in \mathcal{I}\}$ 。从命题 3.5, 我们可以限制到 $\mathcal{P} \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ 的情况。此外, 如果 $i \in \mathcal{I}$ 且 $p_i \in \{5, 7, 11, 13, 17\}$, 则 $c_i = 1$ 。特别是, $|\mathcal{I}| \leq 7$ 。由命题 3.2 和 3.5, 我们得到

(3)

$$|\text{Sub}(R, T)| \leq (r/t)^{|\mathcal{I}|-1} \prod_{i \in \mathcal{I}} S(p_i, c_i) \prod_{\substack{i=1 \\ i \notin \mathcal{I}}}^{\ell} (r/t) S(p_i, c_i) \leq (r/t)^{|\mathcal{I}|-1} \prod_{i \in \mathcal{I}} S(p_i, c_i) \prod_{\substack{i=1 \\ i \notin \mathcal{I}}}^{\ell} p_i^{\frac{c_i \log_2(r/t)}{4}}.$$

现在, 当 $2 \in \mathcal{P}$, 令 $i_0 \in \mathcal{I}$ 具有 $p_{i_0} = 2$ 并设 $\mathcal{I}_0 = \{i_0\}$; 当 $2 \notin \mathcal{P}$, 设 $\mathcal{I}_0 = \emptyset$ 。设 $\alpha > 0$ 在

$$\left(\frac{r}{t}\right)^{|\mathcal{I}|-|\mathcal{I}_0|} \prod_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0} S(p_i, c_i) \leq \left(\frac{r}{t}\right)^{\alpha} \prod_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0} p_i^{\frac{c_i \log_2(r/t)}{4}}.$$

下为最小值对不等式的两边取对数并重新排列项, 我们得出

$$\alpha \geq |\mathcal{I}| - |\mathcal{I}_0| + \frac{\sum_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0} \log(S(p_i, c_i))}{\log(r/t)} - \sum_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0} \frac{c_i \log(p_i)}{4 \log(2)}.$$

现在观察到 $r/t \geq \prod_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0} p_i^{c_i}$ 因此

$$(4) \quad \alpha \geq |\mathcal{I}| - |\mathcal{I}_0| + \frac{\sum_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0} \log(S(p_i, c_i))}{\sum_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0} c_i \log(p_i)} - \sum_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0} \frac{c_i \log(p_i)}{4 \log(2)}.$$

回忆 $\{p_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0\} \subseteq \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ 并记住对于每个 i 都有 $c_i \leq 3$ (实际上, 对于每个 i 都有 $c_i = 1$, 除了可能是素数 3, 其中 $c_i \leq 3$)。因此, (4) 的右边可以通过计算器显式计算。我们得到可以选择 $\alpha = 1.8919$ 。

现在, 从 (3), 当 $\mathcal{I}_0 = \emptyset$ 时, 我们推导出

$$|\text{Sub}(R, T)| \leq (r/t)^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{\frac{c_i \log_2(r/t)}{4}} = (r/t)^{\log_2(r/t)/4 + \alpha - 1}.$$

类似地, 当 $\mathcal{I}_0 \neq \emptyset$ 时, 应用引理 3.3 与 $p = 2$, 我们推导出

$$|\text{Sub}(R, T)| \leq S(2, c_{i_0})(r/t)^{\alpha} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\ell} p_i^{\frac{c_i \log_2(r/t)}{4}} \leq 7.3722(r/t)^{\alpha} \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{\frac{c_i \log_2(r/t)}{4}} = 7.3722(r/t)^{\log_2(r/t)/4 + \alpha}.$$

REFERENCES

- [1] A. V. Borovik, 关于有限群的极大可解子群的数量, 交换代数 **26**, 4041–4050.
- [2] A. V. Borovik, L. Pyber, A. Shalev, 有限群和紧致群中的极大子群, 美国数学学会 **348** (1996), 3745–3761.
- [3] M. Fusari, P. Spiga, 关于有限群的最大子群数, 代数杂志, **635** (2023), 486–526.
- [4] Y. 甘, P. 斯皮加, 和 B. 夏, haar 图形表示的渐近枚举, *arXiv* 预印本 **arXiv:2405.09192**, 2024.
- [5] M. W. 莱贝克, L. 皮伯, A. 沙列夫, 关于 G. E. 沃勒的一个猜想, *J. 代数* **317** (2007), 184–197.
- [6] A. Lucchini, M. Moscatiello, 和 P. Spiga, 有限传递置换群极大非本原系统数目的多项式界, 数学论坛 **32** (2020), 第 3 期, 713–721.
- [7] L. Pyber, 枚举给定阶的有限群. 数学年刊, 137, (1993), 203 – 220.
- [8] P. Spiga, 《有限群的子群数量的一个显式上界》, 纯粹与应用代数杂志, **227** (2023), 编号 6, 107312.

LORENZO GUERRA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA E APPLICATA,
UNIVERSITY OF MILANO-BICOCCA, VIA COZZI 55, 20126 MILANO, ITALY
Email address: l.guerra@unimib.it

FABIO MASTROGIACOMO, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “FELICE CASORATI”, UNIVERSITY OF PAVIA, VIA FERRATA 5,
27100 PAVIA, ITALY
Email address: fabio.mastrogiacomo01@universitadipavia.it

PABLO SPIGA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA E APPLICATA,
UNIVERSITY OF MILANO-BICOCCA, VIA COZZI 55, 20126 MILANO, ITALY
Email address: pablo.spiga@unimib.it