

对角算子的拓扑共轭分类

Yue Xin^a, Bingzhe Hou^{b,*}

^a*School of Mathematical Science, Heilongjiang University, 150080, Harbin, P. R. China*

^b*School of Mathematics, Jilin University, 130012, Changchun, P. R. China*

Abstract

令 $\ell^p, 1 \leq p < \infty$ 为绝对 p -次幂可求和序列的 Banach 空间, 并且令 π_n 为自然投影到第 n 坐标上对于 $n \in \mathbb{N}$. 令 $\mathfrak{W} = \{w_n\}_{n=1}^\infty$ 为一个有界复数序列. 定义算子 $D_{\mathfrak{W}} : \ell^p \rightarrow \ell^p$ 如下, 对于任意的 $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$, $\pi_n \circ D_{\mathfrak{W}}(x) = w_n x_n$ 对于所有 $n \geq 1$ 成立. 我们称 $D_{\mathfrak{W}}$ 为在 ℓ^p 上的对角算子. 本文研究了在 ℓ^p 上的对角算子的拓扑共轭分类. 更精确地说, 我们得到了以下结果. $D_{\mathfrak{W}}$ 和 $D_{|\mathfrak{W}|}$ 是拓扑共轭的, 其中 $|\mathfrak{W}| = \{|w_n|\}_{n=1}^\infty$. 如果 $\inf_n |w_n| > 1$, 则 $D_{\mathfrak{W}}$ 拓扑共轭于 $2I$, 其中 I 表示恒等算子. 类似地, 如果 $\inf_n |w_n| > 0$ 和 $\sup_n |w_n| < 1$, 则 $D_{\mathfrak{W}}$ 与 $\frac{1}{2}I$ 拓扑共轭. 此外, 如果 $\inf_n |w_n| = 1$ 和 $\inf_n |t_n| > 1$, 则 $D_{\mathfrak{W}}$ 和 $D_{\mathfrak{T}}$ 不是拓扑共轭的.

Keywords: 拓扑共轭等价, 对角算子, 映射在 ℓ^p 上的同胚.

2000 MSC: Primary 37C15, 47B99; Secondary 54C05, 54H20

1. 介绍和预备知识

令 X 是一个完全可分的度量空间, 并且令 $f : X \rightarrow X$ 是一个连续函数. 然后, 配对 (X, f) 被称为离散动力系统. 在动力系统的研究中, 拓扑共轭分类是一个重要而困难的任务.

*Corresponding author.

Email addresses: 179929393@qq.com (Yue Xin), houbz@jlu.edu.cn (Bingzhe Hou)

两个动力系统 (X, f) 和 (Y, g) 被称为拓扑共轭, 如果存在一个同胚 $h : X \rightarrow Y$ 使得 $g = h \circ f \circ h^{-1}$ 。此外, 我们说 h 是从 f 到 g 的拓扑共轭。注意拓扑共轭关系是一种等价关系, 它保留了几乎所有动力学性质, 如周期性、传递性、Devaney 混沌等等 (参考 [8])。

拓扑共轭分类的研究始于 20 世纪 60 年代 S. 斯梅尔提出的 [21] 问题。到目前为止, 已经在一些动力系统的类别上取得了一些分类结果。R. 阿德勒和 R. 帕莱斯 [2] 研究了微分流形上的 Anosov 微分同胚的拓扑共轭分类, 尤其是 T^n 的情况。随后, R. 阿德勒、C. 特雷瑟和 P. 沃福克 [3]、P. 沃尔特斯 [23, 24]、S. 巴塔查里亚 [5, 6] 研究了 T^n 的仿射变换以及更一般的紧致阿贝尔群的拓扑共轭分类。J. Robin [18] 研究了离散动力系统的拓扑共轭和结构稳定性, 随后他与 N. Kuiper 合作研究了有限维线性空间上线性端态映射的拓扑共轭分类问题, 在 [12] 中。R. Schult [20] 证明了任意紧李群的线性表示的拓扑共轭分类等价于它们的代数共轭分类。X. Pan 和 B. Hou 给出了某些紧连通李群上的平移作用的拓扑共轭分类 [16, 17]。

在算子理论中, 相似性是一个重要的研究对象。设 $\mathcal{X}$ 是一个可分的复 Banach 空间。记 $B(\mathcal{X})$ 表示从 X 到其自身的所有有界线性算子的集合。给定 $A, B \in B(\mathcal{X})$ 。如果存在一个有界可逆算子 T , 使得 $TA = BT$, 我们说 A 与 B 相似。直观地说, 相似性只是线性共轭等价。近年来, 线性动力学已成为算子理论中的一个热门方向, 这与著名的不变子空间问题密切相关。关于线性动力学的更多信息, 请参阅书籍 [4] 和 [10]。现在我们对有界线性算子的拓扑共轭分类感兴趣。B.Hou、G. Liao 和 Y. Cao [11] 研究了一类加权后移算子的拓扑共轭分类。在本文中, 我们关注对角算子的拓扑共轭分类。

对角算子的类是泛函分析和算子理论中一个基本且重要的算子类 (例如参见 [9]), 在量子力学研究中至关重要。设 $\mathcal{H}$ 是一个可分复希尔伯特空间并且 $D \in B(\mathcal{H})$ 。 D is called a diagonal operator, if there exists an orthonormal base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ of $\mathcal{H}$ and a bounded sequence of complex numbers $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that

$$Te_n = w_n e_n \quad \text{for all } n = 1, 2, \dots$$

That is, the matrix representation of D under the orthonormal base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ is an infinite dimensional diagonal matrix.

在希尔伯特空间上的自伴算子的本征向量和本征值的研究中, 对角算子是一个基本模型, 而对角化是一种有用的工具。1909 年, H. Weyl[25] 证明了一个在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的自伴算子是对角算子的一个紧扰动。T. Kato[13] 和 M. Rosenblum[19] 对迹类算子对连续谱的扰动进行了研究, 他们表明如果在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的自伴算子 T 不是纯奇异的, 则 T 不能模除迹类进行对角化。R. Carey 和 J. Pincus[7] 证明了一个在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的纯奇异自伴随算子是某个对角算子的小迹类扰动。D. Voiculescu[22] 证明了在一个 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的正规算子是一个对角算子和小希尔伯特-施密特算子之和。最近, Q. Li、J. Shen 和 R. Shi[14] 提供了一个关于 Voiculescu 定理对于正规算子在半有限冯·诺依曼代数中的推广版本。除了自伴随算子之外, B. Ahmadi Kakavandi 和 E. Nobari[1] 考虑了 Toeplitz 算子的对角化问题。P. Nam[15] 研究了 Fock 空间上玻色二次哈密顿量的对角化问题。

我们可以将对角算子的概念从可分复 Hilbert 空间扩展到具有无条件基的可分复 Banach 空间。设 $\mathcal{X}$ 是一个具有无条件基的可分复 Banach 空间和 $D \in B(\mathcal{X})$ 。 D 被称为对角算子, 如果存在一个无条件基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 $\mathcal{X}$ 和一个有界的复数序列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$Te_n = w_n e_n \quad \text{for all } n = 1, 2, \dots.$$

本文旨在研究经典巴拿赫空间 ℓ^p 上的对角算子的拓扑共轭分类。这里, ℓ^p 是绝对 p 次幂可求和序列的空间, 即,

$$\ell^p \triangleq \{x = (x_1, x_2, \dots); x_i \in \mathbb{C} \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}.$$

我们使用 $\|x\|_p$ 表示 ℓ^p -范数的 $x \in \ell^p$, 并用 π_n 表示到 n 坐标的自然投影, 即, $\pi_n(x) = x_n$ 对于 $n \geq 1$ 。不失一般性, 我们也用 0 表示 ℓ^p 中的零向量。设 $\mathfrak{W} = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个有界复数序列。定义运算符 $D_{\mathfrak{W}} : \ell^p \rightarrow \ell^p$ 为, 对于任意 $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$,

$$\pi_n \circ D_{\mathfrak{W}}(x) = w_n x_n, \quad \text{for all } n \geq 1.$$

2. 一类同胚映射在 ℓ^p

在本节中, 我们旨在介绍一类在 $\ell^p, 1 \leq p < \infty$ 上的同胚映射, 这对对角算子的分类起着重要作用。

令 $\mathfrak{S} = \{s_n\}_{n=1}^\infty$ 是一组有界的正数序列, 满足对于每个 $n \geq 1$ 都有 $s_n \geq 1$ 。定义映射 $h_p^\mathfrak{S}$ 在 ℓ^p 上由

$$\pi_n \circ h_p^\mathfrak{S}(x) = \frac{x_n}{|x_n|} \cdot \sqrt[p]{\left(\sum_{k=n}^\infty |x_k|^p\right)^{s_n} - \left(\sum_{k=n+1}^\infty |x_k|^p\right)^{s_n}},$$

给出, 对于任意的 $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$ 。我们将证明 $h_p^\mathfrak{S}$ 是从 ℓ^p 到其自身的同胚, 如下关键引理所示。

关键引理。 令 $\mathfrak{S} = \{s_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个有界正数序列, 对于每个 $n \geq 1$ 都有 $s_n \geq 1$ 。则上述定义的映射 $h_p^\mathfrak{S}$ 是从 ℓ^p 到其自身的同胚。

让我们从两个基本结果开始。

引理 2.1. 令 r 为一个正整数。那么, 对于任意的 $0 \leq b \leq a < 1$ 和任意的 $1 \leq s \leq r$, 我们有

$$(1-a)(a^r - b^r) \leq a^s - b^s \leq \frac{a-b}{1-a}.$$

证明. 如果 $a = 0$, 则所需的不等式是显然的。现在假设 $a > 0$ 。通过连续性论证, 只需证明当 s 是有理数时结论成立。设 $s = \frac{m}{n}$, 其中 m 和 n 是两个

互质的正整数。表示 $u = \frac{1}{bn}$ 和 $v = \frac{1}{an}$ 。由于 $0 \leq b \leq a < 1$, 我们有

$$1 \geq \frac{u}{v} \geq \left(\frac{u}{v}\right)^2 \geq \dots \geq \left(\frac{u}{v}\right)^{rn-1}.$$

因此,

$$\frac{1+u+u^2+\dots+u^{n-1}}{1+v+v^2+\dots+v^{n-1}} \geq \frac{1+u+u^2+\dots+u^{m-1}}{1+v+v^2+\dots+v^{m-1}} \geq \frac{1+u+u^2+\dots+u^{rn-1}}{1+v+v^2+\dots+v^{rn-1}}.$$

乘以 $\frac{1-u}{1-v}$ 后, 我们得到

$$\frac{1-b^r}{1-a^r} \leq \frac{1-b^s}{1-a^s} \leq \frac{1-b}{1-a}. \quad (2.1)$$

注意 $0 < a \leq a^s \leq a^r$ 和

$$a^s - b^s = \left(\frac{1-b^s}{1-a^s} - 1 \right) (1-a^s).$$

然后, 从不等式 (2.1) 可以得出

$$(1-a)(a^r - b^r) \leq a^s - b^s \leq \frac{a-b}{1-a}.$$

□

引理 2.2. 设 $a > 0$ 和 $s \geq 1$. 令 $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 为由任意 $x \in [0, +\infty)$ 定义的连续映射,

$$f(x) = \sqrt[s]{a + x^s}.$$

然后 f 是一个压缩, 即, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, 对于任意 $x, y \geq 0$.

证明. 由于 $a > 0$ 和 $s \geq 1$, 可以看出

$$f'(x) = x^{s-1}(a + x^s)^{1/s-1} = \left(\frac{x}{(a + x^s)^{1/s}} \right)^{s-1} \leq 1, \text{ for every } x > 0.$$

然后 f 是一个压缩映射, 即, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, 对于任意的 $x, y \geq 0$. □

现在, 让我们研究映射 $h_p^\mathfrak{S}$.

引理 2.3. $h_p^\mathfrak{S}$ 是从 ℓ^p 到其自身的良好定义的映射。

证明. 只需证明对于任意的 $x \in \ell^p$, $h_p^\mathfrak{S}(x)$ 实际上是 ℓ^p 的一个元素. 实际上, 我们将给出序列 $h_p^\mathfrak{S}(x)$ 范数的上下界估计. 设 $r \in \mathbb{N}$ 是序列 $\mathfrak{S}$ 的一个上限. 给定任意的 $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$. 设 $y = h_p^\mathfrak{S}(x) = (y_1, y_2, \dots)$.

情况 1。 假设 $\|x\|_p^p \leq \frac{1}{2}$ 。对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n|^p = \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \right)^{s_n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{s_n}.$$

根据引理 2.1, 我们有

$$\frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \right)^r - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^r \right) \leq |y_n|^p \leq 2|x_n|^p.$$

然后,

$$2^{-1/p} \|x\|_p^r \leq \|h_p^{\mathfrak{S}}(x)\|_p \leq 2^{1/p} \|x\|_p. \quad (2.2)$$

情况 2。 假设 $\|x\|_p^p > \frac{1}{2}$ 。对于任何不小于 1 的正数 t , 很明显 $t \leq t^{s_n} \leq t^r$ 。注意对于任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_n \circ h_p^{\mathfrak{S}}(tx) = t^{s_n} \cdot \pi_n \circ h_p^{\mathfrak{S}}(x).$$

由于当前情况下 $2^{1/p} \|x\|_p > 1$, 我们有

$$2^{1/p} \|x\|_p \cdot \|h_p^{\mathfrak{S}}\left(\frac{x}{2^{1/p} \|x\|_p}\right)\|_p \leq \|h_p^{\mathfrak{S}}(x)\|_p \leq (2^{1/p} \|x\|_p)^r \cdot \|h_p^{\mathfrak{S}}\left(\frac{x}{2^{1/p} \|x\|_p}\right)\|_p.$$

然后, 根据不等式 (2.2), 我们得到

$$2^{-r/p} \|x\|_p \leq \|h_p^{\mathfrak{S}}(x)\|_p \leq 2^{r/p} \|x\|_p^r. \quad (2.3)$$

因此, $h_p^{\mathfrak{S}}$ 是从 ℓ^p 到 ℓ^p 的一个映射。证明完毕。 $\square$

引理 2.4. $h_p^{\mathfrak{S}} : \ell^p \rightarrow \ell^p$ 是一个连续映射。

证明. 令 $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ 是 ℓ^p 中的一个柯西序列, 对于每个 $m \geq 1$, 设 $y^{(m)} = h_p^{\mathfrak{S}}(x^{(m)})$ 。写出 $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots)$ 和 $y^{(m)} = (y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots)$, 对于每个 $m \geq 1$ 。通过 $h_p^{\mathfrak{S}}$ 的构造, 很明显 $\{h_p^{\mathfrak{S}}(x^{(m)})\}_{m=1}^{\infty}$ 按坐标收敛, 即对于每个

$n \in \mathbb{N}$, $\{y_n^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 都是一个柯西序列。对于任意的 $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, 存在一个正整数 N_0 使得

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |x_n^{(m)}|^p < 2^{-1/p} \cdot \varepsilon, \text{ for each } m \geq 1.$$

根据不等式 (2.2) 的右侧, 我们有

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |y_n^{(m)}|^p < \varepsilon, \text{ for each } m \geq 1.$$

因此, $h_p^\mathfrak{S}$ 是连续的。 □

引理 2.5. 设 $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 为 ℓ^p 中的一组向量序列。记 $y^{(m)} = h_p^\mathfrak{S}(x^{(m)})$ 对于每一个 $m \in \mathbb{N}$ 。如果 $\{y^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 是一个柯西序列, 那么序列 $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 也是一个柯西序列。

证明. 对于任何 $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, 存在一个正整数 N_0 , 使得

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |y_n^{(m)}|^p < 2^{-1/p} \cdot \varepsilon^r, \text{ for each } m \geq 1.$$

。根据不等式 (2.2) 的左边, 我们有

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |x_n^{(m)}|^p < \varepsilon, \text{ for each } m \geq 1.$$

。然后, 为了证明 $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 是柯西序列, 只需通过坐标证明 $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 收敛。事实上, 我们只需要证明 $\|x^{(m)}\|_p^p$ 收敛为 $m \rightarrow \infty$ 。假设 $\|x^{(m)}\|_p^p$ 收敛为 $m \rightarrow \infty$ 。结合 $\{y_1^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 的收敛,

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} |x_k^{(m)}|^p\right)^{s_1} = \|x^{(m)}\|_p^{ps_1} - |y_1^{(m)}|^p$$

也收敛, 因此 $|x_1^{(m)}|$ 收敛。此外, 由于 $\{\sum_{k=2}^{\infty} |x_k^{(m)}|^p\}_{m=1}^{\infty}$ 的收敛性和 $\{y_2^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ 的收敛性,

$$(\sum_{k=3}^{\infty} |x_k^{(m)}|^p)^{s_2} = (\sum_{k=2}^{\infty} |x_k^{(m)}|^p)^{s_2} - |y_2^{(m)}|^p$$

也收敛, 并且因此 $|x_2^{(m)}|$ 收敛。按照这种方式, 我们可以得到对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $|x_n^{(m)}|$ 收敛。请注意, 对于每一个 $m, n \geq 1$, $\frac{x_n^{(m)}}{|x_n^{(m)}|} = \frac{y_n^{(m)}}{|y_n^{(m)}|}$ 成立。然后, 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, $x_n^{(m)}$ 收敛为 $m \rightarrow \infty$ 。

现在, 让我们证明 $\{\|x^{(m)}\|_p^p\}_{m=1}^{\infty}$ 是一个柯西序列。对于任意的 $\delta > 0$, 我们已经知道存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} |x_n^{(m)}|^p < \frac{\delta}{3}, \text{ for each } m \geq 1.$$

由于 $\{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ 是一个柯西序列且对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $1 \leq s_n \leq r$, 因此存在 $M \in \mathbb{N}$ 使得对于任意的 $m_1, m_2 > M$,

$$\sum_{n=1}^{N_1} ||(y_n^{(m_1)})|^{p/s_n} - |(y_n^{(m_2)})|^{p/s_n}| < \frac{\delta}{3}.$$

根据 $h_p^{\ominus}$ 的构造, 对于任意的 $m \in \mathbb{N}$ 和任意的 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\sum_{k=n}^{\infty} |x_k^{(m)}|^p = \sqrt[s_n]{|y_n^{(m)}|^p + (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k^{(m)}|^p)^{s_n}}.$$

然后根据引理 2.2, 对于任意的 $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ 和任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=n}^{\infty} |x_k^{(M_1)}|^p - \sum_{k=n}^{\infty} |x_k^{(M_2)}|^p \right| \\
& \leq \left| \sqrt[n]{(|y_n^{(M_1)}|^{p/s_n})^{s_n} + (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k^{(M_1)}|^p)^{s_n}} - \sqrt[n]{(|y_n^{(M_2)}|^{p/s_n})^{s_n} + (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k^{(M_1)}|^p)^{s_n}} \right| \\
& \quad + \left| \sqrt[n]{|y_n^{(M_2)}|^p + (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k^{(M_1)}|^p)^{s_n}} - \sqrt[n]{|y_n^{(M_2)}|^p + (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k^{(M_2)}|^p)^{s_n}} \right| \\
& \leq ||(y_n^{(M_1)})|^{p/s_n} - |(y_n^{(M_2)})|^{p/s_n}| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k^{(M_1)}|^p - \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k^{(M_2)}|^p \right|. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

因此, 对于任意的 $m_1, m_2 > M$,

$$\begin{aligned}
& \left| \|x^{(m_1)}\|_p^p - \|x^{(m_2)}\|_p^p \right| \\
& = \left| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m_1)}|^p - \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m_2)}|^p \right| \\
& \leq \left| |(y_1^{(m_1)})|^{p/s_1} - |(y_1^{(m_2)})|^{p/s_1} \right| + \left| \sum_{k=2}^{\infty} |x_k^{(m_1)}|^p - \sum_{k=2}^{\infty} |x_k^{(m_2)}|^p \right| \\
& \quad \dots\dots \text{(Applying the inequality (2.4) } N_1 - 1 \text{ times)} \\
& \leq \sum_{n=1}^{N_1} \left| |(y_n^{(m_1)})|^{p/s_n} - |(y_n^{(m_2)})|^{p/s_n} \right| + \left| \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |x_k^{(m_1)}|^p - \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |x_k^{(m_2)}|^p \right| \\
& \leq \sum_{n=1}^{N_1} \left| |(y_n^{(m_1)})|^{p/s_n} - |(y_n^{(m_2)})|^{p/s_n} \right| + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |x_k^{(m_1)}|^p + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |x_k^{(m_2)}|^p \\
& < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} \\
& = \delta.
\end{aligned}$$

所以 $\{\|x^{(m)}\|_p^p\}_{m=1}^{\infty}$ 是一个柯西序列。这完成了证明。 $\square$

根据上述预备知识, 我们可以证明关键引理。

关键引理的证明. 由引理 2.3 和引理 2.4, $h_p^\mathfrak{S}$ 是从 ℓ^p 到其自身的良好定义的连续映射。

现在我们旨在证明 $h_p^\mathfrak{S}$ 是一个双射. 设 E 为 ℓ^p 中坐标有限且非零的点集. 很容易看出 $h_p^\mathfrak{S}(E) = E$. 对于任意的 $y \in \ell^p$, 存在一个向量序列 $\{y^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 在 E 中, 使得 $y^{(m)}$ 收敛到 y . 由于 $h_p^\mathfrak{S}(E) = E$, 我们得到一组向量 $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 在 E 中, 使得对于每一个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $h_p^\mathfrak{S}(x^{(m)}) = y^{(m)}$. 由引理 2.5, $x^{(m)}$ 收敛到 x 在 ℓ^p 中. 然后, 根据 $h_p^\mathfrak{S}$ 的连续性 (引理 2.4) 可知 $h_p^\mathfrak{S}(x) = y$. 因此, $h_p^\mathfrak{S}$ 是满射的. 假设存在两个不同的向量 $x, \tilde{x} \in \ell^p$, 使得 $h_p^\mathfrak{S}(x) = h_p^\mathfrak{S}(\tilde{x}) = y$. 令

$$y^{(m)} = y \text{ for each } m \geq 1,$$

和

$$x^{(m)} = \begin{cases} x & \text{if } m \text{ is odd,} \\ \tilde{x} & \text{if } m \text{ is even.} \end{cases}$$

由于序列 $\{y^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 是一个柯西序列, 并且对于每一个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $h_p^\mathfrak{S}(x^{(m)}) = y^{(m)}$, 根据引理 2.5 可知 $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 也是一个柯西序列. 这是矛盾的. 因此, $h_p^\mathfrak{S}$ 是单射的.

应用引理 2.5 再次, 我们得到 $(h_p^\mathfrak{S})^{-1}$ 也是连续的. 因此, $h_p^\mathfrak{S}$ 是从 ℓ^p 到其自身的同胚. $\square$

3. 对角算子的拓扑共轭分类

在本节中, 我们将讨论对角算子在 ℓ^p , $1 \leq p < \infty$ 上的拓扑共轭分类.

引理 3.1. 令 $D_{\mathfrak{W}}$ 是在 ℓ^p 上有界对角算子, 其对角序列是 $\mathfrak{W} = \{w_n\}_{n=1}^\infty$. 记 $D_{|\mathfrak{W}|}$ 为具有对角序列 $|\mathfrak{W}| = \{|w_n|\}_{n=1}^\infty$ 的对角算子. 如果对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $|w_n| \neq 1$, 则 $D_{\mathfrak{W}}$ 和 $D_{|\mathfrak{W}|}$ 是拓扑共轭的.

证明. 给定一个复数 w 满足 $|w| \neq 1$. 如果 $w \neq 0$, 写出 $w = |w|e^{i\theta}$. 我们定

义 $f_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 由 $f_w(0) = 0$ 并且对于任意的 $z \neq 0$,

$$f_w(z) = \begin{cases} z \cdot e^{i \cdot \frac{\ln |z|}{\ln |w|} \cdot \theta} & \text{if } w \neq 0, \\ z & \text{if } w = 0. \end{cases}$$

不难看出 f_w 是在 $\mathbb{C}$ 上的一个同胚。事实上, $f_w^{-1}(0) = 0$ 和对于任意的 $z \neq 0$,

$$f_w^{-1}(z) = \begin{cases} z \cdot e^{-i \cdot \frac{\ln |z|}{\ln |w|} \cdot \theta} & \text{if } w \neq 0, \\ z & \text{if } w = 0. \end{cases}$$

此外, f_w 是从乘法算子 $M_{|w|}$ 到乘法算子 M_w 在 $\mathbb{C}$ 上的一个拓扑共轭, 即对于任意的 $z \in \mathbb{C}$,

$$f_w(|w| \cdot z) = w \cdot f_w(z). \quad (3.1)$$

定义 $F_{\mathfrak{W}} : \ell^p \rightarrow \ell^p$, 对于任意 $x \in \ell^p$,

$$\pi_n \circ F_{\mathfrak{W}}(x) = f_{w_n}(\pi_n(x)) \quad \text{for any } n \in \mathbb{N}.$$

注意 $F_{\mathfrak{W}}$ 是一个保范映射。然后, 由每个 f_{w_n} 的连续性可知, $F_{\mathfrak{W}}$ 是一个连续映射。此外, 定义 $F_{\mathfrak{W}}^{-1} : \ell^p \rightarrow \ell^p$ 为, 对于任意的 $x \in \ell^p$,

$$\pi_n \circ F_{\mathfrak{W}}^{-1}(x) = f_{w_n}^{-1}(\pi_n(x)) \quad \text{for any } n \in \mathbb{N}.$$

然后, $F_{\mathfrak{W}}^{-1}$ 也是一个连续映射, 并且是 $F_{\mathfrak{W}}$ 的逆。因此, $F_{\mathfrak{W}}$ 是在 ℓ^p 上的一个同胚。从方程 (3.1) 可以看出

$$F_{\mathfrak{W}} \circ D_{|w|} = D_w \circ F_{\mathfrak{W}}$$

因此, $F_{\mathfrak{W}}$ 是从 $D_{|w|}$ 到 D_w 的拓扑共轭。 □

备注 3.2. 如果 $|w| = 1$, 上述结论可能不成立, 因为每个非平凡旋转都不能与恒等映射拓扑共轭。

定理 3.3. 令 $D_{\mathfrak{W}}$ 是在 ℓ^p 上具有对角序列 $\mathfrak{W} = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的有界对角算子。如果 $\inf_n |w_n| > 1$, 则 $D_{\mathfrak{W}}$ 与 $2I$ 拓扑共轲, 其中 I 表示恒等算子。

证明. 令 $\rho = \inf_n |w_n| > 1$. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令 $s_n = \log_{\rho} |w_n|$. 记 $\mathfrak{S} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. 由于 $D_{\mathfrak{W}}$ 是有界对角算子, 我们有 $s_n \geq 1$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。回忆一下, 映射 $h_p^{\mathfrak{S}}$ 在 ℓ^p 上由

$$\pi_n \circ h_p^{\mathfrak{S}}(x) = \frac{x_n}{|x_n|} \cdot \sqrt[p]{\left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p\right)^{s_n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{s_n}},$$

定义, 对于任意的 $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$. 根据关键引理, 先前定义的映射 $h_p^{\mathfrak{S}}$ 是从 ℓ^p 到其自身的同胚。注意对于任意的 $x \in \ell^p$,

$$h_p^{\mathfrak{S}}(\rho \cdot x) = D_{|\mathfrak{W}|}(h_p^{\mathfrak{S}}(x)).$$

然后, $h_p^{\mathfrak{S}}$ 是从 ρI 到 $D_{|\mathfrak{W}|}$ 的一个拓扑共轲。此外, 如果我们选择 $\mathfrak{S}'$ 为常数序列 $\log_{\rho} 2$, 不难看出 $h_p^{\mathfrak{S}'}$ 是从 ρI 到 $2I$ 的拓扑共轲。因此, 由引理 3.1 可知, $D_{\mathfrak{W}}$ 与 $2I$ 拓扑共轲。 $\square$

备注 3.4. 上述结论显然对于有限维空间 $\mathbb{C}^m$ 成立。实际上, 我们可以选择一个更简单的拓扑共轲 $h_m : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, 由以下定义:

$$\pi_n \circ h_m(x) = \frac{x_n}{|x_n|} \cdot |x_n|^{s_n}, \quad \text{for } n = 1, \dots, m.$$

然而, 如果我们通过以下方式定义 h :

$$\pi_n \circ h(x) = \frac{x_n}{|x_n|} \cdot |x_n|^{s_n}, \quad \text{for } n \in \mathbb{N},$$

那么 h 不是无穷维 Banach 空间 ℓ^p 上的连续映射。因此, 我们的关键引理在本文中扮演着重要角色。

类似地, 我们还可以得到所有范数小于 1 的有界可逆对角算子在拓扑上是共轲的。

推论 3.5. 令 $D_{\mathfrak{W}}$ 为在 ℓ^p 上具有对角序列 $\mathfrak{W} = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的有界对角算子。如果 $\inf_n |w_n| > 0$ 和 $\sup_n |w_n| < 1$, 则 $D_{\mathfrak{W}}$ 在拓扑上与 $\frac{1}{2}\mathbf{I}$ 共轭。

在定理 3.3 中, 条件 $\inf_n |w_n| > 1$ 是必要的。我们如下展示其必要性。

命题 3.6. 令 $D_{\mathfrak{W}}$ 和 $D_{\mathfrak{T}}$ 是在 ℓ^p 上的两个有界对角算子, 其对角序列分别为 $\mathfrak{W} = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\mathfrak{T} = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 。如果 $\inf_n |w_n| = 1$ 和 $\inf_n |t_n| > 1$, 则 $D_{\mathfrak{W}}$ 和 $D_{\mathfrak{T}}$ 不是拓扑共轭的。

证明. 由定理 3.3 可知, 只需证明 $D_{\mathfrak{W}}$ 和 $2\mathbf{I}$ 不拓扑共轭。

假设存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|w_n| = 1$ 。那么 $D_{\mathfrak{W}}$ 拥有一个同胚于单位圆的不变紧子集。注意 $2\mathbf{I}$ 拥有唯一的不变紧子集 $\{0\}$ 。因此, 在这种情况下, $D_{\mathfrak{W}}$ 不与 $2\mathbf{I}$ 具有拓扑共轭关系。

现在假设对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|w_n| > 1$ 。假设 h 是从 $D_{\mathfrak{W}}$ 到 $2\mathbf{I}$ 的拓扑共轭。那么, $h(0) = 0$ 因为 0 是唯一的不动点。由 h 的连续性, 存在一个正数 ε , 使得 $h(\overline{B(0, 2\varepsilon)}) \subseteq B(0, 1)$, 其中 $B(0, 2\varepsilon)$ 表示集合 $\{x \in \ell^p; \|x\|_p < 2\varepsilon\}$ 。此外, 由 h^{-1} 的连续性可知, 存在一个正数 δ 使得 $h^{-1}(\overline{B(0, \delta)}) \subseteq B(0, \varepsilon)$, 即 $\overline{B(0, \delta)} \subseteq h(B(0, \varepsilon))$ 。由于 $\inf_n |w_n| = 1$, 存在一个子序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $|w_{n_k}|^k \leq 2$ 。令

$$x^{(k)} = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{\varepsilon}_{n_k\text{-th}}, 0, \dots).$$

然后,

$$D_{\mathfrak{W}}^k(x^{(k)}) = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{|w_{n_k}|^k \cdot \varepsilon}_{n_k\text{-th}}, 0, \dots) \in \overline{B(0, 2\varepsilon)}.$$

由于 h 是一个同胚, 可以看到

$$h(x^{(k)}) \in h(\overline{B(0, 2\varepsilon)}) \setminus \overline{B(0, \delta)} \subseteq B(0, 1) \setminus \overline{B(0, \delta)}$$

和

$$h(D_{\mathfrak{W}}^k(x^{(k)})) \in h(\overline{B(0, 2\varepsilon)}) \setminus \overline{B(0, \delta)} \subseteq B(0, 1).$$

然而,

$$\|h(D_{\mathfrak{W}}^k(x^{(k)}))\| = \|2^k h(x^{(k)})\| \geq 2^k \cdot \delta \rightarrow \infty \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

这是矛盾的。 $\square$

示例 3.7. 令 $\mathfrak{W} = \{w_n = 1 + 1/n\}_{n=1}^\infty$. 可以看出对角算子 $D_{\mathfrak{W}}$ 和 $2\mathbf{I}$ 的动力学性质几乎相同。然而, 根据命题 3.6, $D_{\mathfrak{W}}$ 和 $2\mathbf{I}$ 不是拓扑共轭的。

声明

伦理批准

不适用。

竞争利益

作者声明不存在任何利益冲突或竞争利益。

作者贡献

所有作者对这项工作贡献相同。

数据和材料的可用性

数据共享不适用于本文, 因为在当前研究中没有生成或分析任何数据集。

References

- [1] B. Ahmadi Kakavandi, E. Nobari. Approximate diagonalization of some Toeplitz operators and matrices. Linear Multilinear A. 70(21) (2022) 7093–7114.
- [2] R. L. Adler, R. Palais. Homeomorphic conjugacy of automorphisms on the torus. P. Am. Math. Soc. 16 (1965) 1222–1225.
- [3] R. L. Adler, C. Tresser, P. Worfolk. Topological conjugacy of linear endomorphisms of the 2-torus. T. Am. Math. Soc. 394 (1997) 1633–1652.

- [4] F. Bayart, É. Matheron. Dynamics of Linear Operators (No. 179). New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2009.
- [5] S. Bhattacharya. Orbit equivalence and topological conjugacy of affine actions on compact abelian groups. *Monatsh Math* 129 (2000) 89–96.
- [6] S. Bhattacharya. Topological conjugacy of automorphism flows on compact Lie groups. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.* 20(2) (2000), 335–342.
- [7] R. Carey, J. Pincus. Unitary equivalence module the trace class for self-adjoint operators. *Am. J. Math.* 98 (1976) 481–514.
- [8] R. L. Devaney. An introduction to chaotic dynamical systems. Addison Weseley, 1987.
- [9] S. Garcia, J. Mashreghi, W. Ross. Operator Theory by Example. Oxford Graduate Texts in Mathematics 30, Oxford University Press, 2023.
- [10] K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris. Linear Chaos. Springer, London, 2011.
- [11] B. Hou, G. Liao, Y. Cao. Dynamics of shift operators. *Houston J. Math.* 38(4) (2012) 1225–1239.
- [12] N. H. Kuiper, J. W. Robbin. Topological classification of linear endomorphisms. *Invent. Math.* 19(2) (1973) 83–106.
- [13] T. Kato. Perturbation of continuous spectra by trace class operators, *P. Jpn. Acad. A-Math.* 33 (1957) 260–264.
- [14] Q. Li, J. Shen, R. Shi. A generalization of Voiculescu’s theorem for normal operators to semifinite von Neumann algebras. *Adv. Math.* 375 (2020) 107347, 55 pp.

- [15] P. Nam, M. Napiórkowski, J. P. Solovej. Diagonalization of bosonic quadratic Hamiltonians by Bogoliubov transformations. *J. Funct. Anal.* 270(11) (2016) 4340–4368.
- [16] X. Pan, B. Hou. Topologically conjugate classifications of the translation actions on low-dimensional compact connected Lie groups. *Sci. China Math.* 64(5) (2021) 963–1010.
- [17] X. Pan, B. Hou. Topologically conjugate classifications of the translation actions on compact connected Lie groups $SU(2) \times T^n$, *J. Differ. Equ. Appl.* 28(8) (2022) 991–1038.
- [18] J. W. Robbin. Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems. *B. Am. Math. Soc.* 78 (1972) 923–952.
- [19] M. Rosenblum. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence, *Pacific J. Math.* 7 (1957) 997–1010.
- [20] R. Schultz. On the topological classification of linear representations. *Topology* 16(3) (1977) 263–269.
- [21] S. Smale. Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms. Columbia University, Department of Mathematics, 1963.
- [22] D. Voiculescu. Some results on norm-ideal perturbations of Hilbert space operators. *J. Oper. Theory* 2(1) (1979) 3–37.
- [23] P. Walters. Topological conjugacy of affine transformations of tori. *T. Am. Math. Soc.* 131 (1968) 40–50.
- [24] P. Walters. Topological conjugacy of affine transformations of compact abelian groups. *T. Am. Math. Soc.* 140 (1969) 95–107.

- [25] H. Weyl. Über beschränkte quadratische formen, deren differenz vollstetig ist. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 27(1) (1909) 373–392.