具有变指数记忆的演化方程在多尺度粘弹性中的分析 [1]

Yiqun Li[a], Xiangcheng Zheng[b]

[a]School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China
[b]School of Mathematics, State Key Laboratory of Cryptography and Digital Economy Security, Shandong University, Jinan 250100, China

Abstract

我们研究了一个具有非正型变指数记忆的演化方程的良好设定性和解的正则性，该方程描述了具有记忆材料中的多尺度粘弹性。应用扰动方法进行模型转换，并在此基础上证明了良好设定性。然后推导出加权解的正则性，其中初始奇异性由变量指数的初值表征。

Keywords: 可变指数，演化方程，记忆，适定性，正则性
2000 MSC: 35R09

1. 介绍

本工作考虑了具有非正类型变指数记忆的演化方程的数学分析，其中该变指数由黏弹性材料微结构的分形维度决定，描述了在长期循环载荷下结构的变化情况，这些变化进一步传递到宏观尺度，最终导致材料失效 [2, 5, 6, 8, 9, 11, 12]

$$\begin{aligned} &\partial_t u(\boldsymbol{x},t) - k(t) * \Delta u(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x},t), \quad (\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,T]; \\ &u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega; \quad u(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad (\boldsymbol{x},t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^d (1 \leq d \leq 3)$ 是一个单连通有界区域，具有分段光滑的边界 $\partial\Omega$ 和凸角，$T > 0$，源项 $f(\boldsymbol{x},t)$ 和 $u_0(\boldsymbol{x})$ 是给定函数，并且卷积项通过变指数核 $k(t)$ 定义。$\alpha(t) \in (0,1)$

$$k(t) * \Delta u(\boldsymbol{x},t) := \int_0^t k(t-s)\Delta u(\boldsymbol{x},s)ds, \quad k(t) := \frac{t^{-\alpha(t)}}{\Gamma(1-\alpha(t))}. \tag{2}$$

模型 (1) 的数学分析，特别是对于 $\alpha(t) \equiv \hat{\alpha}$ 和某些 $0 < \hat{\alpha} < 1$，已经引起了广泛的研究活动，参见例如 [13, 18, 19]。然而，据我们所知，变指数模型 (1) 在文献中

[1]通讯作者: 郑向成
Email addresses: YiqunLi24@outlook.com (Yiqun Li), xzheng@sdu.edu.cn (Xiangcheng Zheng)

尚未得到处理，因为变指数核 $k(t)$ 丢失了其常数指数对应物如正定性等的良好性质。因此，许多用于常数指数模型的已建立技术不适用。

最近，在 [20] 中开发了一种扰动方法来分析变指数双侧空间分数阶问题，该方法将变指数核 (2) 分解为其常数阶类似物和一个低阶扰动项。我们采用这种方法重新表述模型 (3)，使其形式更易于处理，并基于此证明了模型 (1) 的适定性和其正则性估计。与 [20] 中的解算子估计方法不同，我们采用特殊函数在解表达式中进行更为精细的估计。所发展的结果为提出的模型提供了数值分析和实际应用的理论支持。

2. 预备知识

2.1. 符号表示法

令 $L^p(\Omega) 1 \le p \le \infty$ 为在 Ω 上 p 次幂勒贝格可积函数的巴拿赫空间。对于正整数 m，令 $W^{m,p}(\Omega)$ 为 L^p 函数构成的索伯列夫空间（其 m 阶弱导数位于 $L^p(\Omega)$ 中；类似地当 Ω 被区间 $\mathcal{I}$ 替换时同样定义）。令 $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 是其具有零边值条件的空间，直到阶数 $m-1$。对于 Banach 空间 $\mathcal{X}$，令 $W^{m,p}(0,T;\mathcal{X})$ 是关于 $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ 在 $W^{m,p}(0,T)$ 中的函数空间。所有空间都配备了标准范数 [1]。

记带有狄利克雷边界条件的 $-\Delta$ 的本征对为 $\{\lambda_i, \phi_i\}_{i=1}^{\infty}$，其中 $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 中的一个标准正交基，而本征值 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ 形成一个正的非递减序列 [4]。我们引入 Sobolev 空间 $\check{H}^s(\Omega)$，对于 $s \ge 0$ 定义为

$$\check{H}^s(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : \|q\|_{\check{H}^s(\Omega)}^2 := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^s (q, \phi_i)^2 < \infty\},$$

它是 $H^s(\Omega)$ 的一个子空间，满足 $\check{H}^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ 和 $\check{H}^2(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ [17]。

通过本文，我们记为 $\alpha_0 := \alpha(0)$ 并假设 $\alpha(t)$ 在 $[0,T]$ 上具有有界的二阶导数。此外，我们使用 Q 表示一个通用的正数常量，在不同的出现位置可能取不同的值。为了简化起见，我们在 Sobolev 空间和范数中可能会省略域 Ω 和时间区间 $(0,T)$，例如我们写 $\|\cdot\|_{L^2(L^2)}$ 而不是 $\|\cdot\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$，当没有混淆发生时。

2.2. 谱分解

对于 $t \in [0,T]$，我们将 u 和 f 按照 $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 展开如下 [16]

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t)\phi_i(\boldsymbol{x}),\ u_i(t) := \big(u(\cdot,t), \phi_i\big), \quad f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\phi_i(\boldsymbol{x}),\ f_i(t) := \big(f(\cdot,t), \phi_i\big).$$

我们把这些表达式代入 (1) 中，发现 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足以下积分微分方程

$$u_i' + \lambda_i k * u_i = f_i,\ \text{for } t \in (0,T]; \quad u_i(0) = u_{0,i} := (u_0, \phi_i), \quad i = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

对于 $\mu>0$，我们首先定义 $\beta_\mu(t):=\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$。我们遵循在 [20] 中提出的扰动方法的思想，将核函数 $k(t)$ 分解为

$$k(t)=\frac{t^{-\alpha(t)}}{\Gamma(1-\alpha(t))}=\frac{t^{-\alpha_0}}{\Gamma(1-\alpha_0)}+\int_0^t\partial_z\frac{t^{-\alpha(z)}}{\Gamma(1-\alpha(z))}dz=:\beta_{1-\alpha_0}+\tilde g(t). \tag{4}$$

如 [20] 所示，

$$|\tilde g|\le Q\int_0^t t^{-\alpha_0}(1+|\ln t|)dz\le Qt^{1-\alpha_0}(1+|\ln t|),\quad |\tilde g'|\le Qt^{-\alpha_0}(1+|\ln t|). \tag{5}$$

因此，我们使用 (4) 将 (3) 重写为

$$u_i'+\lambda_i\beta_{1-\alpha_0}*u_i=f_i-\lambda_i\tilde g*u_i,\ \text{for } t\in(0,T];\quad u_i(0)=u_{0,i}. \tag{6}$$

3. 数学分析

我们证明了 (1) 的适定性和正则性结果。

定理 3.1. *假设 $f\in H^1(L^2)$ 和 $u_0\in\check H^2$，问题 (1) 有一个唯一解 $u\in H^1(L^2)$ 并且*

$$\|u\|_{H^1(L^2)}\le Q\big(\|u_0\|_{\check H^2}+\|f\|_{H^1(L^2)}\big). \tag{7}$$

证明定理的证明将分两步进行。

步骤 A：问题（6）的适定性。

我们首先考虑 (6) 中的情况 $u_{0,i}=0$，并令 $\mathcal X:=\{q\in H^1(0,T):q(0)=0\}$ 配备等价范数 $\|q\|_{\mathcal X,\sigma}:=\|e^{-\sigma t}q'\|_{L^2(0,T)}$ 对于某些 $\sigma\ge 0$。对于每个 $v\in\mathcal X$，令 $w:=\mathcal M v$ 是

$$w'+\lambda_i\beta_{1-\alpha_0}*w=f_i-\lambda_i\tilde g*v,\ \text{for } t\in(0,T];\quad w(0)=0. \tag{8}$$

的解那么 (8) 的解 w 可以表示为 [14]

$$w=E_{2-\alpha_0,1}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0})*(f_i-\lambda_i\tilde g*v). \tag{9}$$

为了限制 $\|w\|_{\mathcal X,\sigma}$，我们直接对上述方程求导得到

$$w'=E_{2-\alpha_0,1}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0})f_i(0)+E_{2-\alpha_0,1}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0})*(f_i'-\lambda_i\tilde g'*v). \tag{10}$$

通过使用 Mittag-Leffler 函数 [3, 7, 15] 和事实

$$\big[tE_{2-\alpha_0,2}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0})\big]_t=E_{2-\alpha_0,1}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0}),$$

，进一步应用分部积分来重新表述 (10) 右边的最后一项，我们得到

$$\begin{aligned} E_{2-\alpha_0,1}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0}) * (\lambda_i \tilde{g}' * v) &= tE_{2-\alpha_0,2}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0}) * (\lambda_i \tilde{g}' * v') \\ &= [t^{\alpha_0-1}(\lambda_i t^{2-\alpha_0}) E_{2-\alpha_0,2}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0})] * (\tilde{g}' * v'). \end{aligned} \tag{11}$$

由 Mittag-Leffler 函数的渐近性质 [7, 10]，我们有

$$\left|(\lambda_i t^{2-\alpha_0}) E_{2-\alpha_0,2}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0})\right| \le Q, \tag{12}$$

其中 Q 与 t 和 λ_i 独立。因此我们应用杨卷积不等式和估计

$$\int_0^T e^{-\sigma t} t^{\alpha_0-1} dt \le \sigma^{-\alpha_0} \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha_0-1} dz \le Q\sigma^{-\alpha_0}, \tag{13}$$

以及 (12) 来限定 (11) 为

$$\begin{aligned} &\left\|e^{-\sigma t}[E_{2-\alpha_0,1}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0}) * (\lambda_i \tilde{g}' * v)]\right\|_{L^2(0,T)} \\ &\quad \le Q\left\|e^{-\sigma t}(t^{\alpha_0-1} * |\tilde{g}' * v'|)\right\|_{L^2(0,T)} \\ &\quad \le Q\left\|(e^{-\sigma t} t^{\alpha_0-1}) * |e^{-\sigma t}\tilde{g}'| * |e^{-\sigma t} v'|\right\|_{L^2(0,T)} \\ &\quad \le Q\|e^{-\sigma t} t^{\alpha_0-1}\|_{L^1(0,T)} \|e^{-\sigma t}\tilde{g}'\|_{L^1(0,T)} \|v\|_{\mathcal{X},\sigma} \le Q\sigma^{-\alpha_0}\|v\|_{\mathcal{X},\sigma}. \end{aligned}$$

我们调用这个估计值，($E_{2-\alpha_0,1}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0})$ [7, 10] 和 $|f_i(0)| \le Q\|f_i\|_{H^1(0,T)}$ 的有界性在 (10) 中得到

$$\|w\|_{\mathcal{X},\sigma} \le Q\|f_i\|_{H^1(0,T)} + Q\sigma^{-\alpha_0}\|v\|_{\mathcal{X},\sigma}. \tag{14}$$

因此映射 $\mathcal{M} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是良好定义的。为了显示其压缩性，设 $w_i = \mathcal{M}v_i$ 对于 $i = 1$,2,$e_w := w_1 - w_2$ 和 $e_v := v_1 - v_2$ 满足

$$e_w' + \lambda_i \beta_{1-\alpha_0} * e_w = -\lambda_i \tilde{g} * e_v. \tag{15}$$

然后将估计 (14) 应用于 (15)，得到

$$\|e_w\|_{\mathcal{X},\sigma} \le Q\sigma^{-\alpha_0}\|e_v\|_{\mathcal{X},\sigma}. \tag{16}$$

我们选择一个足够大的 σ 使得映射 $\mathcal{M}$ 是压缩的。由 Banach 不动点定理，$\mathcal{M}$ 有一个唯一的不动点 $v = \mathcal{M}v$，估计为 $\|v\|_{\mathcal{X},\sigma} \le Q\|f_i\|_{H^1(0,T)}$。

对于情况 $u_{0,i} \neq 0$，我们可以直接验证

$$u_i = E_{2-\alpha_0,1}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0}) u_{0,i} + v,$$

其中 v 是 $\mathcal{M}$ 的不动点，解为 (6) 从而 (3)。对这个方程进行微分得到

$$u_i' = -\lambda_i t^{1-\alpha_0} E_{2-\alpha_0,2-\alpha_0}(-\lambda_i t^{2-\alpha_0}) u_{0,i} + v',$$

这与 $\|v\|_{\mathcal{X},\sigma} \leq Q\|f_i\|_{H^1(0,T)}$ 一起导致了

$$\|u_i\|_{H^1(0,T)} \leq Q\big(\lambda_i |u_{0,i}| + \|f_i\|_{H^1(0,T)}\big). \tag{17}$$

(3) 的唯一性来自于 (6) 的唯一性以及 $u_{0,i} = 0$。因此，我们得出结论，(6) 以及由此可知 (3) 在 $H^1(0,T)$ 中存在唯一解，并且估计为 (17)。

步骤 B：问题（1）的适定性

我们调用估计值 (17) 来限定 $\bar{u} := \int_0^t \big[\sum_{i=1}^\infty u_i'(s)\phi_i(\boldsymbol{x})\big] ds + u_0$ 通过使用

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|^2_{H^1(L^2)} \leq Q\|\partial_t \bar{u}\|^2_{L^2(L^2)} = \sum_{i=1}^\infty \|u_i'\|^2_{L^2(0,T)} \leq Q \sum_{i=1}^\infty \big(\lambda_i^2 |u_{0,i}|^2 + \|f_i\|^2_{H^1(0,T)}\big) \\ = Q\big(\|u_0\|^2_{\check{H}^2} + \|f\|^2_{H^1(L^2)}\big). \end{aligned} \tag{18}$$

由于 $u_i(t) = \int_0^t u_i'(s) ds + u_{0,i}$ 满足 (3) 中的微分方程对于 $i \geq 1$，$\bar{u} \in H^1(L^2)$ 是问题 (1) 的解。问题（1）的解的唯一性由（3）中的微分方程的唯一性得出。我们从而完成了定理的证明。

定理 3.2. *假设 $f \in H^1(\check{H}^2)$ 和 $u_0 \in \check{H}^4$，以下正则性估计对该问题成立 (1)*

$$\big\|t^{\alpha_0/2}\partial_t^2 u\big\|_{L^2(L^2)} + \|u\|_{H^1(\check{H}^2)} \leq Q\big(\|u_0\|_{\check{H}^4} + \|f\|_{H^1(\check{H}^2)}\big). \tag{19}$$

证明我们对公式 (6) 进行求导，得到

$$u_i'' + \lambda_i \beta_{1-\alpha_0} * u_i' = f_i' - \lambda_i \tilde{g}' * u_i - \lambda_i \beta_{1-\alpha_0} u_{0,i}, \tag{20}$$

将此结果与 (17)、(5) 中的第一个估计以及 Young 卷积不等式结合，得出

$$\begin{aligned} \big\|t^{\alpha_0/2} u_i''\big\|_{L^2(0,T)} &\leq Q\big(\lambda_i \|\beta_{1-\alpha_0}\|_{L^1(0,T)} \|u_i'\|_{L^2(0,T)} + \|f_i'\|_{L^2(0,T)} \\ &\quad + \lambda_i \|\tilde{g}'\|_{L^1(0,T)} \|u_i\|_{L^2(0,T)} + \lambda_i |u_{0,i}|\big) \\ &\leq Q\big(\lambda_i \|u_i\|_{H^1(0,T)} + \|f_i'\|_{L^2(0,T)} + \lambda_i |u_{0,i}|\big) \\ &\leq Q\big(\lambda_i^2 |u_{0,i}| + \lambda_i \|f_i\|_{H^1(0,T)}\big). \end{aligned} \tag{21}$$

我们进一步结合 (17) 和 (21)，并按照 (18) 中的步骤操作，得到

$$\begin{aligned} \big\|t^{\alpha_0/2}\partial_t^2 u\big\|^2_{L^2(L^2)} + \|u\|^2_{H^1(\check{H}^2)} &= \sum_{i=1}^\infty \big(\|t^{\alpha_0/2} u_i''\|^2_{L^2(0,T)} + \lambda_i^2 \|u_i\|^2_{H^1(0,T)}\big) \\ &\leq Q \sum_{i=1}^\infty \big(\lambda_i^2 \|f_i\|^2_{H^1(0,T)} + \lambda_i^4 |u_{0,i}|^2\big) \leq Q\big(\|f\|^2_{H^1(\check{H}^2)} + \|u_0\|^2_{\check{H}^4}\big), \end{aligned}$$

这给出了 (19)，从而完成证明。

4. 结论与展望

这项工作建立了具有非正型变指数记忆的演化方程的良好设定性和正则性结果。采用扰动方法重新表述模型，基于此进行分析。基于这些理论结果，我们可以考虑模型 (1) 的数值逼近误差估计。然而，变指数核与拉普拉斯算子的耦合可能导致稳定性及误差估计方面遇到前所未有的困难。我们将在不久的将来研究这个有趣的话题。

致谢

这项工作得到了中国国家重点研发计划（编号 2023YFA1008903）、国家自然科学基金（编号 12301555）、山东省泰山学者计划（编号 tsqn202306083）、中国博士后科学基金会（编号 2024M762459）和湖北省自然科学基金（编号 JCZRQN202500278）的部分支持。

References

[1] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsevier, San Diego, 2003.

[2] R. Dang, Y. Cui, J. Qu, A. Yang, Y. Chen, Variable fractional modeling and vibration analysis of variable-thickness viscoelastic circular plate. *Appl. Math. Model.* 110 (2022), 767–778.

[3] K. Diethelm and N. Ford, Analysis of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 265 (2002), 229–248.

[4] L. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, V 19, American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.

[5] W. Fan, X. Hu, and S. Zhu, Numerical reconstruction of a discontinuous diffusive coefficient in variable-order time-fractional subdiffusion, *J. Sci. Comput.*, 96 (2023), 13.

[6] R. Garrappa, A. Giusti, and F. Mainardi, Variable-order fractional calculus: A change of perspective, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 102 (2021), 105904.

[7] R. Gorenflo, A. Kilbas, F. Mainardi and S. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Springer, New York, 2014.

[8] T. Hou, J. Lowengrub, and M. Shelley, Boundary integral methods for multicomponent fluids and multiphase materials, *J. Comput. Phys.*, 169 (2001), 302–362.

[9] T. Hou and X. Wu, A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media, *J. Comput. Phys.*, 134 (1997), 169–189.

[10] B. Jin, *Fractional differential equations–an approach via fractional derivatives*, Appl. Math. Sci. 206, Springer, Cham, 2021.

[11] Y. Li, H. Wang, and X. Zheng, Analysis of a fractional viscoelastic Euler-Bernoulli beam and identification of its piecewise continuous polynomial order, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 26 (2023), 2337–2360.

[12] H. Liang and M. Stynes, A general collocation analysis for weakly singular Volterra integral equations with variable exponent, *IMA J. Numer. Anal.*, 44 (2024), 2725–2751.

[13] W. McLean and V. Thomée, Numerical solution of an evolution equation with a positive-type memory term. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* 35 (1993), 23–70.

[14] W. McLean, V. Thomée, L. Wahlbin, Discretization with variable time steps of an evolution equation with a positive-type memory term. *J. Comput. Appl. Math.* 69 (1996), 49–69.

[15] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.

[16] K. Sakamoto and M. Yamamoto, Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. *J. Math. Anal. Appl.* 382 (2011), 426–447.

[17] V. Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Lecture Notes in Mathematics 1054, Springer-Verlag, New York, 1984.

[18] D. Xu, Uniform l^1 behavior of the first-order interpolant quadrature scheme for some partial integro-differential equations, *Appl. Math. Lett.*, 117 (2021), 107097.

[19] L. Yi and B. Guo, An *h-p* version of the continuous Petrov-Galerkin finite element method for Volterra integro-differential equations with smooth and nonsmooth kernels, *SIAM J. Numer. Anal.*, 53 (2015), 2677–2704.

[20] X. Zheng, Two methods addressing variable-exponent fractional initial and boundary value problems and Abel integral equation, *CSIAM Trans. Appl. Math.*, to appear.