

埃尔德什-哈贾尔问题中关于等度端点路径的补问题

Zhen Liu*, Qinghou Zeng[†]

Center for Discrete Mathematics, Fuzhou University, Fujian, 350003, China

Abstract

回答 Erdős 和 Hajnal 提出的问题, Chen 和 Ma 证明了对于所有 $n \geq 600$ 每个具有 $2n + 1$ 个顶点且至少有 $n^2 + n + 1$ 条边的图都包含两个度数相等且由长度为三的路径连接的顶点, 并且完全二部图 $K_{n,n+1}$ 表明这个边界的限制是精确的。在这篇论文中, 我们获得了对于所有 $n \geq 2$ 的上述结果, 从而彻底解决了 Erdős 和 Hajnal 提出的问题。

1 介绍

在图论中, 有一个基本事实是每个至少有两个顶点的图都有两个度数相等的顶点。自然而然地, 我们想知道在某些条件下这些顶点还需要满足哪些额外的性质。1991 年, Erdős 和 Hajnal 提出了以下相关问题 (参见 Thomas Bloom 的问题集 *ös problems*[1] 中的问题 #816)。

问题 1.1 (埃尔德什 [3]). 每个具有 $(2n + 1)$ 个顶点和 $n^2 + n + 1$ 条边的图是否包含两个由长度为三的路径连接的度数相同的顶点?

如果成立, 边的数量的界限将由完全二分图 $K_{n,n+1}$ 显示为精确。最近, Chen 和 Ma[2] 提供了问题 1.1 解的一个更强版本, 如下。

定理 1.2 (陈和马 [2]). 令 $n \geq 600$. 具有至少 $n^2 + n$ 条边的唯一 $(2n + 1)$ 阶图, 其中不包含由长度为三的路径连接的两个相同度数的顶点, 是完全二分图 $K_{n,n+1}$ 。

在本文中, 我们证明了定理 1.2 对所有 $n \geq 2$ 成立。我们提到我们的方法对于具有大等度的图是不同且有用的。

*Email: 1552580575@qq.com

[†]Research supported by National Key R&D Program of China (Grant No. 2023YFA1010202) and National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12371342). Email: zengqh@fzu.edu.cn (Corresponding author)

定理 1.3. 令 $n \geq 2$. 具有至少 $n^2 + n$ 条边的唯一 $(2n + 1)$ 阶图, 不包含由长度为三的路径连接的两个相同度数的顶点, 是完全二分图 $K_{n,n+1}$ 。

符号表示法 令 G 是一个图, 并且 $\bar{G}$ 是 G 的补图。对于任意的 $v \in V(G)$, 记 $N_G(v)$ 为 v 在 G 中的邻居集合, 并且 $d_G(v)$ 为 v 在 G 中的度。令 Δ_G 为 G 中顶点的最大度数。对于任意的 $S \subseteq V(G)$, 令 $G[S]$ 表示 G 在 S 上的导出子图, 并且对于任意的 $v \in V(G)$ 有 $N_S(v) = N(v) \cap S$ 。对于每个 $S, T \subseteq V(G)$, 令 $e_G(S)$ 表示两端点都在 S 中的边的数量, 而 $e_G(S, T)$ 表示一端在 S 中另一端在 T 中的 G 的边的数量。如果 $S = \{v\}$, 则我们简单地用 $e_G(v, T)$ 表示 $e_G(\{v\}, T)$ 。为了方便, 我们也写 $\bar{e}(S) = \binom{|S|}{2} - e_G(S)$ 和 $\bar{e}(S, T) = |S||T| - e_G(S, T)$ 。当没有混淆的危险时, 我们将省略对 G 的引用。

2 定理的证明 1.3

在整个部分中, 对于任意整数 $n \geq 2$, 设 G 是一个有 $2n + 1$ 个顶点且至少有 $n^2 + n$ 条边的图, 使得 G 中没有两个度相同的顶点通过长度为三的路径相连。我们旨在证明 G 必须是完全二分图 $K_{n,n+1}$ 。

我们遵循 Chen 和 Ma[2] 定义参数 β 。设 β 为最大的整数, 使得 G 包含两个度数为 β 的顶点。假设 u 和 v 是 G 中具有 $d(u) = d(v) = \beta$ 的两个顶点, 并且令 $1_{uv} = 1$ 如果 $uv \in E(G)$ 并且令 $1_{uv} = 0$ 如果 $uv \notin E(G)$ 。设 $B := N(u) \cap N(v)$, $A_u := N(u) \setminus (\{v\} \cup B)$, $A_v := N(v) \setminus (\{u\} \cup B)$ 和 $D := V(G) \setminus (N(u) \cup N(v) \cup \{u, v\})$ 。令 $|B| = x$ 。则, $|A_u| = |A_v| = \beta - x - 1_{uv}$ 和 $|D| = (2n - 1) - |B| - |A_u| - |A_v| = x - 2(\beta - n - 1_{uv}) - 1$ 。以下, 我们的目标是给出 $e(\bar{G})$ 的一个期望下界以与事实 $e(\bar{G}) \leq n^2$ 矛盾。

由于 G 不包含连接 u 和 v 的长度为三的路径, 我们有

$$e(A_u, B) = e(A_v, B) = e(B) = e(A_u, A_v) = 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \bar{e}(V(G) \setminus D) &= \bar{e}(u, A_v) + \bar{e}(v, A_u) + \bar{e}(A_u, A_v) + \bar{e}(B, A_u) + \bar{e}(B, A_v) + \bar{e}(B) + \bar{e}(u, v) \\ &= 2(\beta - x - 1_{uv}) + (\beta - x - 1_{uv})^2 + 2x(\beta - x - 1_{uv}) + \binom{x}{2} + (1 - 1_{uv}) \\ &= (\beta + 1 - 1_{uv})^2 - \frac{1}{2}(x^2 + 5x) - 1_{uv}. \end{aligned}$$

结合事实 $\bar{e}(\{u, v\}, D) = 2|D|$ 可知

$$\begin{aligned} e(\bar{G}) &\geq \bar{e}(V(G) \setminus D) + \bar{e}(\{u, v\}, D) + \bar{e}(B, D) + \bar{e}(D) \\ &= (\beta + 1 - 1_{uv})^2 - \frac{1}{2}(x^2 + 5x) - 1_{uv} + 2(2n + x - 2\beta + 2 \cdot 1_{uv} - 1) + \bar{e}(B, D) + \bar{e}(D) \\ &= (\beta - 1 - 1_{uv})^2 + 4n - \frac{1}{2}(x^2 + x) - 2 - 1_{uv} + \bar{e}(B, D) + \bar{e}(D). \end{aligned} \tag{1}$$

我们首先处理 β 相对较大的情况。为方便起见，设 $c := \beta - n - 1_{uv}$ 。

引理 2.1. 如果 $c \geq 1$ ，则我们有

$$e(\overline{G}) \geq n^2 + c^2 - c - 1_{uv}.$$

Proof. 注意 $|B| - |D| = 2(\beta - n - 1_{uv}) + 1 = 2c + 1$ 。如果 $c \geq 1$ ，那么 $|B| - |D| \geq 3$ 。由此可知存在 $\{u_1, u_2\} \subseteq B$ 使得 $|N_D(u_1)| = |N_D(u_2)|$ ，根据抽屉原理，这意味着 $d(u_1) = d(u_2)$ 。令 γ 为最大的整数，使得在 B 中有两个顶点，它们各有 γ 个邻居在 D 中。不失一般性，我们可以假设 u_1 和 v_1 是这样的两个顶点。由 (2)、 u_1 和 v_1 不相邻。类似地，设 $B_1 := N_D(u_1) \cap N_D(v_1)$ ， $A_{u_1} := N_D(u_1) \setminus B_1$ 和 $A_{v_1} := N_D(v_1) \setminus B_1$ 。写出 $|B_1| = y$ 。然后 $|A_{u_1}| = |A_{v_1}| = \gamma - y$ 。根据假设，不存在一条长度为三的路径连接 u_1 和 v_1 。因此，我们有

$$e(A_{u_1}, B_1) = e(A_{v_1}, B_1) = e(B_1) = e(A_{u_1}, A_{v_1}) = 0.$$

这一点结合事实 $y \leq \gamma$ 意味着

$$\begin{aligned} \bar{e}(D) &\geq \bar{e}(A_{u_1}, B_1) + \bar{e}(A_{v_1}, B_1) + \bar{e}(B_1) + \bar{e}(A_{u_1}, A_{v_1}) \\ &= y(\gamma - y) + y(\gamma - y) + \binom{y}{2} + (\gamma - y)(\gamma - y) \\ &= \gamma^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y \geq \binom{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

根据 γ 的定义，我们可以推断出

$$\begin{aligned} e(B, D) &= \sum_{v \in B} |N_D(v)| \leq \gamma(|B| - (|D| - \gamma)) + \sum_{k=\gamma+1}^{|D|} k \\ &= \gamma|B| + \frac{1}{2}(|D| - \gamma)(|D| - \gamma + 1). \end{aligned}$$

注意 $|B| = x$ 和 $|D| = x - 2c - 1$ 。因此

$$\begin{aligned} \bar{e}(B, D) &= |B||D| - e(B, D) \\ &\geq \frac{1}{2}(|D| - \gamma)(2|B| - |D| + \gamma - 1) \\ &= \binom{x+1}{2} - \binom{\gamma}{2} - 2c^2 - c - (2c+1)\gamma - x \\ &\geq \binom{x+1}{2} - \binom{\gamma}{2} + 2c^2 + 3c + 1 - 2(c+1)x, \end{aligned} \quad (3)$$

其中最后一个不等式成立是由于 $\gamma \leq |D| = x - 2c - 1$ 。结合 (1)，(2) 和 (3)，我们得到

$$\begin{aligned} e(\overline{G}) &\geq \bar{e}(V(G) \setminus D) + \bar{e}(\{u, v\}, D) + \bar{e}(B, D) + \bar{e}(D) \\ &\geq (\beta - 1 - 1_{uv})^2 + 4n - 2 - 1_{uv} + 2c^2 + 3c + 1 - 2(c+1)x \\ &\geq n^2 + c^2 - c - 1_{uv}, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式根据事实 $x \leq \beta - 1_{uv} = n + c$ 得出。因此，我们完成了该引理的证明。 $\square$

引理 2.2. 对于任何整数 $n \geq 2$, 我们有 $\beta \leq n+1$ 。如果 $\beta = n+1$, 则 G 同构于 $K_{n,n+1}$ 。

Proof. 假设 $\beta \geq n+1$ 成立。我们的目标是证明 G 与 $K_{n,n+1}$ 同构。令 u 和 v 是 G 中的两个顶点, 使得 $d(u) = d(v) = \beta$ 。由于 $\beta \geq n+1$, 我们有 $c = \beta - n - 1_{uv} \geq 1 - 1_{uv}$ 。如果 $1_{uv} = 0$, 则由引理 2.1 得到 $e(\overline{G}) > n^2$, 除非 $c = 1$, 这产生矛盾。如果 $c = 1$, 则我们得出结论 $x = n + c = n+1$ 和 $\gamma = x - 2c - 1 = n - 2$, 这意味着 $e(B, D) = |B||D|$ 。因此, G 同构于 $K_{n,n+1}$ 。如果 $1_{uv} = 1$, 则 $|B| - |D| \geq 3$, 除非 $c = 0$ 。因此, 存在 $u_1, v_1 \in B$ 使得 $d(u_1) = d(v_1)$, 根据抽屉原理, 并且 $u_1 u v v_1$ 是长度为 3 的路径。这导致了矛盾。

现在, 假设 $1_{uv} = 1$ 和 $c = 0$ 成立; 此外, B 中顶点的度数两两不同。回忆一下 $|B| - |D| = 2c + 1$ 。由此可得 $x = |B| = |D| + 1$ 。这意味着在 B 中存在一个顶点顺序 $w_1, \dots, w_x$, 使得对于任何 $i \in [x]$ 均有 $|N_D(w_i)| = i - 1$ 。因此

$$\bar{e}(B, D) = |B||D| - \sum_{i=1}^x (i-1) = \binom{x}{2}.$$

这与 (1) 一起意味着

$$\begin{aligned} e(\overline{G}) &\geq (\beta - 1 - 1_{uv})^2 + 4n - \frac{1}{2}(x^2 + x) - 2 - 1_{uv} + \binom{x}{2} \\ &= n^2 + 2n - x - 2 \geq n^2 + n - 2, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式在视图 $x \leq \beta - 1_{uv} = n$ 的情况下成立。除非 $n = x = 2$, 否则会导致矛盾。如果 $n = x = 2$, 则我们令 $B = \{u_1, v_1\}$ 和 $D = \{w_1\}$ 。显然, $\{d(u_1), d(v_1)\} = \{2, 3\}$ 和 $d(w_1) = 1$ 。不失一般性, 我们可以假设 $d(u_1) = 2$ 和 $d(v_1) = 3$ 。这表明 $v_1 v u_1 u$ 是一条长度为三且端点度数相等的路径, 这是矛盾的。这就完成了该引理的证明。□

以下引理由陈和马给出 [2] (见引理 5), 在我们的证明中起着至关重要的作用。我们提到条件 $n \geq 5$ 可以从他们的证明中获得。

引理 2.3 (陈和马 [2]). 对于 $n \geq 5$, 我们有要么是 $\beta \geq \Delta - 1$ 要么是 $\Delta \leq n+1$, 其中 Δ 是 G 中顶点的最大度数。

现在, 我们对 $n \geq 5$ 证明定理 1.3。由于 $e(G) \geq n^2 + n$, 我们有 $\Delta \geq n+1$ 。这结合引理 2.2 和 2.3 意味着 (i) $\beta = n+1$ 和 G 同构于 $K_{n,n+1}$, 或 (ii) $\beta \leq n$ 和 $\Delta = n+1$ 。然而, 第二种情况暗示了 $e(G) \leq (2n\beta + \Delta)/2 < n^2 + n$ 是一个矛盾。因此, 我们得出结论, G 必须是完全二分图 $K_{n,n+1}$ 。

以下, 我们证明定理 1.3 对于 $n \in \{2, 3, 4\}$ 。根据引理 2.2, 只需通过获得矛盾来证明定理 1.3 对于 $\beta \leq n$ 。我们首先提到 $\beta \geq 2$ 。否则, 除非 $n = 2$, $e(G) \leq (1 + 1 + \sum_{k=2}^{2n} k)/2 < n^2 + n$ 。然而, 对于 $n = 2$, 度数序列 $(1, 1, 2, 3, 4)$ 不是可图的。接下来, 我们给出以下引理。

引理 2.4. 对于 $n \in \{2, 3, 4\}$, 我们有 $\beta = n$ 。

Proof. 注意 $\beta \geq n-2$ 作为 $n \leq 4$ 。如果 $\beta = n-1$ ，则存在两个顶点 z_1, z_2 ，其度分别为 $2n$ 和 $2n-1$ 。否则，根据 β 和 $n \leq 4$ 的定义

$$2e(G) \leq (n+1)\beta + \left(\sum_{k=\beta+1}^{2n} k - (2n-1) \right) = \frac{1}{2}(5n^2 - n) < 2(n^2 + n).$$

这导致了矛盾。由于存在两个顶点 w_1, w_2 其度数恰好为 β 根据 β 的定义，那么 $w_1 z_1 z_2 w_2$ 和 $w_1 z_2 z_1 w_2$ 中至少有一个是端点度数相等的长度为三的路径，这是一个矛盾。如果 $\beta = n-2$ ，则我们有 $\beta = 2$ 和 $n = 4$ 。容易看出 $2e(G) \leq (n-1)\beta + \sum_{k=\beta+1}^{2n} k = (5n^2 - n + 2)/2 < 2(n^2 + n)$ ，矛盾。□

由引理 2.4，我们有 $\beta = n \in \{2, 3, 4\}$ 。设 u 和 v 是 G 中的两个顶点，使得 $d(u) = d(v) = \beta$ 。回忆一下 $x \leq \beta - 1_{uv}$ 。我们将通过区分以下两种情况进行证明。

案例 1. 顶点 u 和 v 不相邻，即 $1_{uv} = 0$ 。如果 $x \leq \beta - 1$ ，那么根据 (1)

$$e(\overline{G}) \geq (\beta - 1)^2 + 4n - \frac{1}{2}(x^2 + x) - 2 \geq \frac{1}{2}(\beta^2 + 5\beta - 2) > \beta^2 = n^2,$$

产生矛盾。因此，我们可以假设 $x = \beta = n$ 。所以， $|D| = n - 1$ 和 $A_u = A_v = \emptyset$ 。我们声称 $\bar{e}(B, D) + \bar{e}(D) \leq \binom{n-1}{2}$ ；否则，从 (1) 可知

$$e(\overline{G}) > (\beta - 1)^2 + 4n - \frac{1}{2}(x^2 + x) - 2 + \binom{n-1}{2} = n^2,$$

这是一个矛盾。因此， $e(B, D) + e(D) = |B||D| + \binom{|D|}{2} - \bar{e}(B, D) - \bar{e}(D) \geq n^2 - n$ 。这表明在 B 或 D 中总是存在两个度为 $n+1$ 的顶点，这与 β 的定义相矛盾。

情况 2. 顶点 u 和 v 是相邻的，即 $1_{uv} = 1$ 。我们首先声称

$$e(B, D) + e(D) \geq x^2 + x + 1.$$

否则，考虑到 (1)，我们有

$$e(\overline{G}) > (\beta - 2)^2 + 4n - \frac{1}{2}(x^2 + x) - 3 + |B||D| + \binom{|D|}{2} - (x^2 + x + 1) = n^2,$$

矛盾。如果 $x = 0$ ，则 $e(B, D) + e(D) = 0$ ，矛盾。如果 $x = 1$ ，则 $e(B, D) + e(D) = 3$ 。这表明 $e(D, A_u \cup A_v) = e(G) - (e(B, D) + e(D)) - (d(u) + d(v) - 1) \geq n^2 - n - 2$ 。注意还有一点， $e(D, A_u \cup A_v) \leq |D||A_u \cup A_v| = 2(x+1)(\beta - x - 1) = 4(n-2)$ 。这表明 $n \in \{2, 3\}$ 和 $(D, B \cup A_u \cup A_v)$ 是完整的。显然，存在一个长度为三且端点度数相等的路径。如果 $x = 2$ 和 $\beta = 4$ ，那么很容易看出 $A_u \cup A_v \cup B$ 中四个顶点的度数两两不同；否则，必须存在一个长度为三且端点度数相等的路径。这表明 $e(G) \leq (2 + 3 + 4 + 5) + e(D) + 1_{uv} < 4^2 + 4$ ，矛盾。最后，只需考虑情形 $x = \beta - 1 \geq 2$ 。显然， $A_u = A_v = \emptyset$ 。我们声称在 B 中没有一个顶点有 $x-1$

个邻居在 D 中，并且必须存在两个顶点在 B 中有 x 和 $x+1$ 个邻居分别在 D 中。如果存在一个顶点 $w \in B$ 具有 $d_D(w) = x-1$ ，那么对于任意的 $w' \in B$ 具有 $w' \neq w$ ， $wuw'v$ 是一条具有等度端点长度为三的路径；如果没有顶点在 B 中具有 x 或 $x+1$ 邻居在 D 中，那么 $e(B, D) + e(D) \leq x+1 + (x-2) + \binom{x+1}{2} < x^2 + x + 1$ ，矛盾。由此可知， D 中的每个顶点的度数至多为 $x+1$ ；否则，我们将有两个具有至少 $x+2 > \beta$ 相同度数的顶点，这与假设矛盾。因此， $\sum_{z \in D} d(z) \leq (x+1)|D| = (x+1)^2$ 。还需注意， $e(B, D) \leq (x-2) + x + (x+1) = 3x-1$ 和 $\sum_{z \in D} d(z) = e(B, D) + 2e(D) \geq 2(x^2 + x + 1) - e(B, D) \geq 2x^2 - x + 3$ 。这表明 $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ 是一个矛盾，除非 $x = 2$ 。如果 $x = 2$ ，则我们得出结论每个顶点在 D 中的度数必须恰好为三。注意 $d(u) = d(v) = \beta = x+1 = 3$ 也成立。因此，很容易找到一条长度为三且两端点度数相等（均为三）的路径，这构成了一个矛盾。

最后，我们完成了定理 1.3 的证明。

3 结论备注

在本文中，我们证明了对于所有 $n \geq 2$ ，每个具有至少 $n^2 + n + 1$ 条边的 $(2n+1)$ 顶点图都包含两个由长度为三的路径连接的度数相同的顶点。这补充了陈和马 [2] 建立的结果，并完全解决了 Erdős 和 Hajnal 的问题。陈和马 [2] 还获得了关于具有偶数个顶点的图的一个类似结果。

定理 3.1 (陈和马 [2]). 存在一个整数 $n_0 > 0$ ，使得对于所有的 $n \geq n_0$ 都成立。具有至少 $n^2 - 1$ 条边的唯一的 $2n$ 顶点图，不包含两个相同度数的顶点通过长度为三的路径相连，是完全二分图 $K_{n-1, n+1}$ 。

我们的方法也可以扩展到具有偶数个顶点的图，具体证明在此省略。

定理 3.2. 设 $n \geq 3$ 。具有至少 $n^2 - 1$ 条边的唯一 $(2n)$ 顶点图，不包含由长度为三的路径连接的两个度数相同的顶点，是完全二分图 $K_{n-1, n+1}$ 。

最后，我们解决了陈和马提出的关于等度端点路径的以下一般问题 [2]。对于任意正整数 ℓ 和 n ，令 $p_\ell(n)$ 表示一个包含没有通过长度为 ℓ 的路径相连的两个等度顶点的 n 顶点图中的最大边数。陈和马确定了每个 $\ell \in \{1, 2, 3\}$ 的 $p_\ell(n)$ 。对于奇数 $\ell \geq 5$ ，他们猜想完全二分图 $K_{n, n+1}$ 仍然具有极值。

猜想 3.3 (陈和马 [2]). 对于任何奇数整数 $\ell \geq 5$ 和足够大的 n ，它成立。

$$p_\ell(2n+1) = n^2 + n.$$

对于偶数 $\ell \geq 2$ ，作者通过考虑半图证明了 $p_\ell(2n) \geq (n^2 + n)/2$ 。然而，不清楚这是否是最优的。他们倾向于认为奇数和偶数 ℓ 的行为有显著差异，因此提出了以下问题。

问题 3.4 (陈和马 [2]). 确定 $p_\ell(2n)$ 对于所有偶数 ℓ 和足够大的 n 的精确值。

References

- [1] T. Bloom, Erdős Problem #816. <https://www.erdosproblems.com/816>.
- [2] K. Chen and J. Ma, A problem of Erdős and Hajnal on paths with equal-degree endpoints. arXiv:2503.19569 (2025).
- [3] P. Erdős, Problems and results in combinatorial analysis and combinatorial number theory, Graph theory, combinatorics, and applications, Vol. 1 (Kalamazoo, MI, 1988) (1991) 397- – 406.