使用电压不平衡灵敏度进行多相电力分配网络的线性相位平衡方案

Rahul K. Gupta

arxiv:2505.00519v1 中译本

***Abstract*— 电力分配网络，尤其是在北美地区，由于单相、两相和三相网络的混合以及配电水平上单相设备（如电动汽车充电器和单相太阳能电站）的高度渗透而经常出现不平衡。然而，网络运营商必须遵守由 IEEE、IEC 和 NEMA 标准规定的电压不平衡限度，以确保设备的安全和网络操作的效率。现有的工作提出了在网络中使用有功功率和无功功率控制来最小化不平衡的方法。然而，由于不平衡度量和功率流方程的固有非线性，这些优化问题高度非线性和非凸。在本研究中，我们提出了一种利用一阶泰勒近似对不平衡度量（如电压不平衡因子（VUF）、相电压不平衡率（PVUR）和线电压不平衡率（LVUR））进行线性化的方法。这种线性化应用于相平衡控制方案；它被设计为一种反馈方法，其中在激活有功/无功功率设定点后，线性化逐步更新，并显示出对电压不平衡的改进。我们在标准 IEEE 基准测试案例上展示了所提方案的应用，证明了其有效性。**

***Index Terms*— 相位平衡，电压不平衡，电力分配网络，线性化。**

I. 介绍

电力分配系统正面临着由于单相太阳能电站和住宅电动汽车充电器的快速增长而导致的不平衡功率注入不断增加的问题。这种变化加上北美电网固有的不平衡性（由于单相和两相馈线的混合）导致电压不平衡水平升高。配电系统的不平衡水平增加可能会触发保护设备，增加网络损耗，损坏电力设备（例如，配电变压器）。一个电力不平衡程度高的网络会导致利用率低下，因为其中一个相位相对于其他相位过载，这可能需要系统升级 [1]。因此，系统运营商必须满足由 IEEE [2]、IEC [3] 和 NEMA [4] 定义的关于不平衡的标准，以确保电力分配网络的安全可靠运行。

在现有文献中，提出了几种解决电压不平衡问题的方法，它们可以大致分为三类。第一种方法涉及投资新设备，如静态或动态无功补偿器、并联电容器、分接开关、电压调节器等。[5]，这可能会很昂贵，并且需要时间来规划和安装这些设备。第二种方法是相位切换或交换策略 [6]–[8]，它涉及重新分配母线上的某些负载到不同的相位以平衡负荷并减少电压不平衡。还有一些混合方法，结合了相位切换与静态无功补偿器的使用 [9]。公用事业公司通常手动实施这些方法，维修人员前往现场并物理地切换负载。这个过程成本高昂，需要大量的规划，并且每次相位交换可能花费数万美元 [10]。这些平衡操作通常是定期执行的，因为负荷特性会随季节变化而不同 [11]–[15]。第三种方法使用现有或新安装的太阳能逆变器和其他分布式能源资源（DER）中的有功和无功功率控制。许多研究表明调节来自太阳能光伏逆变器的有功和无功功率 [15], [16] 。该策略可能需要投资于通信和态势感知基础设施以实现实时控制 [17] 。大多数这些方法通常是非凸的，由于不平衡指标以及电力流方程的非线性和非凸性质。除了有一些工作提出了连续线性化，如在 [18] 中所述的那样，通过线性化潮流凸优化，例如 [19], [20] 等。

在这项工作中，我们提出通过计算电压不平衡因子对控制变量的敏感度来线性化电压不平衡指标，从而可以使用一阶泰勒近似得到一个线性的相位平衡公式。这些系数是针对不同的不平衡指标推导出来的，如电压不平衡因子（VUF）、相电压不平衡率（PVUR）和线电压不平衡率（LVUR）。这项工作展示了在线性化上的准确性在 IEEE 基准网络上，然后还展示了如何将其用于制定一个线性的相位平衡问题。总之，所展示工作的关键贡献是（i）对控制变量如有功和无功功率的不同电压不平衡因子的敏感度进行解析推导，（ii）为每相的有功和无功功率控制制定一个最小化电压不平衡指标的线性化的相位平衡方案。

论文组织如下。第 II 节介绍关键符号和电压幅值灵敏度。第 III 节利用电压幅值灵敏度推导不同电压不平衡指标的灵敏度系数。第 IV 节展示所提灵敏度系数的应用。第 V 节进行数值验证，最后，第 VI 节

Rahul K. Gupta is with the School of Electrical Engg. & Computer Science, Washington State University, Pullman, WA 99163, USA rahul.k.gupta@wsu.edu

总结工作。

II. 预备知识

A. 符号表示法

我们考虑一个具有网络指标 $i \in \mathcal{N}$ 的分布网络，其中节点指标包含在集合 $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ 中。我们考虑一个三相系统，相位由 a, b 和 c 表示。符号 v_{ia}, v_{ib} 和 v_{ic} 表示相位 $\phi \in \Phi = \{a, b, c\}$ 的复电压，而符号 v_{iab}、v_{ibc} 和 v_{ica} 指的是线电压。符号 p_{ia}, p_{ib} 和 p_{ic} 和 q_{ia}, q_{ib} 和 q_{ic} 分别表示有功和无功功率。符号 $|y|$ 和 y^* 分别表示 y 的幅值和复共轭。

B. 电压灵敏度

在以下部分，我们回顾了电压幅值相对于控制变量的灵敏度，即 [1] 的有功和无功功率。设复电压相对于控制变量 x 的灵敏度系数为 $\boldsymbol{K}_x^v$，它是

$$\boldsymbol{K}_x^v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{1a}}{\partial x_{1a}} & \frac{\partial v_{1a}}{\partial x_{1b}} & \frac{\partial v_{1a}}{\partial x_{1c}} \cdots \frac{\partial v_{1a}}{\partial x_{Na}} & \frac{\partial v_{1a}}{\partial x_{Nb}} & \frac{\partial v_{1a}}{\partial x_{Nc}} \\ \frac{\partial v_{1b}}{\partial x_{1a}} & \frac{\partial v_{1b}}{\partial x_{1b}} & \frac{\partial v_{1b}}{\partial x_{1c}} \cdots \frac{\partial v_{1b}}{\partial x_{Na}} & \frac{\partial v_{1b}}{\partial x_{Nb}} & \frac{\partial v_{1b}}{\partial x_{Nc}} \\ \frac{\partial v_{1c}}{\partial x_{1a}} & \frac{\partial v_{1c}}{\partial x_{1b}} & \frac{\partial v_{1c}}{\partial x_{1c}} \cdots \frac{\partial v_{1c}}{\partial x_{Na}} & \frac{\partial v_{1c}}{\partial x_{Nb}} & \frac{\partial v_{1c}}{\partial x_{Nc}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial v_{Na}}{\partial x_{Na}} & \frac{\partial v_{Na}}{\partial x_{1b}} & \frac{\partial v_{Na}}{\partial x_{1c}} \cdots \frac{\partial v_{Na}}{\partial x_{Na}} & \frac{\partial v_{Na}}{\partial x_{Nb}} & \frac{\partial v_{Na}}{\partial x_{Nc}} \\ \frac{\partial v_{Nb}}{\partial x_{1a}} & \frac{\partial v_{Nb}}{\partial x_{1b}} & \frac{\partial v_{Nb}}{\partial x_{1c}} \cdots \frac{\partial v_{Nb}}{\partial x_{Na}} & \frac{\partial v_{Nb}}{\partial x_{Nb}} & \frac{\partial v_{Nb}}{\partial x_{Nc}} \\ \frac{\partial v_{Nc}}{\partial x_{1a}} & \frac{\partial v_{Nc}}{\partial x_{1b}} & \frac{\partial v_{Nc}}{\partial x_{1c}} \cdots \frac{\partial v_{Nc}}{\partial x_{Na}} & \frac{\partial v_{Nc}}{\partial x_{Nb}} & \frac{\partial v_{Nc}}{\partial x_{Nc}} \end{bmatrix} \tag{1}$$

这里 x 可以是有功功率、无功功率或其他可控制变量，如分接头变换器。相同的系数也可以定义为电压幅值和角度。幅度的敏感性可以找到作为

$$\frac{\partial |v_{i\phi}|}{\partial x_{j\phi}} = \frac{1}{|v_{i\phi}|} \Re\Big(v_{i\phi}^* \frac{\partial v_{i\phi}}{\partial x_{j\phi}} \Big). \tag{2}$$

这些灵敏度系数可以通过使用牛顿-拉夫森方法逆向雅可比矩阵的潮流解来计算，或者通过基于导纳矩阵的方法求解线性方程组 [21]–[23]，或者如 [24] 所述的基于阻抗矩阵的方法。

在下面，我们将使用电压的灵敏度来推导不同电压不平衡指标的灵敏度。

[1] 同样的可以扩展到其他可控变量，如变压器抽头。

III. 电压不平衡指标及其灵敏度

在一个多相电力分配电网中，电压不平衡通常指的是三相电压不对称的情况，这意味着电压幅值不等或电压相角不是 120° 分开，或者两者兼而有之。这可能是由于网络中存在的固有不平衡情况引起的，例如存在单相和两相电路、未转置的电路，或者是存在单相注入（负载或发电）。不平衡的程度由国际机构定义的几个指标量化，如 IEEE [2]、IEC [3] 和 NEMA [4]。这些标准还规定了这些指标在安全运行电力分配系统方面的限制。实践中，电力分销系统的运营商尽最大努力使系统保持“平衡”，符合这些标准定义的限制。

在以下部分，我们介绍了不同的电压不平衡度量，并展示了它们相对于一个通用控制变量的敏感性如何被解析表达。

A. 电压不平衡因子（*VUF*）及其灵敏度

1) 定义: VUF 按照 IEC 标准 61000-2-2 定义 [3]，并基于序列域中的电压，这在电力系统不平衡分析中广泛使用。具体来说，它表示为负序电压和正序电压的幅值之比 [25]。设节点 i 的 VUF_i 表示为 Ξ_i^{VUF}。它表示为

$$\Xi_i^{\mathrm{VUF}} = \frac{|v_{i-}|}{|v_{i+}|} \tag{3}$$

其中，

$$\begin{bmatrix} v_{i0} \\ v_{i+} \\ v_{i-} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ia} \\ v_{ib} \\ v_{ic} \end{bmatrix} \tag{4}$$

这里，$\alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ 和符号 v_{i0}, v_{i+} 和 v_{i-} 分别表示第 $i-$ 个节点的零序、正序和负序电压。IEC 标准在 [3] 中规定，电力分配系统的 VUF 值应保持在每单位 0.02（或 2%）以内。

2) VUF 敏感性 (VUFS): 为了计算节点 i 的 VUF 对通用变量 x 在节点 j 和相位 ϕ 处的灵敏度，我们需要对 (3) 关于 $x_{j\phi}$ 进行微分。因此，VUFS 可以定义为

$$\mathrm{VUFS}_{ij\phi} = \frac{\partial(\Xi_i^{\mathrm{VUF}})}{\partial(x_{j\phi})} = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{|v_{i+}|^2} \left(|v_{i+}| \frac{\partial(|v_{i-}|)}{\partial(x_{j\phi})} - |v_{i-}| \frac{\partial(|v_{i+}|)}{\partial(x_{j\phi})} \right) \tag{6}$$

序列分量的灵敏度 $\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_{j\phi}}, \frac{\partial v_{i+}}{\partial x_{j\phi}}, \frac{\partial v_{i-}}{\partial x_{j\phi}}$ 可以通过对方程 4 求导来计算。其中相电压的灵敏度 $\frac{\partial v_{ia}}{\partial x_{j\phi}}, \frac{\partial v_{ib}}{\partial x_{j\phi}}, \frac{\partial v_{ib}}{\partial x_{j\phi}}$ 是在第 II-B 节中定义的。

B. 相电压不平衡率（*PVUR*）

1) 定义: PVUR 由 IEEE [2] 定义，并且它使用相电压对地电压来表示不平衡度量，而不是像 VUF 那样使用序电压。它被定义为（i）相电压幅值的最大偏差与它们的平均值之比和（ii）平均相电压幅值的比例。它是 $\Xi_i^{\mathrm{PVUR}} =$

$$\frac{\mathtt{max}(\big||v_{ia}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big|, \big||v_{ib}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big|, \big||v_{ic}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big|)}{v_{p_i}^{\mathrm{avg}}} \tag{7}$$

其中，$v_{p_i}^{\mathrm{avg}} = \frac{1}{3}(|v_{ia}| + |v_{ib}| + |v_{ic}|)$.

根据 IEEE 标准 141-1993 [2]，PVUR 应低于每单位 0.02 或 2%。

PVUR 表达式可以简化为三种情况，即，PVUR =

$$\begin{cases} \dfrac{\big|2|v_{ia}| - |v_{ib}| - |v_{ic}|\big|}{|v_{ia}| + |v_{ib}| + |v_{ic}|} \\ \qquad \big||v_{ia}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| > \big||v_{ib}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| \ \&\ \big||v_{ic}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| \\ \dfrac{\big|2|v_{ib}| - |v_{ia}| - |v_{ic}|\big|}{|v_{ia}| + |v_{ib}| + |v_{ic}|} \\ \qquad \big||v_{ib}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| > \big||v_{ia}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| \ \&\ \big||v_{ic}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| \\ \dfrac{\big|2|v_{ic}| - |v_{ia}| - |v_{ic}|\big|}{|v_{ia}| + |v_{ib}| + |v_{ic}|} \\ \qquad \big||v_{ic}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| > \big||v_{ia}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| \ \&\ \big||v_{ib}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big|. \end{cases} \tag{8}$$

2) PVUR 敏感性 (PVURS): 基于在 (8) 中定义的三种情况，可以通过对控制变量求导来计算每种情况下 PVUR 的敏感性。

第一种情况（$\big||v_{ia}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| > \big||v_{ib}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| \ \&\ \big||v_{ic}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big|$）的 PVURS 可以表示为，$\mathrm{PVUR}_{ij\phi} =$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Xi_i^{\mathrm{PVUR}})}{\partial x_{j\phi}} = \frac{1}{\big(\sum_{i\phi}|v_{i\phi}|\big)^2}\Big\{\big(\sum_{i\phi}|v_{i\phi}|\big) \times \mathtt{sgn}(2|v_{ia}| - \\ |v_{ib}| - |v_{ic}|) \times \Big(2\frac{\partial|v_{ia}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ib}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ic}|}{\partial x_{j\phi}}\Big) - \\ \big|2|v_{ia}| - |v_{ib}| - |v_{ic}|\big| \times \Big(\sum_{i\phi}\frac{\partial|v_{i\phi}|}{\partial x_{j\phi}}\Big)\Big\} \end{aligned} \tag{9}$$

其中，sgn 指的是符号函数。

类似地，对于第二个案例（$\big||v_{ib}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| > \big||v_{ia}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| \ \&\ \big||v_{ic}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big|$），$\mathrm{PVUR}_{ij\phi} =$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Xi^{\mathrm{PVUR}})}{\partial x_{j\phi}} = \frac{1}{\big(\sum_{i\phi}|v_{i\phi}|\big)^2}\Big\{\big(\sum_{i\phi}|v_{i\phi}|\big) \times \mathtt{sgn}(2|v_{ib}| - \\ |v_{ia}| - |v_{ic}|) \times \Big(2\frac{\partial|v_{ib}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ia}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ic}|}{\partial x_{j\phi}}\Big) - \\ \big|2|v_{ib}| - |v_{ia}| - |v_{ic}|\big| \times \Big(\sum_{i\phi}\frac{\partial|v_{i\phi}|}{\partial x_{j\phi}}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{10}$$

和第三种情况 $\big||v_{ic}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| > \big||v_{ia}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big| \ \&\ \big||v_{ib}| - v_{p_i}^{\mathrm{avg}}\big|$，其定义为，$\mathrm{PVUR}_{ij\phi} =$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Xi^{\mathrm{PVUR}})}{\partial x_{j\phi}} = \frac{1}{\big(\sum_{i\phi}|v_{i\phi}|\big)^2}\Big\{\big(\sum_{i\phi}|v_{i\phi}|\big) \times \\ \mathtt{sgn}(2|v_{ic}| - |v_{ia}| - |v_{ib}|) \times \Big(2\frac{\partial|v_{ic}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ia}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ib}|}{\partial x_{j\phi}}\Big) - \\ \big|2|v_{ic}| - |v_{ia}| - |v_{ib}|\big| \times \Big(\sum_{i\phi}\frac{\partial|v_{i\phi}|}{\partial x_{j\phi}}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{11}$$

C. 线电压不平衡因子（*LVUR*）

1) 定义: 它由 NEMA [4] 定义，主要由驱动器和电机制造商使用。LVUR 以与 PVUR 类似的方式定义，但使用线电压。LVUR 被定义为

$$\Xi_i^{\mathrm{LVUR}} = \frac{\mathtt{max}(\big||v_{iab}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big|, \big||v_{ibc}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big|, \big||v_{ica}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big|)}{v_{l_i}^{\mathrm{avg}}} \tag{12}$$

其中，$v_{l_i}^{\mathrm{avg}} = \frac{1}{3}(|v_{iab}| + |v_{ibc}| + |v_{ica}|)$。LVUR 可以重写为三种情况：LVUR =

$$\begin{cases} \dfrac{\big|2|v_{iab}| - |v_{ibc}| - |v_{ica}|\big|}{|v_{iab}| + |v_{ibc}| + |v_{ica}|} \\ \qquad \big||v_{iab}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big| > \big||v_{ibc}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big| \ \&\ \big||v_{ica}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big| \\ \dfrac{\big|2|v_{ibc}| - |v_{iab}| - |v_{ica}|\big|}{|v_{iab}| + |v_{ibc}| + |v_{ica}|} \\ \qquad \big||v_{ibc}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big| > \big||v_{iab}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big| \ \&\ \big||v_{ica}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big| \\ \dfrac{\big|2|v_{ica}| - |v_{iab}| - |v_{ibc}|\big|}{|v_{iab}| + |v_{ibc}| + |v_{ica}|} \\ \qquad \big||v_{ica}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big| > \big||v_{iab}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big| \ \&\ \big||v_{ibc}| - v_{l_i}^{\mathrm{avg}}\big|. \end{cases} \tag{13}$$

2) 低电压穿越灵敏度（LVURS）: 可以类似地计算 PVURS。这里的关键区别是我们需要线电压幅值的灵敏度。相位 $\phi, \psi, \psi' \in \Phi$ 的线电压灵敏度作为 $v_{i\psi\psi'}$

（复数）可以计算为 $\frac{\partial v_{i\psi\psi'}}{\partial x_{j\phi}} = \frac{\partial v_{i\psi}}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial v_{i\psi'}}{\partial x_{j\phi}}$ 并且线电压幅值的灵敏度可以计算为

$$\frac{\partial |v_{i\psi\psi'}|}{\partial x_{j\phi}} = \frac{1}{|v_{i\psi\psi'}|}\Re\Big(v^*_{i\psi\psi'}\frac{\partial v_{i\psi\psi'}}{\partial x_{j\phi}}\Big). \tag{14}$$

然后，可以在 (13) 中为第一种情况 ($\big||v_{iab}| - v_{li}^{\text{avg}}\big| > \big||v_{ibc}| - v_{li}^{\text{avg}}\big|$ & $\big||v_{ica} - v_{li}^{\text{avg}}|\big|$) 导出 LVURS，$\text{LVURS}_{ij\phi} =$

$$\frac{\partial(\Xi_i^{\text{LVUR}})}{\partial x_{j\phi}} = \frac{1}{\big(\sum_{\psi\psi',\psi\neq\psi'}|v_{i\psi\psi'}|\big)^2}\Bigg\{\Big(\sum_{\psi\psi',\psi\neq\psi'}|v_{i\psi\psi'}|\Big)\times \mathtt{sgn}(2|v_{iab}| - |v_{ibc}| - |v_{ica}|)\times\Bigg(2\frac{\partial|v_{iab}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ibc}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ica}|}{\partial x_{j\phi}}\Bigg) - \big|2|v_{iab}| - |v_{ibc}| - |v_{ica}|\big|\times\Bigg(\sum_{\psi,\psi',\psi\neq\psi'}\frac{\partial|v_{i\psi\psi'}|}{\partial x_{j\phi}}\Bigg)\Bigg\}. \tag{15}$$

对于第二种情况)$\big||v_{ibc}| - v_{li}^{\text{avg}}\big| > \big||v_{iab}| - v_{li}^{\text{avg}}\big|$ & $\big||v_{ica}| - v_{li}^{\text{avg}}\big|$)，LVURs 可以表示为，$\text{LVURS}_{ij\phi} =$

$$\frac{\partial(\Xi_i^{\text{LVUR}})}{\partial x_{j\phi}} = \frac{1}{\big(\sum_{\psi\psi',\psi\neq\psi'}|v_{i\psi\psi'}|\big)^2}\Bigg\{\Big(\sum_{\psi\psi',\psi\neq\psi'}|v_{i\psi\psi'}|\Big)\times \mathtt{sgn}(2|v_{ibc}| - |v_{iab}| - |v_{ica}|)\times\Bigg(2\frac{\partial|v_{ibc}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{iab}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ica}|}{\partial x_{j\phi}}\Bigg) - \big|2|v_{ibc}| - |v_{iab}| - |v_{ica}|\big|\times\Bigg(\sum_{\psi,\psi',\psi\neq\psi'}\frac{\partial|v_{i\psi\psi'}|}{\partial x_{j\phi}}\Bigg)\Bigg\}. \tag{16}$$

第三种情况 ($\big||v_{ica}| - v_{li}^{\text{avg}}\big| > \big||v_{iab}| - v_{li}^{\text{avg}}\big|$ & $\big||v_{ibc}| - v_{li}^{\text{avg}}\big|$) 的 LVURs 可以表示为，$\text{LVURS}_{ij\phi} =$

$$\frac{\partial(\Xi_i^{\text{LVUR}})}{\partial x_{j\phi}} = \frac{1}{\big(\sum_{\psi\psi',\psi\neq\psi'}|v_{i\psi\psi'}|\big)^2}\Bigg\{\Big(\sum_{\psi\psi',\psi\neq\psi'}|v_{i\psi\psi'}|\Big)\times \mathtt{sgn}(2|v_{ica}| - |v_{ibc}| - |v_{iab}|)\times\Bigg(2\frac{\partial|v_{ica}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{ibc}|}{\partial x_{j\phi}} - \frac{\partial|v_{iab}|}{\partial x_{j\phi}}\Bigg) - \big|2|v_{ica}| - |v_{ibc}| - |v_{iab}|\big|\times\Bigg(\sum_{\psi,\psi',\psi\neq\psi'}\frac{\partial|v_{i\psi\psi'}|}{\partial x_{j\phi}}\Bigg)\Bigg\}. \tag{17}$$

在以下内容中，不平衡指标的灵敏度用于电压平衡。

IV. 线性电压平衡问题

A. 使用灵敏度系数进行线性化

使用上一节定义的灵敏度，通用电压不平衡指标 (Ξ_i^θ) 可以通过一阶泰勒近似表示为每个节点 $i \in \mathcal{N}$ 的线性表达式 $\theta = \{\text{VUF}, \text{PVUR}, \text{LVUR}\}$。假设控制变量，即功率注入变化为 $\boldsymbol{dx}$，则电压不平衡度可以计算为

$$\Xi_i^\theta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}) \approx \Xi_i^\theta(\boldsymbol{x}) + \sum_j\sum_\phi \frac{\partial(\Xi_i^\theta(\boldsymbol{x}))}{\partial x_{j\phi}}(dx_{j\phi}) \tag{18}$$

其中 $dx_{j\phi}$ 表示节点 j 处的有功/无功功率偏差，相位 ϕ 和 $\boldsymbol{x}$ 表示当前运行点。

类似地，可以通过电压灵敏度系数 [26] 对电压幅值进行线性化处理

$$|v_{i\phi}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx})| \approx |v_{i\phi}(\boldsymbol{x})| + \sum_j\sum_\phi \frac{\partial|v_{i\phi}(\boldsymbol{x})|}{\partial x_{j\phi}}(dx_{j\phi}). \tag{19}$$

在以下部分，将使用不平衡指标 (18) 和电压幅值 (19) 的线性化方程来制定相位平衡问题。

B. 相位平衡优化问题

在三相不平衡系统中，相平衡机制通常指的是电压幅值的平衡，即三个相变得几乎平衡，从而使总体不平衡符合 IEEE [2]、IEC [3] 或 NEMA [4] 所定义的限制，如第 III 节中所述。在这种特定情况下，我们演示了使用有功/无功功率控制的相平衡应用。考虑在每个节点 (j) 的每个相位 (ϕ)，可以调整注入量 $dx_{j\phi}$，其受限于相位和节点的基本负载因子 $\beta \in [0, 0.05]$，这意味着有功或无功功率灵活性限制为 5%。

然后，相位平衡问题可以被表述为一个优化问题，目标是最小化电压不平衡度指标并满足电网约束。它可以表示为

$$\mathtt{minimize} \sum_{i\in\mathcal{N}} \Xi_i^\theta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}) \tag{20a}$$

$$\mathtt{subject\ to:}\ 0 \le \Xi_i^\theta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}) \le \overline{\Xi}^\theta \quad \forall i \in \mathcal{N} \tag{20b}$$

$$\underline{v} \le |v_{i\phi}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx})| \le \overline{v} \quad \forall i \in \mathcal{N} \tag{20c}$$

$$-\beta\hat{\boldsymbol{x}} \le \boldsymbol{dx} \le \beta\hat{\boldsymbol{x}} \tag{20d}$$

$$\sum_\phi dx_{j\phi} = 0 \quad \forall j \in \mathcal{N}. \tag{20e}$$

其中 $\overline{\Xi}^\theta$ 是由标准 [2]–[4] 定义的上限不平衡度，在大多数情况下是 0.02 标幺值，正如在第 III 节中所述。符号 $\underline{v}$ 和 $\overline{v}$ 分别是对电压幅值设置的下限和上限，分别为 0.95 和 1.05 标幺值。方程 (20d) 是每相每节点可控制的功率灵活性的限制，其中 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 指的是名义注入。方

程 (20e) 确保新的功率注入之和与原系统中每个节点的净需求匹配，这意味着灵活偏差的净和为零。

可以看出,这个相平衡公式是一个线性规划(LP)，这得益于 (18) 和 (19) 中的线性化表达式。所提出的公式将在下一节中使用一个 IEEE 基准网络进行验证。

V. 数值验证

所提出的相平衡方案在 IEEE 34 节点系统上进行了验证，网络参数和功率注入详细信息见 [27]。

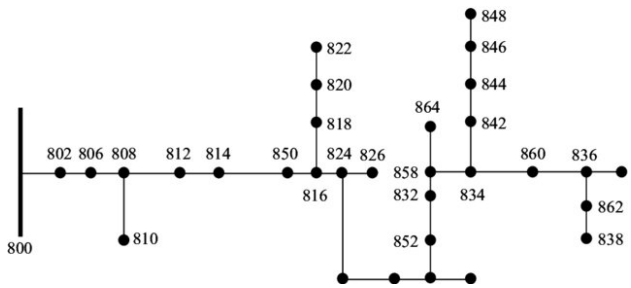


Fig. 1: IEEE 34 节点测试馈线（简化）。

以下，首先，我们展示了在假设名义需求情况下的灵敏度系数结果（第 V-A 节），然后我们改变特定相位和节点的注入以观察其对灵敏度系数的影响（第 V-B 节），最后，我们展示了平衡方案的结果（第 V-C 节）。

A. 每相每节点的灵敏度系数

图 2 显示了 IEEE-34 情况下 VUFS、PVURS 和 LVURS 的热图形式。这些灵敏度是针对每个节点计算的，分别对应不同节点和相位的有功功率和无功功率注入，在图 2（a-l）中。此处 p_a，p_b，q_a 和 q_b 分别表示相位 a 和 b 的有功功率以及相位 a 和 b 的无功功率。可以看出，这些灵敏度在节点和阶段上变化显著，并且对于不同的不平衡指标也有所不同。从图中可以观察到，VUFS 和 PVURS 在一个相当宽的值范围内变化，而 LVURS 则保持在一个较小的范围内，这可能表明无论注入在网络中的位置如何，LVUR 对功率注入的灵敏度是相同的，而 VUF 和 PVUR 则对注入的位置非常敏感。

B. 灵敏度随有功和无功注入的变化

图 3，4 和 5 报告了特定节点和相位的注入变化下 VUF、PVUR 和 LVUR 敏感性的演变。我们展示了节点 802、816、828、848 和 858 相对于节点 862，c 相的有功和无功注入的敏感性。通过将该母线的基本注入乘以因子从-1.5 变化到 1.5，间隔为 0.1 来同时改变有功和无功功率。如图所示，VUF 相对于有功和无功功率的敏感性是平滑的，而 PVUR 和 LVUR 的则不连续。这是因为，在 III-B.2 和 III-C.2 节中得出的 PVUR 和 LVUR 敏感性不平滑。该图还显示，这些敏感性会随着注入的变化而迅速变化，这表明 VUF、PVUR 和 LVUR 的线性化仅在工作点附近有效。

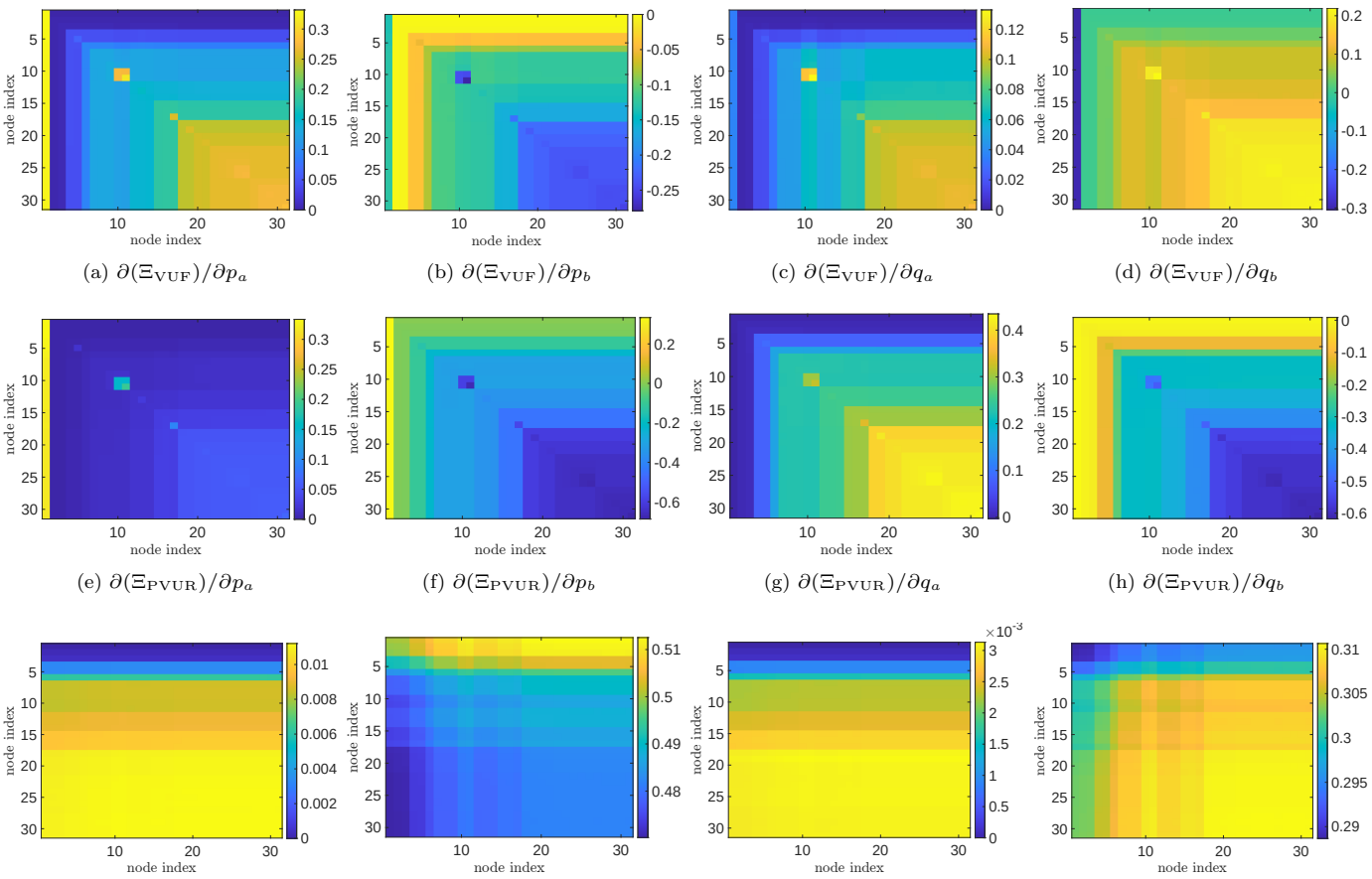
C. 相位平衡应用

本节说明了如何通过重新分配每个节点每相的功率注入，利用基于灵敏度的线性相位平衡公式（见第 IV-B 节)来改进不平衡指标。目标是根据电压约束和不平衡指标的界限最小化特定的不平衡指标（即 VUF、PVUR 或 LVUR）。图 6 显示了相位平衡方案的流程图。如图所示，使用已知的操作点（无论是通过跟随测量还是状态估计过程获得），首先计算电压幅值和不平衡指标的系数，然后在 (20) 中使用的相位平衡方案中应用这些系数，之后实现设定点并观察实际化的电压响应，这作为下一时间步的操作点。

TABLE I: 相平衡结果

指标	No balancing	Balancing $\beta = 0.01$	Balancing $\beta = 0.02$
VUF ($\sum_i \Xi_i^{\mathrm{VUF}}$)	1.1	0.87 (-23.2%)	0.65 (-42.47%)
PVUR ($\sum_i \Xi_i^{\mathrm{PVUR}}$)	1.23	0.93 (-23.7%)	0.87(-29.4%)
LVUR ($\sum_i \Xi_i^{\mathrm{LVUR}}$)	1.12	1.06 (-4.7%)	1.01 (-8.9%)

结果展示了 IEEE-34 网络的情况。我们假设节点内相位的功率可以改变至 β 倍的名义值，而节点的总注入量保持不变。结果显示了两种不同的 $\beta = 0.01$ 和 $\beta = 0.02$，分别指代可灵活调整的注入量为 1%和 2%的情况。结果在图 7(a-c) 中展示了全天的情况。在该图中，蓝色曲线表示基线情况，即没有进行任何优化；红色曲线展示的是通过线性模型 (20) 计算的优化结果，而橙色曲线是通过将功率调节决策输入到交流潮流事后中计算得到的实际实现值。从这些图中可以看出，电压平衡确实有助于改善平衡指标。橙色曲线（实际指标）总是低于基线情况。尽管优化（使用线性化计算的）与实际实现的真实指标之间存在误差——但我们总能获得更好的不平衡指标。这种实际和优化之间的不匹配是由于线性化误差造成的。不平衡指标的改进总结在表 I 中，我们可以观察到所有不平衡指标通过相位平衡都实现了显著改善。从图和表格可以看出，与 VUF 和 LVUR 相比，使用 LVUR 模型对减少不平衡并不是非常有效，这可能是由于 LVUR 灵敏度非常

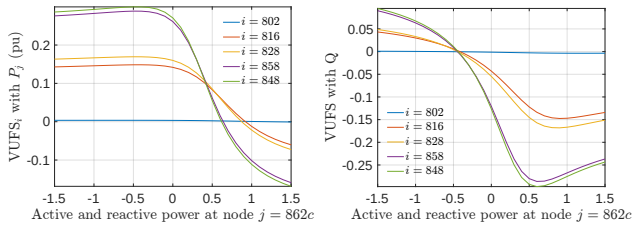


(a) $\partial(\Xi_{\mathrm{VUF}})/\partial p_a$ (b) $\partial(\Xi_{\mathrm{VUF}})/\partial p_b$ (c) $\partial(\Xi_{\mathrm{VUF}})/\partial q_a$ (d) $\partial(\Xi_{\mathrm{VUF}})/\partial q_b$

(e) $\partial(\Xi_{\mathrm{PVUR}})/\partial p_a$ (f) $\partial(\Xi_{\mathrm{PVUR}})/\partial p_b$ (g) $\partial(\Xi_{\mathrm{PVUR}})/\partial q_a$ (h) $\partial(\Xi_{\mathrm{PVUR}})/\partial q_b$

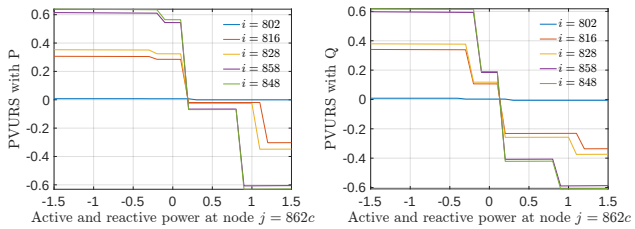
(i) $\partial(\Xi_{\mathrm{LVUR}})/\partial p_a$ (j) $\partial(\Xi_{\mathrm{LVUR}})/\partial p_b$ (k) $\partial(\Xi_{\mathrm{LVUR}})/\partial q_a$ (l) $\partial(\Xi_{\mathrm{LVUR}})/\partial q_b$

Fig. 2: 灵敏度：相对于 a, b 和 c 相的有功和无功功率注入，VUFS、PVURS 和 LVURS。



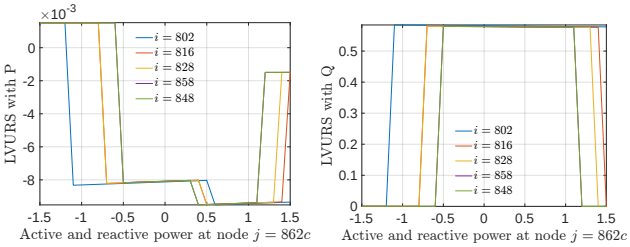
(a) $\partial(\Xi_{\mathrm{VUF}})/\partial p$ (b) $\partial(\Xi_{\mathrm{VUF}})/\partial q$

Fig. 3: VUF 敏感性随 p, q 变化。



(a) $\partial(\Xi_{\mathrm{PVUR}})/\partial p$ (b) $\partial(\Xi_{\mathrm{PVUR}})/\partial q$

Fig. 4: PVUR 敏感性随 p, q 变化。



(a) $\partial(\Xi_{\mathrm{LVUR}})/\partial P$ (b) $\partial(\Xi_{\mathrm{LVUR}})/\partial Q$

Fig. 5: LVUR 敏感性随 p, q 的变化。

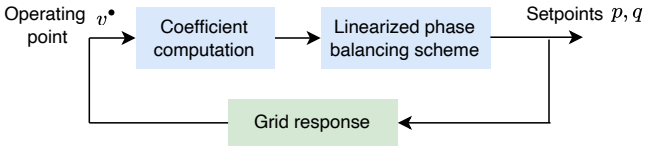
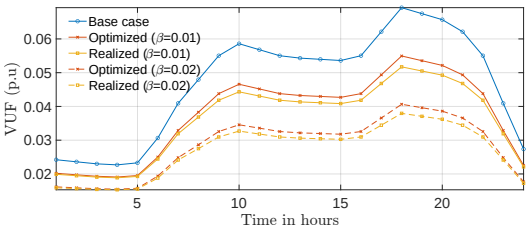
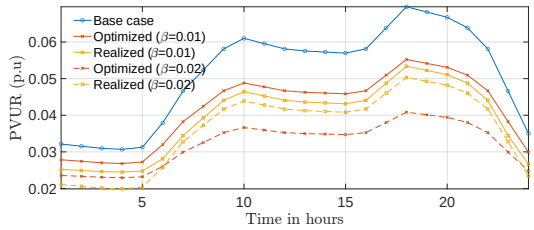


Fig. 6: 控制方案的流程图。

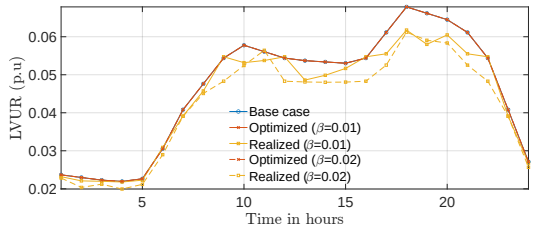
小的原因。



(a) 具有和不具有平衡的 VUF



(b) 具有和不具有平衡的 PVUR。



(c) 带有和不带平衡的 LVUR。

Fig. 7: 电压平衡结果对于 β =0.01 和 0.02。基本情况指不进行相位平衡，优化的是指解决相位平衡问题后的结果在 (20) 中，而实现是在解决交流潮流事后后使用相位平衡问题输出的实际值。

VI. 结论

本工作提出了一种用于配电系统的线性相位平衡方案，以解决电压不平衡指标和功率流方程固有的非线性问题。它介绍了一组与 IEEE、IEC 和 NEMA 的电压不平衡定义相关的新的灵敏度系数，即电压不平衡因子（VUF）、相电压不平衡率（PVUR）和线电压不平衡率（LVUR）。

所提出的方案在一个 IEEE 基准网络上得到了验证，结果表明 VUF 的灵敏度是连续的，而 PVUR 和 LVUR 的灵敏度则是不连续的。还发现 VUF 和 PVUR 值对注入的位置和数值非常敏感，然而 LVUR 在网络中注入位置的变化下没有显著变化。然后在相位平衡应用中说明了所提出的线性化方法，在该应用中，各相之间的注入量在一个节点内发生变化，同时保持每个节点的净注入不变。结果显示，通过仅将每相注入量变动 2%，电压不平衡指标得到了高达 40%的改善。

未来的工作将探索不平衡度量敏感性在其他应用中的使用，如相位交换或相位分配方案，从而导致混合整数问题。

References

[1] K. Ma, L. Fang, and W. Kong, "Review of distribution network phase unbalance: Scale, causes, consequences, solutions, and future research directions," *CSEE Journal of Power and Energy systems*, vol. 6, no. 3, pp. 479–488, 2020.

[2] C. Cooper, "IEEE recommended practice for electric power distribution for industrial plants," *Elec. and Power*, vol. 33, no. 10, p. 658, 1987.

[3] "Environment compatibility levels for low-frequency conducted disturbances and signaling in public low-voltage power supply systems," *IEC Standard IEC*, pp. 61 000–2, 2009.

[4] "Motors and generators," *ANSI/NEMA Standard*, 1993.

[5] Y. Xu, L. M. Tolbert, J. D. Kueck, and D. T. Rizy, "Voltage and current unbalance compensation using a static var compensator," *IET Power Electronics*, vol. 3, no. 6, pp. 977–988, 2010.

[6] J. Zhu *et al.*, "Phase balancing using mixed-integer programming," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 13, no. 4, pp. 1487–1492, 1998.

[7] H. Khodr, I. Zerpa, P. De Oliveira-De Jesus, and M. A. Matos, "Optimal phase balancing in distribution system using mixed-integer linear programming," in *IEEE/PES T& D Conf. and Exp.: Latin America*, 2006.

[8] Y. Zhang and X. Sun, "Phase reassignment strategy and load phase-swapping device for three-phase unbalance in the power distribution area," *Electric Power Systems Research*, vol. 235, p. 110564, 2024.

[9] B. Liu, K. Meng, Z. Y. Dong, P. K. Wong, and T. Ting, "Unbalance mitigation via phase-switching device and static var compensator in low-voltage distribution network," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 35, no. 6, pp. 4856–4869, 2020.

[10] K. Wang, S. Skiena, and T. G. Robertazzi, "Phase balancing algorithms," *Electric Power Systems Research*, vol. 96, pp. 218–224, 2013.

[11] S. Weckx, C. Gonzalez, and J. Driesen, "Reducing grid losses and voltage unbalance with PV inverters," in *IEEE PESGM*, 2014.

[12] S. Weckx and J. Driesen, "Load balancing with EV chargers and PV inverters in unbalanced distribution grids," *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 6, no. 2, pp. 635–643, 2015.

[13] F. Geth, J. Tant, R. Belmans, and J. Driesen, "Balanced and unbalanced inverter strategies in battery storage systems for low-voltage grid support," *IETGTD*, vol. 9, no. 10, pp. 929–936, 2015.

[14] S. Sun, B. Liang, M. Dong, and J. A. Taylor, "Phase balancing using energy storage in power grids under uncertainty," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 31, no. 5, pp. 3891–3903, 2015.

[15] K. Girigoudar *et al.*, "Integration of centralized and distributed methods to mitigate voltage unbalance using solar inverters," *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 14, no. 3, pp. 2034–2046, 2023.

[16] R. K. Gupta and D. K. Molzahn, "Improving fairness in photovoltaic curtailments via daily topology reconfiguration for voltage control in power distribution networks," *arXiv:2403.07853*, 2024.

[17] R. Gupta, F. Sossan, and M. Paolone, "Grid-aware distributed model predictive control of heterogeneous resources in a distribution network: Theory and experimental validation," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 36, no. 2, pp. 1392–1402, 2020.

[18] K. Girigoudar and L. A. Roald, "Linearized three-phase optimal power flow models for distribution grids with voltage unbalance," in *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2021, pp. 4214–4221.

[19] R. K. Gupta and D. K. Molzahn, "Optimizing phase allocation in unbalanced power distribution networks using a linearized distflow formulation," *arXiv preprint arXiv:2501.06917*, 2025.

[20] B. Taheri, R. K. Gupta, and D. K. Molzahn, "Optimized lindistflow for high-fidelity power flow modeling of distribution networks," *arXiv preprint arXiv:2404.05125*, 2024.

[21] K. Christakou *et al.*, "Efficient computation of sensitivity coefficients of node voltages and line currents in unbalanced radial electrical distribution networks," *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 4, no. 2, pp. 741–750, 2013.

[22] S. Maharjan, R. Cheng, and Z. Wang, "Generalized analytical estimation of sensitivity matrices in unbalanced distribution networks," *IEEE Transactions on Power Systems*, 2024.

[23] R. K. Gupta, "Quantifying the uncertainty of sensitivity coefficients computed from uncertain compound admittance matrix and noisy grid measurements," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 73, pp. 1–4, 2023.

[24] Q. Zhou and J. Bialek, "Simplified calculation of voltage and loss sensitivity factors in distribution networks," in *Proc. 16th Power Syst. Comput. Conf.(PSCC2008)*, 2008, pp. 1–6.

[25] P. Pillay and M. Manyage, "Definitions of voltage unbalance," *IEEE Power Engineering Review*, vol. 21, no. 5, pp. 50–51, 2001.

[26] R. Gupta, F. Sossan, and M. Paolone, "Model-less robust voltage control in active distribution networks using sensitivity coefficients estimated from measurements," *Electric Power Systems Research*, vol. 212, p. 108547, 2022.

[27] W. Kersting, "A comprehensive distribution test feeder," in *IEEE PES T&D 2010*. IEEE, 2010, pp. 1–4.