

1-旋转斯坦纳系统的枚举

IVAN HETMAN, TARAS BANAKH, ALEX RAVSKY

摘要. 在这篇论文中, 介绍了不同可允许的 v, k 对的新 1-旋转斯坦纳系统。特别地, 枚举了阶为 4 的 1-旋转单元。

1. 介绍

在 [1] 中展示了寻找循环差族 (CDF) 的算法结果。自那以来, 该算法从循环群推广到了交换群, 然后推广到任意群, 最后推广到了带有群作用的集合。之后, 在重读 [2] 的第六章第十六节时, 发现循环/交换/任意群的算法可以非常容易地推广到所谓的 1-旋转设计的情况。随后进行了相应的修改, 本文将介绍由各种群生成的新斯坦纳设计。

$S(2, 5, 65)$ 1-旋转单元集的阶为 4 的群, 其阶数为 64, 与结果在 [3] 和 [4] 中相交, 但仍有许多缺失的单元集在 [3]。

尽管如此, 由于大量的设计和相对较慢的检查设计同构性的算法, 我们没有检查与 [4] 的交集, 但我们假设那里也可能有缺失的设计。

由于我们为循环/交换/任意群的情况有不同的优化算法, 某些情况将以乘数-指纹-差族的形式呈现, 并且具有共同的群元素形式, 但由广义群算法生成的结果将以指纹-差族的形式出现。该搜索的凯莱表是由 GAP[5] 中的 LOOPS 包 [6] 的程序凯莱表 (入环 (小群 $(v - 1, \text{id}_x)$)) 生成的。由于大多数群是非交换的, 因此块上的群作用从左侧应用。

对于 1-旋转差族, 应用了以下等价关系 [2]。

定义 1.1. 两个差分族 $D = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 和 $D' = \{B'_1, B'_2, \dots, B'_m\}$ 在一个群 G 上是等价的, 如果存在一个 G 的同构 α , 使得对于所有的 i , B'_i 是 $\alpha(B_i)$ 的一个平移。

差族的等价比设计同构更粗糙, 因为等价的差族会导致同构的斯坦纳系统, 但反之则不成立。示例 2.4、3.3 和表中关于阶数为 4 的单元显示有时它可以很好地过滤, 但有时同构的斯坦纳系统不会被过滤。我们正在使用差族等价关系来过滤设计。

GAP ID	Structure	# of diff families	Comments
小群组 (8,1)	C8	1	-
小群组 (8,4)	Q8	1	-
SmallGroup(18,5)	C6 × C3	1	-
SmallGroup(24,3)	SL(2,3)	7	-
SmallGroup(26,2)	$\mathbb{Z}_{26}$	36	-
小群组 (32,1)	C32	242	-
小群组 (32,20)	Q32	84	-
SmallGroup(42,2)	C2 × (C7 : C3)	14688	-
SmallGroup(50,2)	$\mathbb{Z}_{50}$	550528	-
SmallGroup(50,4)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$	24888	84 with multiplier 3
SmallGroup(57,1)	C7 : C8	≥ 1	-
SmallGroup(57,2)	C56	≥ 1	-
SmallGroup(57,3)	C7 : Q8	≥ 1	-
SmallGroup(57,10)	C7 × Q8	≥ 1	-
SmallGroup(72,12)	C3 × (C3 : C8)	≥ 1	-
小群组 (72,13)	(C3 × C3) : C8	≥ 1	-
SmallGroup(72,14)	C24 × C3	≥ 1	-
SmallGroup(72,19)	(C3 × C3) : C8	≥ 1	-
小群组 (72,24)	(C3 × C3) : Q8	≥ 1	-
SmallGroup(72,25)	C3 × SL(2,3)	≥ 1	-
SmallGroup(72,26)	C3 × (C3 : Q8)	≥ 1	-
SmallGroup(72,31)	(C3 × C3) : Q8	≥ 1	-
SmallGroup(72,38)	C3 × C3 × Q8	≥ 1	-

示例 2.1. 在 [7] 中猜想只有对于 $v \equiv 1, 3, 9, 19 \pmod{24}$ 存在 1-旋转设计。通过计算确认了不存在针对 $(v, k) \in \{(7, 3), (13, 3), (15, 3), (21, 3), (31, 3), (37, 3), (39, 3), (45, 3), (55, 3), (61, 3), (63, 3), (67, 3), (69, 3)\}$ 的 1-旋转设计。

示例 2.2. 两个群生成同一个阶为 3 的仿射平面 $(v, k) = (9, 3)$ 。

- (1) SmallGroup(8,1) = C8 {1=432} [[0, 1, 4], [0, 3, ∞]]
- (2) SmallGroup(8,4) = Q8 {1=432} [[0, 1, 2], [0, 3, ∞]]

示例 2.3. 存在一个针对 $(v, k) = (19, 3)$ 的 1-旋转设计 SmallGroup(18,5) = C6 × C3。

- (1) {0=432, 1=5040} [[0, 1, ∞], [0, 2, 5], [0, 3, 8], [0, 4, 12], [0, 7, 16]]

示例 2.4. 存在七种针对 $(v, k) = (25, 3)$ 的 1-旋转设计，全部适用于群组 SmallGroup(24,3) = SL(2,3)。

- (1) {0=192, 1=13008} [[0, 1, 2], [0, 3, 13], [0, 4, ∞], [0, 7, 20], [0, 8, 18], [0, 15, 21]]
- (2) {0=1536, 1=11664} [[0, 1, 5], [0, 2, 3], [0, 4, ∞], [0, 6, 12], [0, 7, 20], [0, 8, 19]]

3. $\kappa=4$ 时的 1-旋转设计枚举

GAP ID	Structure	# of diff families	Comments
小群组 (15,1)	$\mathbb{Z}_{15}$	1	-
SmallGroup(24,10)	$C3 \times D8$	1	-
SmallGroup(24,12)	$S4$	2	-
SmallGroup(27,3)	$(C3 \times C3) : C3$	2	-
SmallGroup(27,4)	$C9 : C3$	1	-
小群组 (27,5)	$C3 \times C3 \times C3$	1	-
SmallGroup(39,1)	$C13 : C3$	28	-
SmallGroup(39,2)	$C39$	2	-
小群组 (48,3)	$(C4 \times C4) : C3$	105	-
SmallGroup(48,10)	$(C3 : C8) : C2$	16	-
SmallGroup(48,11)	$C4 \times (C3 : C4)$	40	-
SmallGroup(48,20)	$C12 \times C4$	4	-
SmallGroup(48,24)	$C3 \times (C8 : C2)$	26	-
小群组 (51,1)	$\mathbb{Z}_{51}$	166	-
小群组 (63,1)	$C7 : C9$	5508	-
小群组 (63,2)	$C63$	18532	-
SmallGroup(63,3)	$C3 \times (C7 : C3)$	77507	-
SmallGroup(63,4)	$C21 \times C3$	9766	-
SmallGroup(72,10)	$C9 \times D8$	38600	-
SmallGroup(72,15)	$((C2 \times C2) : C9) : C2$	4	-
小群组 (72,22)	$(C6 \times S3) : C2$	96	-
SmallGroup(72,28)	$C3 \times D24$	544	-
SmallGroup(72,30)	$C3 \times ((C6 \times C2) : C2)$	3308	-
小群组 (72,37)	$C3 \times C3 \times D8$	30840	-
SmallGroup(72,40)	$(S3 \times S3) : C2$	128	-
SmallGroup(72,42)	$C3 \times S4$	52259	-
小群组 (72,43)	$(C3 \times A4) : C2$	32	-

示例 3.1. 不存在 $(v, k) \in \{(13, 4), (37, 4), (61, 4)\}$ 的 1-旋转设计。

示例 3.2. 仅有一个 1-旋转设计为 $(v, k) = (16, 4)$ ，该设计由群 $\mathbb{Z}_{15}$ 得到： $[[0, 1, 3, 7], [0, 5, 10, \infty]]$ 。

示例 3.3. 仅有一个在同构意义下的 1-旋转设计 $(v, k) = (25, 4)$ 可以通过三种方式获得。

- (1) SmallGroup(24,10) = $C3 \times D8$ {1=12096, 2=13104}
 $[[0, 1, 4, 7], [0, 2, 6, 20], [0, 3, 10, \infty], [0, 5, 11, 16]]$
- (2) SmallGroup(24,12) = $S4$ {1=12096, 2=13104}
 $[[0, 1, 11, 15], [0, 2, 6, 17], [0, 3, 12, 19], [0, 4, 5, 14], [0, 9, 22, \infty]]$
- (3) SmallGroup(24,12) = $S4$ {1=12096, 2=13104}
 $[[0, 1, 9, 13], [0, 2, 7, 19], [0, 3, 4, 11], [0, 5, 10, 20], [0, 17, 18, \infty]]$

示例 3.4. 存在 41-旋转设计（阶数为 3 的单位）对于 $(v, k) = (28, 4)$ 。

- (1) SmallGroup(27,3) = $(C3 \times C3) : C3$ {0=810, 1=12204, 2=23274}

128,192,256,384,768 的群，非同构设计的数量分别为 75,5,12,1,3。我们没有将这些数据与 [4] 进行比较，因为需要大量的计算。

GAP #	Structure	# of diff families	# of non-iso designs
1	C64	4	4
2	C8 × C8	9	9
3	C8 : C8	16	16
7	Q8 : C8	93	68
11	(C4 × C2)	41	30
13	(C4 × C2) .	42	42
14	(C4 × C2)	32	32
15	C8 : C8	34	34
16	C8 : C8	16	16
27	C16 : C4	4	4
28	C16 : C4	29	28
37	(C4 × C2) .	27	26
43	C8 . (C4 × C2)	2	2
44	C4 : C16	4	4
45	C8 . D8	6	6
46	C16 : C4	15	15
48	C16 : C4	6	6
49	C4 . D16	3	3
120	C4 × Q16	29	29
122	Q16 : C4	27	27
126	C8 × Q8	15	15
127	C8 : Q8	40	40
143	C4 : Q16	18	18
156	Q8 : Q8	54	54
158	Q8 : Q8	62	62
160	(二乘以二)。(二乘以 D8)	67	67
168	(二乘以二)。(二乘以 D8)	52	45
172	(二阶循环群 x 二阶循环群)。(二阶循环群 x 八阶二面体群)	24	24
175	C4 : Q16	4	4
179	C8 : Q8	24	23
180	(C2 × C2)。(C2 × D8)	30	30
181	C8 : Q8	12	12
182	C8 : Q8	50	50
238	Q8 : Q8	78	78
239	Q8 x Q8	23	23
245	(C2 × C2)。(C2 × C2 × C2 × C2)	21	21

GAP ID	Structure	# of diff families	Comments
小群组 (25,1)	C3 : C8	1	-
SmallGroup(25,2)	C24	1	-
SmallGroup(25,3)	SL(2,3)	1	-
小群组 (84,1)	C7 : C12	5626	-
SmallGroup(84,2)	C4 × (C7 : C3)	689	-
SmallGroup(84,3)	C7 × (C3 : C4)	1459	-
SmallGroup(84,4)	C3 × (C7 : C4)	1673	-
SmallGroup(84,5)	C21 : C4	1600	-
SmallGroup(84,6)	C84	1072	-
SmallGroup(84,9)	C2 × C2 × (C7 : C3)	503	-
SmallGroup(84,10)	C7 x A4	180	-
SmallGroup(84,11)	(C14 × C2) : C3	157	-
SmallGroup(84,15)	C42 × C2	464	-
小群组 (100,6)	C5 × (C5 : C4)	110	-
小群组 (100,8)	C20 × C5	40	-
SmallGroup(100,16)	C10 × C10	98	-

示例 5.1. 不存在 $(v, k) \in \{(21, 5), (41, 5), (45, 5), (61, 5), (81, 5)\}$ 的 1-旋转设计。

示例 5.2. 阶数为 5 的仿射平面 $(v, k) = (25, 5)$ 可以通过三种方式获得。

- (1) SmallGroup(24,1) = C3 : C8 {1=36000} [[0, 1, 4, 14, 17], [0, 2, 3, 8, ∞]]
- (2) SmallGroup(24,2) = C24 {1=36000} [[0, 1, 2, 14, 22], [0, 3, 4, 11, ∞]]
- (3) SmallGroup(24,3) = SL(2,3) {1=36000} [[0, 1, 6, 20, 21], [0, 3, 4, 11, ∞]]

6. 结果位置

原始结果可以在 <https://github.com/Ithromant/math-utils/tree/master/src/test/resources/1rot> 中找到。如何理解表格。如果群用计算机字体表示, 则将群转换为使用 [5] 的凯莱表, 否则它们是显而易见的形式 (通常与乘数一起)。原始结果通过在定义 1.1 中定义的等价关系进行过滤。当一个元素的数量等于群的阶时, 这意味着它是群作用下的固定元素。

REFERENCES

- [1] I. Hetman *Steiner systems $S(2, 6, 121/126)$, $S(2, 7, 169)$ based on difference families*, 2024-2025. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.08274>
- [2] C. J. Coulbourn, J. H. Dinitz *Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition*, 2007.
- [3] V. Krcadinac personal website <https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/results/steiner.html>
- [4] Dávid Mezőfi, Gábor Nagy list of paramodified unitals <https://davidmezofi.github.io/unitals/>
- [5] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.14.0*; 2024, <https://www.gap-system.org>.
- [6] Nagy, G. P. and Vojtěchovský, P., loops, Computing with quasigroups and loops in GAP, Version 3.4.4 (2024) (GAP package), <https://gap-packages.github.io/loops/>.
- [7] Buratti, M. 1Rotational Steiner triple systems over arbitrary groups. Journal of Combinatorial Designs - J COMB DES. 9. 215-226. (2001) <https://doi.org/10.1002/jcd.1008>.