

倒势阱的量子力学

— 具有虚特征值的厄米特哈密顿量，量子-经典对应关系

Ni Liu* and J.-Q. Liang

*Institute of Theoretical Physics, State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices,
Shanxi University, Taiyuan 030006, Shanxi, China*

本文研究了在倒置势阱中粒子的量子化问题。哈密顿量是厄米特的，而势则是下方无界的。经典地讲，粒子从势顶中心加速远离。存在的本征态必须是不稳定的，并具有虚本征值，这表征了状态的衰减率。我们通过代数方法解决了倒置势阱的哈密顿问题，使用了与正常振子情况相似的虚频率提升和降低玻色子算符。玻色子数算符是非厄米特的，而整数本征值当然是实数。请求一组对偶的本征态，分别用“bra”和“ket”表示，对应于复共轭数算符。在“bra”和“ket”状态之间存在正交归一化条件。我们导出了一个空间非局域化的生成函数，从中可以通过坐标表示中的提升算符生成 n 阶本征函数。“bra”和“ket”的生成函数用虚积分测度相互归一化。定义在“bra”和“ket”状态之间的概率密度算符是非厄米特不变量，分别导致了对于“bra”和“ket”状态的薛定谔方程。由于衰减，“bra”和“ket”态自身的概率不是守恒量。虚频率玻色相干态定义为降低算符的本征态。在相干态中明确证明了最小不确定性关系。最后，在相干态中的海森堡方程的概率平均值与经典运动方程精确一致。量子-经典对应存在于虚本征值系统中。

PACS numbers:

I. 介绍

这是一个常识，量子力学中的哈密顿量是厄米的以保证实能谱和概率守恒。非厄米哈密顿量通常描述具有复能谱的开放系统。Bender 及其合作者首次发现厄米哈密顿量足以但不是必须拥有实本征值 [1–3]。如果非厄米哈密顿量具有宇称-时间 (PT) 反射对称性 [1–11]，它则可以拥有实谱。具有实谱的非厄米哈密顿量被 Mostafazadeh 称为伪厄米，他推导出了其必要条件 [12–14]。然而，伪厄米哈密顿量并不局限于 PT 对称性。发现 PT 非对称哈密顿量也可以具有实数谱 [8, 15–17]。

事实上，不仅非厄米特哈密顿算子，保守系统的厄米特哈密顿算子在势能无下界的情况下也可能具有复数谱。倒置双井势的复数谱很久以前就通过瞬子方法在半经典近似 [18, 19] 下进行了研究。本征态的概率密度不再是守恒量，不同于实数本征值。能量本征值的虚部表征了亚稳态的衰减率或寿命 [18, 19]。迄今为止，在量子力学框架内尚未给出厄米特哈密顿算子严格意义上的复数本征值和相应的本征态。

我们在本文中通过代数方法解决了粒子在倒置势阱中的哈密顿问题。

经典地，粒子加速远离倒置势阱的中心。量子波函数当然是空间非局域化的。

II. 粒子在倒置势阱中的本征态

我们考虑质量为单位的粒子 $m = 1$ 在倒置势阱中的哈密顿量

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2}\omega^2 x^2. \quad (1)$$

*Electronic address: liuni2011520@sxu.edu.cn

经典方程的解是

$$x(t) = \pm \frac{v}{\omega} \sinh \omega t, \quad (2)$$

其中 v 是初始速度。该粒子以加速的方式远离倒置势阱中心移动。如果没有初始速度 ($v = 0$)，粒子将永远停留在势阱顶部。而从量子力学的角度来看，它会因为不确定性原理而掉落。这一不稳定的静态解已经被量子力学 [20] 从多个角度进行了深入研究。它被称为在 ϕ^4 场论中的 spheron [21]。现有的本征态必须是不稳定的，具有纯虚的本征值。

A. 厄米特哈密顿算子的复本征值

首先，我们介绍具有复本征值的厄米哈密顿量的一般形式。对于离散共轭本征值，分别需要一组对偶本征态，使得，

$$\hat{H}|u_n\rangle_r = E_n|u_n\rangle_r, \quad \hat{H}|u_n\rangle_l = E_n^*|u_n\rangle_l, \quad (3)$$

其中 $|u_n\rangle_i$ 与 $i = r, l$ 分别称为“右矢”和“左矢”状态。哈密顿量作用于方程 (3) 右侧本征态时，这被称为正规顺序。取方程的复共轭 (3)，我们得到反对正规序操作

$${}_r\langle u_n|\hat{H} = {}_r\langle u_n|E_n^*, \quad {}_l\langle u_n|\hat{H} = {}_l\langle u_n|E_n. \quad (4)$$

正交归一条件是

$${}_l\langle u_n|u_m\rangle_r = \delta_{nm} \quad (5)$$

在对偶集本征态之间。期望值

$${}_l\langle u_n|\hat{H}|u_n\rangle_r = E_n, \quad {}_r\langle u_n|\hat{H}|u_n\rangle_l = E_n^*,$$

是明确定义的。然而，期望值

$$\begin{aligned} {}_r\langle u_n|\vec{H}|u_n\rangle_r &= E_n - {}_r\langle u_n|u_n\rangle_r, \quad {}_r\langle u_n|\overleftarrow{H}|u_n\rangle_r = E_n^* - {}_r\langle u_n|u_n\rangle_r, \\ {}_l\langle u_n|\vec{H}|u_n\rangle_l &= E_n^* - {}_l\langle u_n|u_n\rangle_l, \quad {}_l\langle u_n|\overleftarrow{H}|u_n\rangle_l = E_n - {}_l\langle u_n|u_n\rangle_l, \end{aligned}$$

依赖于正规序方程 (3) 和反对正规序方程 (4) 的操作。状态密度 ${}_i\langle u_n|u_n\rangle_i$ 对于“bra”和“ket”态 $i = r, l$ 是非规范化的。

Schrödinger 方程的特殊解

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_i = \hat{H}|\psi\rangle_i \quad (6)$$

对于 $i = r, l$ 明显是

$$\begin{aligned} |\psi_n(t)\rangle_r &= e^{\frac{1}{\hbar}(-iE_n^R + E_n^I)t}|u_n\rangle_r \\ |\psi_n(t)\rangle_l &= e^{\frac{1}{\hbar}(-iE_n^R - E_n^I)t}|u_n\rangle_l \end{aligned} \quad (7)$$

其中复能量本征值写为实部和虚部 $E_n = E_n^R + iE_n^I$ 。“ket”和“bra”状态的概率密度

$$\begin{aligned} {}_r\langle \psi_n(t)|\psi_n(t)\rangle_r &= e^{\frac{2}{\hbar}E_n^I t}{}_r\langle u_n|u_n\rangle_r, \\ {}_l\langle \psi_n(t)|\psi_n(t)\rangle_l &= e^{-\frac{2}{\hbar}E_n^I t}{}_l\langle u_n|u_n\rangle_l \end{aligned}$$

也不是守恒量。虽然正交归一条件方程 (5) 对时间依赖状态有效。

$${}_l\langle \psi_m(t)|\psi_n(t)\rangle_r = \delta_{mn}.$$

B. 非厄米数算符和厄米哈密顿量的虚部本征值

对于倒置的势阱，任何本征态都是不稳定的，因此如果存在本征值，则必须是纯虚数。我们将通过代数方法求解该势模型。哈密顿量可以表示为

$$\hat{H} = i\omega\hbar \left[\frac{\hat{p}^2}{2i} + \frac{1}{2}i\hat{x}^2 \right], \quad (8)$$

其中 $\hat{x}, \hat{p}$ 是无量纲变量。由

$$\hat{a}_- = \sqrt{\frac{i}{2}}(\hat{x} + \hat{p}), \quad \hat{a}_+ = \sqrt{\frac{i}{2}}(\hat{x} - \hat{p}) \quad (9)$$

定义的虚频玻色子算符满足通常的对易关系

$$[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1, \quad (10)$$

而

$$\hat{a}_-^\dagger = i\hat{a}_-, \quad \hat{a}_+^\dagger = i\hat{a}_+.$$

哈密顿方程 (8) 可以用玻色子算符表示为

$$\hat{H} = i\omega\hbar \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

其中，玻色子数算符

$$\hat{n} = \hat{a}_+ \hat{a}_-$$

由于

$$\hat{n}^\dagger = -\hat{a}_- \hat{a}_+ = -(\hat{n} + 1). \quad (12)$$

是非厄米的 而哈密顿方程 (11) 是厄米的

$$\hat{H}^\dagger = \hat{H}$$

非厄米但具有实本征值的数算符称为伪厄米特 [12–14, 16? ? –19]，其也具备一组对偶本征态

$$\begin{aligned} \hat{n}|n\rangle_r &= n|n\rangle_r; \quad {}_r\langle n|n = {}_r\langle n|\hat{n}^\dagger \\ \hat{n}^\dagger|n\rangle_l &= n|n\rangle_l; \quad {}_l\langle n|n = {}_l\langle n|\hat{n} \end{aligned} \quad (13)$$

“bra” (${}_l\langle n|$) 和 “ket” ($|m\rangle_r$) 状态之间的正交归一化条件被定义为

$${}_l\langle n|m\rangle_r = \delta_{nm}. \quad (14)$$

哈密顿量的本征值由以下给出

$$\hat{H}|n\rangle_r = i\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle_r, \quad \hat{H}|n\rangle_l = -i\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle_l. \quad (15)$$

并且反对正规顺序是

$${}_r\langle n|\hat{H} = -i\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) {}_r\langle n|, \quad {}_l\langle n|\hat{H} = i\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) {}_l\langle n|. \quad (16)$$

期望值定义为

$${}_l\langle n|\hat{H}|n\rangle_r = i\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad {}_r\langle n|\hat{H}|n\rangle_l = -i\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

这些是唯一的。“bra” 或 “ket” 自身的期望值取决于正常/反常排序。

$${}_r\langle n|\vec{\hat{H}}|n\rangle_r = \pm i\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad {}_r\langle n|n\rangle_r, \quad {}_l\langle n|\vec{\hat{H}}|n\rangle_l = \mp i\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad {}_l\langle n|n\rangle_l,$$

其中概率密度 ${}_i\langle n|n\rangle_i$ 与 $i = r, l$ 是非归一化的。它们也不是守恒量，因为本征态的不稳定性。

C. $SU(1,1)$ -生成表示法

$SU(1,1)$ 生成元可以通过诸如

$$\begin{aligned}\hat{S}_z &= \frac{1}{2}(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}), \quad \hat{S}_z^\dagger = -\hat{S}_z \\ \hat{S}_\pm &= \frac{1}{2}\hat{a}_\pm^2, \quad \hat{S}_\pm^\dagger = -\hat{S}_\pm,\end{aligned}\tag{17}$$

这样的虚频率玻色算子实现，在其中 $\hat{S}_z$ 是非厄米特的，这与正常振荡器 [21] 的情况不同。 x, y 组件的操作符按常规定义为

$$\begin{aligned}\hat{S}_x &= \frac{1}{2}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-), \\ \hat{S}_y &= \frac{1}{2i}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-).\end{aligned}$$

x 组件是反厄米特的

$$\hat{S}_x^\dagger = -\hat{S}_x$$

而 y 组件是厄米特的

$$\hat{S}_y^\dagger = \hat{S}_y.$$

$SU(1,1)$ 交换关系成立，使得

$$\begin{aligned}[\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= i\hat{S}_z, \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_\pm] &= \pm\hat{S}_\pm, \\ [\hat{S}_+, \hat{S}_-] &= -2\hat{S}_z.\end{aligned}$$

哈密顿量由 $SU(1,1)$ 生成元表示

$$\hat{H} = 2i\omega\hbar\hat{S}_z.\tag{18}$$

D. 升降算符，本征态的递推关系

我们给出了降低和提升算符下 $\hat{n}$ 和 $\hat{n}^\dagger$ 的本征态的递推关系。算子 $\hat{a}_-$ 作为降算符作用于 “ket” 态，因为根据虚频率玻色子算符的对易关系方程 (10)，

$$\hat{n}\hat{a}_-|n\rangle_r = (n-1)\hat{a}_-|n\rangle_r$$

因此，

$$\hat{a}_-|n\rangle_r = c_{n-}^r|n-1\rangle_r.\tag{19}$$

$\hat{a}_+$ 是 “ket” 态的升算符，

$$\hat{n}\hat{a}_+|n-1\rangle_r = n\hat{a}_+|n-1\rangle_r$$

和

$$\hat{a}_+|n-1\rangle_r = c_{(n-1)+}^r|n\rangle_r.\tag{20}$$

利用方程对于 (19,20), 我们有

$$\hat{n}|n\rangle_r = n|n\rangle_r = c_{n-}^r c_{(n-1)+}^r |n\rangle_r.$$

然后

$$c_{n-}^r c_{(n-1)+}^r = n,$$

从归一化条件方程 (14) 得出。重复相同的过程对于状态 $_{-}|n-1\rangle_r, _{-}|n-2\rangle_r$ 等等, 我们得到递推关系。

$$c_{(n-1)-}^r c_{(n-2)+}^r = n-1$$

$$\dots\dots$$

$$c_{1-}^r c_{0+}^r = 1$$

状态 $_{-}|0\rangle_r$ 对应最低的初始能量, 因此降低操作必须终止以使得

$$\hat{a}_{-}|0\rangle_r = 0, \quad c_{0-}^r = 0 \quad (21)$$

我们设定解为

$$c_{n-}^r = c_{(n-1)+}^r = \sqrt{n}, c_{(n-1)-}^r = c_{(n-2)+}^r = \sqrt{n-1} \dots c_{1-}^r = c_{0+}^r = 1. \quad (22)$$

然后第 n 个本征态 $|n\rangle_r$ 可以通过提升算子从基态 $|0\rangle_r$ 生成

$$|n\rangle_r = \frac{(\hat{a}_{+})^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle_r \quad (23)$$

对于 “bra” 状态, 数算符是 $\hat{n}^\dagger$ 。可以从方程 (12, 13) 中很容易地发现,

$$\hat{n}^\dagger \hat{a}_{-}|n\rangle_l = (n+1) \hat{a}_{-}|n\rangle_l,$$

和

$$\hat{n}^\dagger \hat{a}_{+}|n\rangle_l = (n-1) \hat{a}_{+}|n\rangle_l.$$

$\hat{a}_{-}$ 成为提升算符而降低算符是 $\hat{a}_{+}$ 与 “Ket” 态的情况相反。我们假设

$$\hat{a}_{-}|n-1\rangle_l = c_{(n-1)-}^l |n\rangle_l,$$

和

$$\hat{a}_{+}|n\rangle_l = c_{n+}^l |n-1\rangle_l.$$

然后根据方程组我们有 (12,13)

$$\hat{n}^\dagger |n\rangle_l = n |n\rangle_l = -c_{(n-1)-}^l c_{n+}^l |n\rangle_l.$$

按照与 “ket” 状态相同的过程, 我们得到

$$c_{n+}^l c_{(n-1)-}^l = -n$$

$$c_{(n-1)+}^l c_{(n-2)-}^l = -(n-1)$$

$$\dots\dots$$

$$c_{1+}^l c_{0-}^l = -1 \quad (24)$$

对最低能量态 $|0\rangle_l$ 的降操作必须终止

$$\hat{a}_{+}|0\rangle_l = 0, \quad c_{0+}^l = 0. \quad (25)$$

假设方程组的解为 (24)

$$c_{n+}^l = c_{(n-1)-}^l = -i\sqrt{n}, \quad c_{(n-1)+}^l = c_{(n-2)-}^l = -i\sqrt{n-1} \dots c_{1+}^l = c_{0-}^l = -i. \quad (26)$$

第 n 个本征态由提升算子从基态生成

$$|n\rangle_l = \frac{(\hat{a}_-)^n}{(-i)^n \sqrt{n!}} |0\rangle_l \quad (27)$$

III. 波函数和归一化

“ket” 波函数的生成函数是从基态方程 (21) 获得的,

$$\hat{a}_- |0\rangle_r = 0,$$

在坐标表示中是

$$\sqrt{\frac{i}{2}} \int \langle x | (\hat{x} + \hat{p}) | x' \rangle \langle x' | 0 \rangle_r dx' = 0$$

即

$$\left(x - i \frac{d}{dx} \right) \psi_0^r = 0.$$

被称为生成函数的基态波函数是

$$\psi_0^r = \frac{1}{\sqrt{N_r}} e^{-i \frac{x^2}{2}}, \quad (28)$$

其中 N_r 是待确定的归一化常数。第 n 个激发波函数可以通过提升算子从方程 (23) 生成

$$\psi_n^r = \frac{1}{\sqrt{N_r} \sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{i}{2}} \right)^n \left(x - i \frac{d}{dx} \right)^n e^{-i \frac{x^2}{2}} \quad (29)$$

“bra” 态的生成函数是从方程 equation(25)

$$\hat{a}_+ |0\rangle_l = 0,$$

导出的, 它在坐标表示中变为

$$\left(x + i \frac{d}{dx} \right) \psi_0^l = 0.$$

然后,

$$\psi_0^l = \frac{1}{\sqrt{N_l}} e^{i \frac{x^2}{2}}.$$

第 n 个“bra” 本征态波函数写作

$$\psi_n^l = \frac{1}{(-i)^n \sqrt{n!} \sqrt{N_l}} \left(\sqrt{\frac{i}{2}} \right)^n \left(x + i \frac{d}{dx} \right)^n e^{i \frac{x^2}{2}} \quad (30)$$

归一化条件借助于费曼路径积分中的虚积分测度 [21, 22]

$$\int_l \langle 0 | x \rangle \langle x | 0 \rangle_r dx = \frac{1}{\sqrt{N_l^* N_r}} \int e^{-ix^2} dx = \frac{1}{\sqrt{N_l^* N_r}} \sqrt{\frac{\pi}{i}} = 1,$$

给出归一化常数

$$N_r = \sqrt{\frac{\pi}{i}}, \quad N_l = \sqrt{\frac{\pi}{-i}}$$

归一化的波函数由以下表达式给出：

$$\begin{aligned}\psi_0^r &= \left(\frac{i}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{x^2}{2}}, \psi_0^l = \left(\frac{-i}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{x^2}{2}} \\ \psi_n^r &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{i}{2}}\right)^n \left(\frac{i}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(x - i\frac{d}{dx}\right)^n e^{-i\frac{x^2}{2}} \\ \psi_n^l &= \frac{1}{(-i)^n \sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{i}{2}}\right)^n \left(\frac{-i}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(x + i\frac{d}{dx}\right)^n e^{i\frac{x^2}{2}}\end{aligned}\quad (31)$$

生成函数用虚积分测度归一化，

$$\int (\psi_0^l)^* \psi_0^r dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-(\sqrt{i}x)^2} d(\sqrt{i}x) = 1,$$

这与费曼路径积分 [21, 22] 中的完全相同。虽然 “bra” 和 “ket” 状态的概率都是常数

$$(\psi_0^i)^* \psi_0^i = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

对于 $i = r, l$ 。这些状态是非归一化的，因为空间坐标积分会导致无穷大。

$$\int (\psi_0^i)^* \psi_0^i dx \rightarrow \infty.$$

IV. 虚频玻色子算符的相干态

虚频率玻色子算符的相干态可以定义为降低算符 $\hat{a}_-$, $\hat{a}_+$ 分别对于 “ket” 和 “bra” 本征态集的本征态。

A. “Ket” 集合的相干态

“ket” 集合的相干态定义为降低算子

$$\hat{a}_- |\alpha\rangle_r = \alpha |\alpha\rangle_r, \quad (32)$$

的本征态，可以写成数算子 $\hat{n} = \hat{a}_+ \hat{a}_-$ 的本征态的展开，

$$|\alpha\rangle_r = \sum_n c_n^r |n\rangle_r.$$

定义方程 (32) 导致递推方程

$$\hat{a}_- |\alpha\rangle_r = \sum_n c_n^r c_{n-1}^r |n-1\rangle_r = \alpha \sum_n c_n^r |n\rangle_r. \quad (33)$$

然后对方程 (33) 应用提升算子，我们有

$$\sum_n c_n^r \hat{a}_+ \hat{a}_- |n\rangle_r = \sum_n c_n^r n |n\rangle_r = \alpha \sum_n c_n^r c_{n+1}^r |n+1\rangle_r. \quad (34)$$

与状态 ${}_l\langle n|$ 取内积，我们得到

$$c_n^r n = \alpha c_{n-1}^r c_{(n-1)+}^r. \quad (35)$$

由于从方程 (22) 可知 $c_{(n-1)+}^r = \sqrt{n}$, 系数的递推关系是

$$\begin{aligned} c_n^r &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1}^r, \\ c_{n-1}^r &= \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} c_{n-2}^r \\ &\dots\dots\dots \\ c_1^r &= \alpha c_0^r \end{aligned} \quad (36)$$

相干态变为

$$|\alpha\rangle_r = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0^r |n\rangle_r \quad (37)$$

参数 c_0^r 由归一化条件确定。

B. “bra” 集的相干态

“bra” 集合的相干态定义为降算子如

$$\hat{a}_+ |\alpha\rangle_l = \alpha |\alpha\rangle_l, \quad |\alpha\rangle_l = \sum_n c_n^l |n\rangle_l, \quad (38)$$

和

$$\sum c_n^l \hat{a}_+ |n\rangle_l = \alpha \sum c_n^l |n\rangle_l. \quad (39)$$

的本征态。将提升算子 $-\hat{a}_-$ 应用到方程 (39) 得到

$$\sum c_n^l (-\hat{a}_- \hat{a}_+) |n\rangle_l = \sum c_n^l \hat{n}^\dagger |n\rangle_l = -\alpha \sum c_n^l \hat{a}_- |n\rangle_l,$$

, 这变为

$$\begin{aligned} \sum c_n^l n |n\rangle_l &= -\alpha \sum c_n^l c_{n-}^l |n+1\rangle_l = -\alpha \sum c_{n-1}^l c_{(n-1)-}^l |n\rangle_l \\ &= \alpha \sum c_{n-1}^l i\sqrt{n} |n\rangle_l, \end{aligned} \quad (40)$$

, 注意到方程 (26) 中的值 $c_{(n-1)-}^l = -i\sqrt{n}$ 。系数的递推关系是

$$\begin{aligned} c_n^l &= \frac{i\alpha}{\sqrt{n}} c_{(n-1)}^l, \\ c_{n-1}^l &= \frac{i\alpha}{\sqrt{n-1}} c_{(n-2)}^l, \\ &\dots\dots\dots \\ c_1^l &= i\alpha c_0^l \end{aligned} \quad (41)$$

“bra” 集合的相干态是

$$|\alpha\rangle_l = \sum_n \frac{(i\alpha)^n}{\sqrt{n!}} c_0^l |n\rangle_l. \quad (42)$$

“bra” 和 “ket” 相干态之间的归一化条件被看到是

$$\begin{aligned} {}_l\langle\alpha|\alpha\rangle_r &= \sum_n \frac{(-i)^n |\alpha|^{2n}}{n!} (c_0^l)^* c_0^r \\ &= e^{-i|\alpha|^2} (c_0^l)^* c_0^r = 1 \end{aligned}$$

归一化常数是

$$c_0^r = e^{i\frac{|\alpha|^2}{2}}, \quad c_0^l = e^{-i\frac{|\alpha|^2}{2}}.$$

归一化的相干态由以下给出

$$|\alpha\rangle_r = e^{i\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_r \quad (43)$$

以及

$$|\alpha\rangle_l = e^{-i\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(-i\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_l. \quad (44)$$

C. 最小不确定性

相干态也可以通过最小不确定性来定义。位置和动量算符分别由虚频率玻色子算符表示为

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2i}} (\hat{a}_- + \hat{a}_+), \quad \hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2i}} (\hat{a}_- - \hat{a}_+). \quad (45)$$

根据相干态的定义

$$\begin{aligned} \hat{a}_- |\alpha\rangle_r &= \alpha |\alpha\rangle_r, \quad {}_r\langle\alpha|\hat{a}_-^\dagger = {}_r\langle\alpha|\alpha^*, \quad \hat{a}_-^\dagger = i\hat{a}_-, \\ \hat{a}_+ |\alpha\rangle_l &= \alpha |\alpha\rangle_l, \quad {}_l\langle\alpha|\hat{a}_+^\dagger = {}_l\langle\alpha|\alpha^*, \quad \hat{a}_+^\dagger = i\hat{a}_+, \end{aligned}$$

在相干态上的位置算符平均值计算为

$$\langle\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2i}} {}_l\langle\alpha| (\hat{a}_- + \hat{a}_+) |\alpha\rangle_r = \frac{1}{\sqrt{2i}} (\alpha - i\alpha^*), \quad (46)$$

其平方是

$$\langle\hat{x}\rangle^2 = \frac{1}{2i} \left(\alpha^2 - 2i|\alpha|^2 - (\alpha^*)^2 \right) \quad (47)$$

而位置算符的平方读作

$$\hat{x}^2 = \frac{1}{2i} (\hat{a}_+^2 + 2\hat{a}_+\hat{a}_- + 1 + \hat{a}_-^2)$$

其平均值由下式给出

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{1}{2i} \left(-(\alpha^*)^2 - i2\alpha^*\alpha + 1 + \alpha_-^2 \right) \quad (48)$$

偏差是

$$\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2 = -\frac{i}{2}.$$

动量算符的期望值是

$$\langle\hat{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2i}} {}_l\langle\alpha|\hat{a}_- - \hat{a}_+|\alpha\rangle_r = \frac{1}{\sqrt{2i}} (\alpha + i\alpha^*)$$

其平方为

$$\langle\hat{p}\rangle^2 = \frac{1}{2i} \left(\alpha_-^2 - (\alpha^*)^2 + i2\alpha^*\alpha \right). \quad (49)$$

动量平方的期望值是

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{1}{2i} \left(\alpha_-^2 - (\alpha^*)^2 + i2\alpha^* \alpha - 1 \right).$$

动量偏差是

$$\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \frac{i}{2}$$

最小不确定性满足,

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}, \quad (50)$$

其中 $\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$, 和 $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$.

V. 本征态的衰减及动态量子经典对应关系

具有虚数本征值的本征态是不稳定的。虚数本征值表征了衰减率。时间依赖的 Schrödinger 方程 (6) 的特殊解分别由

$$|\psi_n(t)\rangle_r = |n\rangle_r e^{(n+\frac{1}{2})\omega t}, \quad |\psi_n(t)\rangle_l = |n\rangle_l e^{-(n+\frac{1}{2})\omega t} \quad (51)$$

给出, 对应于“ket”和“bra”态。概率密度不再是守恒量。它随时间增加或减少, 表明了虚数本征值的本质。非厄米密度算符

$$\hat{\rho}_{r,l} = |\psi\rangle_r \langle \psi|$$

对于“bra”和“ket”是一个不变量

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{r,l} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_{r,l} + [\hat{\rho}_{r,l}, \hat{H}] = 0 \quad (52)$$

这与薛定谔方程 (51) [8-10, 21] 一致。众所周知, 相干态中的海森堡方程的平均值恰好与正常振子的古典轨道 [21] 相符。我们现在研究在定义于方程式中的虚频玻色相干态中倒势阱的量子动力学。(32,38). 为此我们从海森堡方程

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, \hat{H}] = \omega \hat{p}, \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = \omega \hat{x},$$

开始, 因此

$$\frac{d^2 \hat{x}}{dt^2} = \omega^2 \hat{x}. \quad (53)$$

在相干态下海森堡方程 (53) 的期望值是

$$\ddot{\alpha} - i(\ddot{\alpha})^* = \omega^2 (\alpha - i\alpha^*) \quad (54)$$

分别对应于平均值 ${}_l \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle_r$ 和

$$\ddot{\alpha} + i(\ddot{\alpha})^* = \omega^2 (\alpha + i\alpha^*) \quad (55)$$

对于平均值 ${}_r \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle_l$ 。方程组 (54, 55) 导出了微分方程

$$\ddot{\alpha} = \omega^2 \alpha, \quad (56)$$

, 其解与经典轨道方程 2 完全相同

$$\bar{x}(t) = \alpha(t) = \pm \frac{v}{\omega} \sinh \omega t.$$

量子-经典对应关系也存在于具有虚特征值的系统中。

VI. 结论

对于处于倒置势阱中的粒子系统，哈密顿量是厄米的，然而，该势能下无界。本征值是纯虚数，因为本征态不稳定。很久以前就用瞬子方法研究了亚稳态衰变，在这种方法中，复本征值的虚部表征了衰变速率 [18, 19]。具有纯虚数本征值的厄米哈密顿量尚未在基本对易关系下自洽地建立。本文采用代数方法，利用虚频率玻色子算符解决了倒置势阱问题。需要一组与复共轭本征值对应的双态集合。正交归一条件适用于这些双态集合之间。玻色子数算符是非厄米的，而整数本征值当然是实数。波函数的概率密度在空间上非局域化，并且定义在其虚积分测度下，与费曼路径积分 [21, 22] 相同。作为降算符的本征态导出的玻色相干态明确满足动量和位置算符的最小不确定性。在相干态中海森堡方程的期望值给出了相同的经典轨道，表明精确的量子-经典对应关系。

-
- [1] C. M. Bender, S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).
 - [2] C. M. Bender, S. Boettcher, and P. Meisinger, J. Math. Phys. **40**, 2201 (1999).
 - [3] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002).
 - [4] C. M. Bender, B. K. Berntson, D. Parker, and E. Samuel, Am. J. Phys. **81**, 173 (2013).
 - [5] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Phys. Rev. D. **70**, 025001 (2004).
 - [6] C. M. Bender, Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
 - [7] C. M. Bender, PT Symmetry: in Quantum and Classical Physics (World Scientific, Singapore, 2018).
 - [8] Y. Gu, X. M. Bai, X. L. Hao, and J.-Q. Liang, Results. Phys. **38**, 105561 (2022).
 - [9] Y. Gu, X. L. Hao, and J.-Q. Liang, Ann. Phys.(Berlin). **534**, 2200069 (2022).
 - [10] N. Liu, S. Huang, and J.-Q. Liang, Results. Phys. **40**, 105813 (2022).
 - [11] D. N. Christodoulides, J. Yang, Parity-time symmetry and its applications (Springer Tracts in Modern Physics, 2018).
 - [12] A. Mostafazadeh, Nuclear. Physics. B. **640**, 419 (2002).
 - [13] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43**, 205 (2002).
 - [14] A. Mostafazadeh, Phys. Lett. B. **650**, 208 (2007).
 - [15] N. Liu, Y. Gu, and J.-Q. Liang, Phys. Scr. **98**, 035109 (2023).
 - [16] N. Amaouche, M. Sekhri, R. Zerimeche, M. Mustaphaa, and J.-Q. Liang, Physics. open. **13**, 100126 (2022).
 - [17] Y. Luo, N. Liu, J.-Q. Liang, Phys. Rev. A **110**, 063320 (2024)
 - [18] J. -Q. Liang and H. J. W. Müller-Kirsten, Phys. Rev. D. **45**, 2963 (1992)
 - [19] J. -Q. Liang and H. J. W. Müller-Kirsten, Phys. Rev. D. **50**, 6519 (1994)
 - [20] Harald J. W. Müller-Kirsten, Introduction to Quantum Mechanics: Schrödinger Equation and Path Integral, World Scientific, Singapore (2006)
 - [21] J. -Q. Liang and L. F. Wei, New Advances in Quantum Physics (Third edition) (Science Press, Beijing, 2023).
 - [22] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York: McGraw-Hill, 1955
 - [23] J.-Q. Liang, H. J. W. Müller-Kirsten, Y. B. Zhang, A. V. Shurgaia, S. P. Kou, and D. K. Park, Phys. Rev. D. **62**, 025017 (1999).