

将图的三个度相等

Zhen Liu*, Qinghou Zeng[†]

Center for Discrete Mathematics, Fuzhou University, Fujian, 350003, China

Abstract

在这篇论文中，我们证明了对于每个至少有 5 个顶点的图，都可以删除至多 3 个顶点，使得得到的子图至少有三个顶点具有相同的度数。这解决了 Caro、Shapira 和 Yuster [Electron. J. Combin. 21 (2014) P1.24] 的一个公开问题。

关键词: 诱导子图，重复度，可平衡集，可行集

1 介绍

本文中考虑的所有图除非另有说明，均为有限的、简单的和无向的。对于图 G ，记为 $\text{rep}(G)$ 的重复次数是顶点度的最大重数在 G 中。显然，任何至少有两个顶点的图 G 都满足 $\text{rep}(G) \geq 2$ 。也有一些简单的构造表明，对于无穷多的图，等式成立。图和超图的重复数已被各种研究人员广泛研究，见 [1–4, 8, 11, 12]。

由于存在无限多个重复数为二的图，Caro、Shapira 和 Yuster [7] 询问了需要从一个图中删除多少个顶点才能使剩余的导出子图的重复数增加到 3 或更高。对于任意正整数 k ，令 $C(k)$ 表示最小的整数，使得任何 n 顶点的图都有一个导出子图，其至少有 $n - C(k)$ 个顶点且重复数至少为 $\min\{k, n - C(k)\}$ 。显然， $C(1) = C(2) = 0$ 。Caro、Shapira 和 Yuster [7] 建立了对于任何 $k \geq 3$ 的 $\Omega(k \log k) \leq C(k) \leq (8k)^k$ 。特别地，对于第一个非平凡情况 $C(3)$ ，作者 [7] 证明了 $C(3) \leq 6$ ，并且确切值被留作一个未解决的问题。

问题 1.1 (卡罗、沙皮拉和尤斯特 [7]). 确定 $C(3)$ 的确切值。

最近，Kogan [15] 和 Sun、Hou 及 Zeng [16] 连续改进了 $C(3)$ 的上限。在本文中，我们考虑问题 1.1 并确定 $C(3) = 3$ 。我们提到下界 $C(3) \geq 3$ (见图 1) 是由 Caro、Shapira 和 Yuster 构造的 [7]。此外，由 4 个顶点组成的路径表明在以下定理中需要 $|V(G)| \geq 5$ 。

*Email: 1552580575@qq.com

[†]Research partially supported by National Key R&D Program of China (Grant No. 2023YFA1010202) and National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12371342). Email: zengqh@fzu.edu.cn (Corresponding author)

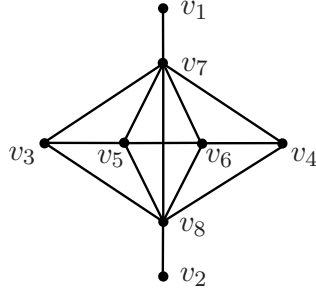


Figure 1: $C(3) \geq 3$

定理 1.2. 对于任意一个具有至少 5 个顶点的图 G ，可以删除至多 3 个顶点，使得所得子图中至少有三个顶点具有相同的度。因此， $C(3) = 3$ 。

符号约定 令 G 为一个图。对于任何 $v \in V(G)$ ，记 $N_G(v)$ 为 v 在 G 中的邻居集合，并且记 $d_G(v)$ 为 v 在 G 中的度数。写出 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ 。对于任意的 $S \subseteq V(G)$ ，令 $G[S]$ 表示在 S 上由 G 导出的子图。对于每个 $S, T \subseteq V(G)$ ，令 $e_G(S, T)$ 表示一端在 S 中而另一端在 T 中的 G 的边的数量。当没有混淆的风险时，我们将省略对 G 的引用。此外，我们通常将任何整数 $k \geq 2$ 写成 $[k] := \{1, \dots, k\}$ 。

2 可行集及相关引理

令 G 是一个图，并且令 $S = \{x, y, z\}$ 是 $V(G)$ 的一个子集，使得 $d(x) \leq d(y) \leq d(z)$ 。我们遵循 [16] 中可行集合的定义。调用 S 可平衡的，如果以下任一条件成立：

(C1) $G[S]$ 是一个独立集；

(C2) $G[S]$ 是一个团；

(C3) $G[S]$ 只包含边 xy ；

(C4) $G[S]$ 只包含边 xy 和 xz 。

此外，如果以下任一条件成立，则调用 S 可访问的：

(C5) $G[S]$ 仅包含边 xz 和 $N(y) \setminus N(z) \neq \emptyset$ ；

(C6) $G[S]$ 只包含边 xy 和 yz ，以及 $N(x) \setminus N[y] \neq \emptyset$ ；

(C7) $G[S]$ 只包含边 yz ，以及 $N(x) \setminus N(y) \neq \emptyset$ ， $N(x) \setminus N(z) \neq \emptyset$ ；

(C8) $G[S]$ 只包含边 xz 和 yz ，以及 $N(x) \setminus N[z] \neq \emptyset$ ， $N(y) \setminus N[z] \neq \emptyset$ 。

通常情况下，如果我们能平衡或访问它，我们会简称为 S 可行的。

我们首先给出孙、侯和曾的 [16] 中的三个引理，这些引理在我们的证明中很有用。对于任意集合 $S = \{x, y, z\}$ 且 $d(x) \leq d(y) \leq d(z)$ ，令 $p(S) := d(z) - d(y)$ 和 $q(S) := d(y) - d(x)$ 。

引理 2.1 (孙、侯和曾 [16]). 如果 G 包含一个可行集 S ，则可以从 G 中删除至多

$$p(S) + q(S) + \max\{p(S), q(S)\}$$

个顶点，使得所得子图至少有三个顶点具有相同的度。

引理 2.2 (孙、侯和曾 [16]). 令 $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 为 G 的一个子集，使得 $d(v_1) \leq d(v_2) \leq d(v_3) \leq d(v_4)$ 。如果 X 不包含可平衡集合，则 $G[X]$ 是一条诱导路径，使得 v_1 和 v_2 是端点。

引理 2.3 (孙、侯和曾 [16]). 令 G 是一个图，并且 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \subseteq V(G)$ 。如果 $d(u_1) \leq \dots \leq d(u_5)$ ，则存在一个可行集 $S \subseteq U$ ，使得 $u_3 \in S$ 。

以下引理在我们证明定理 1.2 中起关键作用。

引理 2.4. 令 G 为一个图，并且令 $U = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq V(G)$ 拥有 $d(v_1) = d(v_2) = d$ 和 $d(v_3) = d(v_4) = d + 2$ 对于任意整数 $d \geq 1$ 。如果 U 包含一个可平衡的集合，则可以从 G 中删除最多 3 个顶点，使得所得子图至少有三个顶点具有相同的度。

证明. 假设 $S \subseteq U$ 是一个可平衡集合。显然， S 中的三个顶点的度数要么是 $d, d, d + 2$ 要么是 $d, d + 2, d + 2$ 。我们可以假设 S 中的三个顶点的度数分别为 $d, d, d + 2$ ；否则，我们可以取 G 的补图作为我们的图。不失一般性，令 $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ 。

声明 2.5. 集合 $N(v_3) \setminus (N[v_1] \cup N[v_2])$ 是空集。

Proof. 假设存在一个顶点 $v \in N(v_3) \setminus (N[v_1] \cup N[v_2])$ 。显然，删除 v 将 v_1, v_2, v_3 的度数从 $(d, d, d + 2)$ 减少到 $(d, d, d + 1)$ 。注意，在生成的图中 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 仍然是可平衡的，因为它在 G 中是可平衡的。由引理 2.1 可知，我们可以最多删除两个顶点以使 v_1, v_2, v_3 的度数相等。总体而言，我们最多删除了 3 个顶点，如所期望的。 $\square$

声明 2.6. 集合 $\{v_1, v_2, v_4\}$ 是可行的。

Proof. 假设 $\{v_1, v_2, v_4\}$ 不是一个可行集。从条件 (C5)-(C8) 可知， $N(v_1) \setminus N[v_2] = \emptyset$ 、 $N(v_1) \setminus N[v_4] = \emptyset$ 和 $N(v_2) \setminus N[v_4] = \emptyset$ 中至少有一个成立。

如果 $N(v_1) \setminus N[v_2] = \emptyset$ ，则 $|N[v_1] \cup N[v_2]| \leq d + 2$ 作为 $d(v_1) = d(v_2) = d$ 。注意 $d(v_3) = d + 2$ 和 $N(v_3) \setminus (N[v_1] \cup N[v_2]) = \emptyset$ 根据断言 2.5。这迫使 $N[v_1] \cup N[v_2] = N(v_3)$ 成立，意味着 $v_3 \in N[v_1] \cup N[v_2]$ 。这导致了矛盾，因为 $v_3 \notin N(v_3)$ 。

如果 $N(v_1) \setminus N[v_4] = \emptyset$ ，则我们首先断言

$$v_1 v_2 \notin E(G). \tag{1}$$

假设 $v_1v_2 \in E(G)$ 。由条件 (C2)-(C4) 可知, $v_1v_4 \notin E(G)$ 和 $v_2v_4 \in E(G)$ 因为 $\{v_1, v_2, v_4\}$ 不可行。这进一步意味着通过条件 (C6), $N(v_1) \setminus N[v_2] = \emptyset$ 。由此可知, $N(v_3) \subseteq N[v_2]$ 根据断言 2.5。这导致了矛盾, 因为 $d(v_3) = d(v_2) + 2$ 。因此, 我们知道 (1) 成立。回忆一下, $\{v_1, v_2, v_3\}$ 是一个可平衡集合。这与 (1) 一起表明 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 实际上是一个独立集, 即对于每个 $i \in [2]$ 都有 $v_i \notin N(v_3)$ 。注意到由断言 2.5 和 $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) - 2$ 可知 $N(v_3) \setminus (N[v_1] \cup N[v_2]) = \emptyset$ 。因此, 对于每个 $i \in [2]$

$$|N(v_3) \setminus N[v_i]| = |N(v_3) \setminus N(v_i)| \geq 2 \text{ and } N(v_3) \setminus N(v_i) \subseteq N(v_{3-i}) \setminus N(v_i). \quad (2)$$

如果 $v_2v_4 \in E(G)$, 则从 (2) 可得 $N(v_3) \setminus N(v_2) \subseteq N(v_1) \setminus N(v_2) \subseteq N(v_4)$ 作为 $N(v_1) \setminus N[v_4] = \emptyset$ 和 $v_4 \in N(v_2)$ 。如果 $v_2v_4 \notin E(G)$, 则根据条件 (C5) 可知 $N(v_2) \setminus N[v_4] = \emptyset$, 因为 $\{v_1, v_2, v_4\}$ 不可行。这与 (2) 结合进一步暗示了 $N(v_3) \setminus N(v_1) \subseteq N(v_2) \setminus N(v_1) \subseteq N(v_4)$, 因为 $v_4 \notin N(v_2)$ 。因此, 我们得出结论存在某个 $j \in [2]$ 使得

$$N(v_3) \setminus N(v_j) \subseteq N(v_4).$$

回忆一下每个 $i \in [2]$ 都有 $|N(v_3) \setminus N(v_i)| \geq 2$ 由 (2) 给出。因此, 我们总是可以删除 $N(v_3) \setminus N(v_j)$ 中的两个顶点, 使得 v_j, v_3 和 v_4 的度从 $(d, d+2, d+2)$ 到 (d, d, d) 对于某些 $j \in [2]$ 是相等的, 如所需。

如果 $N(v_2) \setminus N[v_4] = \emptyset$, 则一个类似于在 $N(v_1) \setminus N[v_4] = \emptyset$ 情况下使用的论证可推出所期望的结果。因此, 我们完成了对断言 2.6 的证明。□

由断言 2.6 可知, $\{v_1, v_2, v_4\}$ 是一个可行集。类似于在断言 2.5 中使用的论证表明了

$$N(v_4) \setminus (N[v_1] \cup N[v_2]) = \emptyset, \quad (3)$$

其中唯一不同的是, 在逐个检查条件 (C1)-(C8) 后, 如果我们删除 $N(v_4) \setminus (N[v_1] \cup N[v_2])$ 中的一些顶点, 则 $\{v_1, v_2, v_4\}$ 在所得图中仍然可行。这与声明 2.5 一起表明了 $(N(v_3) \cup N(v_4)) \subseteq (N[v_1] \cup N[v_2])$ 。回想一下 $U = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 。设

$$W := ((N(v_1) \setminus N(v_2)) \cup (N(v_2) \setminus N(v_1))) \setminus U.$$

在以下内容中, 我们证明了

$$e(\{v_3, v_4\}, W) - |W| \geq 4, \quad (4)$$

这意味着存在两个顶点 u_1 和 u_2 在 $N(v_j) \setminus (N(v_{3-j}) \cup U)$ 中对于某些 $j \in [2]$ 使得 $u_1v_3 \in E(G)$ 和 $u_2v_4 \in E(G)$ 对于每个 $i \in [2]$ 。由此可知, 我们总是可以通过删除某些 $j \in [2]$ 的 u_1 和 u_2 将 v_{3-j}, v_3 和 v_4 的次数从 $(d, d+2, d+2)$ 等同到 (d, d, d) , 如所需。现在, 我们证明 (4)。对于两个顶点 $u, v \in V(G)$, 令 $1_{uv} = 1$ 如果 $uv \in E(G)$ 和 $1_{uv} = 0$ 如果 $uv \notin E(G)$ 。注意

$$|W| = d(v_1) + d(v_2) - 2|N(v_1) \cap N(v_2) \setminus U| - 2 \cdot 1_{v_1v_2} - e(\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\})$$

和

$$e(\{v_3, v_4\}, W) \geq d(v_3) + d(v_4) - 2 \cdot 1_{v_3v_4} - e(\{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}) - 2|(N(v_1) \cap N(v_2)) \setminus U|.$$

因此, 我们有

$$e(\{v_3, v_4\}, W) - |W| \geq d(v_3) + d(v_4) - d(v_1) - d(v_2) + 2(1_{v_1v_2} - 1_{v_3v_4}) = 4 + 2(1_{v_1v_2} - 1_{v_3v_4}).$$

这表明 (4) 除非 $v_1v_2 \notin E(G)$ 和 $v_3v_4 \in E(G)$ 。然而, $v_1v_2 \notin E(G)$ 表示 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 是一个独立集, 因为 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 是一个可平衡集, 即 $v_3 \notin (N[v_1] \cup N[v_2])$ 。请注意 $N(v_4) \subseteq (N[v_1] \cup N[v_2])$ 由 (3) 给出。这导致了矛盾, 即 $v_3 \in N(v_4)$ 。因此, 不等式 (4) 总是成立。这最终完成了引理 2.4 的证明。□

3 定理的证明 1.2

在本节中, 我们证明定理 1.2。

定理的证明 1.2. 对于整数 $n \geq 5$, 设 G 是一个具有 $\text{rep}(G) = 2$ 个顶点的 n -顶点图。首先, 我们可以假设 G 不包含孤立顶点。否则, 很容易检查定理 1.2 对于任何具有 $n \leq 6$ 的 G 都成立。足以证明定理 1.2 对于 $n \geq 7$ 成立。因此, 我们可以通过删除孤立顶点来获取 G 的子图 G' 作为我们的新图。显然, G' 至少有 5 个顶点, 重复次数恰好为二且度数为正。

假设必须从 G 中删除超过 3 个顶点才能得到一个至少有三个顶点具有相同度数的导出子图。设

$$S = \{d \in [n-1] : \text{there exist exactly two vertices in } G \text{ with degree } d\}$$

和

$$T = \{d \in [n-1] : \text{there exists no vertex in } G \text{ with degree } d\}.$$

现在, 我们将通过证明以下一系列断言来继续我们的证明。对于某些 $x \notin [n-1]$, 我们使用 $x \in T$ (或 $x \in S$) 表示存在 $y \in T$ (或 $y \in S$), 使得 $x \equiv y$ (模 $n-1$)。

声明 3.1. 如果 $d \in S$, 则要么 $d-1 \in T$ 要么 $d+1 \in T$ 。

Proof. 我们首先证明这一点对于 $2 \leq d \leq n-2$ 。假设在 G 中存在 4 个顶点 v_1, v_2, v_3, v_4 , 其度数分别为 $d-1, d, d, d+1$ 。如果 $X := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 包含一个可平衡集合 S_0 , 则我们可以根据引理 2.1 删除最多 3 个顶点以使 S_0 中的顶点度数相等, 这产生了一个矛盾。否则, $G[X]$ 是一条由引理 2.2 确定的诱导路径, 并且其端点为 v_1, v_2 。显然, 这条路径有两个可能的度序列 $(d(v_1), d(v_3), d(v_4), d(v_2)) = (d-1, d, d+1, d)$ 和 $(d(v_1), d(v_4), d(v_3), d(v_2)) = (d-1, d+1, d, d)$ 。对于第一种情况, 删除 v_4 将 v_1, v_2, v_3 的度数从 $(d-1, d, d)$ 减少到 $(d-1, d-1, d-1)$, 这与

假设矛盾；对于第二种情况，删除 v_1 将 v_2, v_3, v_4 的度数从 $(d, d, d+1)$ 减少到 (d, d, d) ，这也与假设矛盾。

如果 $d = 1 \in S$ ，则我们证明若 $2 \notin T$ 则 $n-1 \in T$ 。假设 $n-1 \notin T$ 。这意味着存在两个顶点 $u, v \in V(G)$ 与 $d(u) = n-1$ 和 $d(v) = 2$ 。令 $w \in N(v) \setminus \{u\}$ 和 $d(v_i) = 1$ 对每个 $i \in [2]$ 成立。显然，通过删除 w ，在所得图中 v, v_1, v_2 具有相同的度数 1，这是一个矛盾。如果 $d = n-1 \in S$ ，那么 G 中的每个顶点度数至少为 2，即 $d+1 \in T$ 。□

声明 3.2. 如果 $\{d, d+1\} \subseteq S$ ，则 $\{d-1, d+2\} \subseteq T$ 。

Proof. 注意 $d \in S$ 和 $d+1 \notin T$ 。这表明通过断言 3.1 得到 $d-1 \in T$ 。类似地，我们有 $d+2 \in T$ 作为 $d+1 \in S$ 和 $d \notin T$ 。□

声明 3.3. 如果 $\{d, d+2\} \subseteq S$ ，则 $\{d-1, d+1, d+3\} \subseteq T$ 。

Proof. 我们首先证明这个对于 $2 \leq d \leq n-4$ 成立。令 $U = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq V(G)$ ，其中包含 $d(v_1) = d(v_2) = d$ 和 $d(v_3) = d(v_4) = d+2$ 。如果存在一个顶点 $u \in V(G)$ 具有 $d(u) = d+1$ ，则 $U \cup \{u\}$ 必须包含一个可行集 S_0 ，使得 $u \in S_0$ 根据引理 2.3。由引理 2.1 可知，我们总是可以通过删除最多 3 个顶点来使 S_0 中的顶点度数相等，这是一个矛盾。由引理 2.4， U 不包含可平衡集，这意味着 $G[U]$ 是一个以 v_1, v_2 为端点的诱导路径。因此， $v_1v_2 \notin E(G)$ 和 $v_3v_4 \in E(G)$ 。如果存在 $v_0 \in V(G)$ 满足 $d(v_0) = d-1$ ，则 $\{v_0, v_1, v_2\}$ 是可行的作为 $v_1v_2 \notin E(G)$ 和 $d(v_1) = d(v_2)$ ；如果存在 $v_5 \in V(G)$ 满足 $d(v_5) = d+3$ ，则 $\{v_3, v_4, v_5\}$ 也是可行的作为 $v_3v_4 \in E(G)$ 和 $d(v_3) = d(v_4)$ 。在这两种情况下，根据引理 2.1，我们最多删除 2 个顶点就能使它们的度数相等，这是一个矛盾。

如果 $d = 1 \in S$ ，则只需验证 $n-1 \in T$ 即可，因为其他情况仍可通过上述证明成立。然而，我们也可以设置 $v_5 \in V(G)$ ，使得 $d(v_5) = n-1$ 在情况 $n-1 \in T$ 成立，并且期望的结果以类似的方式得出。

如果 $d = n-3 \in S$ ，那么我们只需要验证 $1 \in T$ 。这是显然成立的，因为 G 中的每个顶点由于 $n-1 \in S$ 至少有度数为 2。

如果 $d = n-2 \in S$ ，则我们有 $1 \in S$ 并且我们应该证明 $\{n-3, n-1, 2\} \subseteq T$ 。设 $U = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq V(G)$ ，其中 $d(v_1) = d(v_2) = 1$ 和 $d(v_3) = d(v_4) = n-2$ 。显然， $G[U]$ 是一条以 v_1, v_2 为端点的诱导路径，而 $(\{v_3, v_4\}, V(G) \setminus U)$ 是一个完全二分子图。如果存在一个顶点 $v_0 \in V(G)$ 具有 $d(v_0) = 2$ ，则在删除 v_3 和 v_4 后， v_0, v_1, v_2 在所得图中具有相同的度数 0，这是矛盾的。如果存在一个顶点 $v_5 \in V(G)$ 具有 $d(v_5) = n-3$ 或 $d(v_5) = n-1$ ，则根据引理 2.1，我们总可以通过删除最多 3 个顶点来使 v_3, v_4, v_5 的度数相等，因为它们形成一个三角形，这导致矛盾。

如果 $d = n-1 \in S$ ，则我们有 $2 \in S$ 并且我们应该证明 $\{n-2, 1, 3\} \subseteq T$ 。显然， $1 \in T$ 。令 $U = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq V(G)$ ，其中 $d(v_1) = d(v_2) = 2$ 和 $d(v_3) = d(v_4) = n-1$ 。很容易看出 $v_3v_4 \in E(G)$ 和 $(\{v_3, v_4\}, V(G) \setminus \{v_3, v_4\})$ 是一个完全二分子图。如果存在一个顶点 $v_0 \in V(G)$ 满

足 $d(v_0) = 3$ ，则在删除某些顶点 $w \in N(v_0) \setminus \{v_3, v_4\}$ 后， v_0, v_1, v_2 在所得图中具有相同的度数 2，这是一个矛盾。如果存在一个顶点 $v_5 \in V(G)$ 满足 $d(v_5) = n - 2$ ，则根据引理 2.1，我们总可以通过删除最多 3 个顶点使 v_3, v_4, v_5 的度数相等，因为它们形成一个三角形，这导致矛盾。□

令 $S_1 = \dot{\cup}_{i=1}^{\ell} S_{1i}$ ，其中每个 S_{1i} 都是形式为 $\{d, d+2, \dots, d+2j\} \subseteq S$ 的极大集，对于某些 $d \in S$ 和 $j \geq 1$ 。在此条件下，我们可以进一步假设 ℓ 是极大的。令 $T_{1i} = \{d-1, d+1, \dots, d+2j+1\}$ 对每个 S_{1i} 成立。显然， $T_{1i} \cap T_{1j} = \emptyset$ 对 $i \neq j \in [\ell]$ 成立，因为 S_{1i} 的极大性，并且 $T_1 = \dot{\cup}_{i=1}^{\ell} T_{1i} \subseteq T$ 由引理 3.3 得出。因此，我们得出结论 $|T_1| \geq |S_1|$ 。设 $S_2 = S \setminus S_1$ 和 $T_2 = T \setminus T_1$ 。由每个 S_{1i} 的极大性，我们有 $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ 。此外，对于任意两对 $\{d_1, d_1+1\} \subseteq S_2$ 和 $\{d_2, d_2+1\} \subseteq S_2$ ，我们有 $\{d_1-1, d_1+2\} \cap \{d_2-1, d_2+2\} = \emptyset$ 由 ℓ 的最大性得出。因此，我们有 $|T_2| \geq |S_2|$ 由断言 3.1 和 3.2 得出。这最终意味着 $|T| \geq |S|$ 。还要注意，

$$n - 1 = |S| + (n - 2|S|) + |T|,$$

即， $|T| = |S| - 1$ 。这导致了矛盾，从而完成了定理 1.2 的证明。□

4 结论与展望

在本文中，我们给出了通用图上 $C(3)$ 的确切值。确定任意整数 $k \geq 4$ 上的 $C(k)$ 仍然是一个开放问题，并且当尝试将我们的论点适应于甚至 $C(4)$ 时，情况分析变得显著复杂。还有一个由 Caro 和 Yuster 最初研究的关于等同最大度数的类似问题 [9]。对于任意整数 $k \geq 2$ ，令 $f_k(G)$ 表示我们需要从 G 中删除的最小顶点数量，使得剩余的导出子图的最大度由至少 k 个顶点共享。用 $f_k(n)$ 表示当 G 遍历所有具有 n 个顶点的图时 $f_k(G)$ 的最大值。Caro 和 Yuster 在 [9] 中提出了以下猜想。

猜想 4.1 (Caro 和 Yuster [9]). 对于任何固定的整数 $k \geq 2$, $f_k(n) = \Theta(\sqrt{n})$ 。

作者解决了 $k = 2, 3$ 的猜想，而 $k \geq 4$ 的情况仍广泛未解决。特别地，我们提到精确值 $f_2(n)$ 由 Caro、Lauri 和 Zarb [5] 解决了。然而，关于精确值 $f_k(n)$ 的问题对于任何 $k \geq 3$ 来说仍广泛开放，并且仍然是活跃的研究领域。我们参考读者查阅 [6, 10, 13, 14] 以获取该领域的更多问题和结果。

References

- [1] P. Balister, B. Bollobás, J. Lehel and M. Morayne, Repeated degrees in random uniform hypergraphs, SIAM J. Discrete Math. 27 (2013) 145–154.

- [2] B. Bollobás, Degree multiplicities and independent sets in K_4 -free graphs, *Discrete Math.* 158 (1996) 27–35.
- [3] B. Bollobás and A.D. Scott, Independent sets and repeated degrees, *Discrete Math.* 170 (1997) 41–49.
- [4] Y. Caro, A. Hansberg and R. Pepper, Regular independent sets, *Discrete Appl. Math.* 203 (2016) 35–46.
- [5] Y. Caro, J. Lauri and C. Zarb, Equating two maximum degrees, *Australas. J. Combin.* 72 (2018) 206–225.
- [6] Y. Caro, J. Lauri and C. Zarb, Notes on spreads of degrees in graphs, *Bull. Inst. Combin. Appl.* 85 (2019) 79–91.
- [7] Y. Caro, A. Shapira and R. Yuster, Forcing k -repetitions in degree sequence, *Electron. J. Combin.* 21 (2014) P1.24.
- [8] Y. Caro and D.B. West, Repetition number of graphs, *Electron. J. Combin.* 16 (2009) R7.
- [9] Y. Caro and R. Yuster, Large induced subgraphs with equated maximum degree, *Discrete Math.* 310 (2010) 742–747.
- [10] Y. Caro and R. Yuster, Induced subgraphs with many repeated degrees, *Discrete Math.* 343 (2020) 111828.
- [11] G. Chen, J. Hutchinson, W. Piotrowski, W. Shreve, and B. Wei, Degree sequences with repeated values, *Ars Combin.* 59 (2001) 33–44.
- [12] P. Erdős, R. Faudree, T.J. Reid, R. Schelp and W. Staton, Degree sequence and independence in K_4 -free graphs, *Discrete Math.* 141 (1995) 285–290.
- [13] M. Fürst, M. Gentner, S. Jäger, D. Rautenbach and M.A. Henning, Equating k maximum degrees in graphs without short cycles, *Discuss. Math. Graph Theory* 40 (2020) 841–853.
- [14] A. Girao and K. Popielarz, Large induced subgraphs with k vertices of almost maximum degree, *SIAM J. Discrete Math.* 32 (2018) 450–454.
- [15] S. Kogan, A note on forcing 3-repetitions in degree sequences, *Discuss. Math. Graph Theory* 43 (2023) 457–462.

- [16] G. Sun, J. Hou and Q. Zeng, Large induced subgraphs with three repeated degrees, Discrete Math. 346 (2023) 113344.