

RESEARCH ARTICLE

使用快速傅里叶变换生成多波长大气波动光学模拟相位屏

M. W. Hyde IV^a, M. F. Spencer^{b,c}, and M. Kalensky^d^aEpsilon C5I, Beavercreek, OH, 45431, USA^bDepartment of Engineering Physics, Air Force Institute of Technology, Dayton, OH, 45433, USA^cJoint Directed Energy Transition Office, Office of the Under Secretary of Defense for Research and Engineering, Washington, DC, USA^dIntegrated Engagement Systems Department, Naval Surface Warfare Center Dahlgren Division, Dahlgren, Virginia, USA

ARTICLE HISTORY

Compiled 2025 年 5 月 4 日

摘要

我们提出了一种使用快速傅里叶变换合成多波长大气波动光学仿真相位屏的方法。我们通过将理论上的双波长光程长度结构函数与模拟结果进行比较来验证我们的工作，发现两者非常一致。我们的相位屏合成方法将在强或深层湍流的双波长自适应光学仿真中发挥作用。

KEYWORDS

自适应光学；大气湍流；波前光学仿真

1. 介绍

快速准确地合成用于波光学模拟的大气相屏的技术一直是超过 30 年的研究热点 [1–9]。在这一历史的大部分时间里，主要目标是生成一个单一波长下的连续湍流路径的精确离散表示。

近期，对于应用于光束投射的双波长或多波长自适应光学 (AO) 系统产生了兴趣 [10, 11]。在双波长 AO 中，大气是在一个波长下被感知而在另一个波长下进行校正的。在天文学中，这是常见的做法，并且已经研究了几十年 [12–21]。然而，与天文观测不同的是，用于光束投射的双波长 AO 系统通常在互补条件下工作（即，小视场和长、几乎水平的路径 [22]）。后者导致了闪烁，从而产生了称为分支点的相位不连续性 [23,24]。这些现象对双波长 AO 性能的影响尚未完全量化 [10]。

这当然促使人们对强湍流条件下的双波长 AO 系统进行研究,并由此产生技术来生成具有合适统计特性的、在两个或多个波长上的湍流实现。

事实上, Ishimaru [25] 首先推导出的双波长相位协方差函数 B_S 为

$$B_S(\boldsymbol{\rho}, k_1, k_2) = \langle \phi(\boldsymbol{\rho}_1, k_1) \phi(\boldsymbol{\rho}_2, k_2) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_S(\boldsymbol{\kappa}, k_1, k_2) \exp(j\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}) d^2\kappa$$

$$\Phi_S(\boldsymbol{\kappa}, k_1, k_2) = \pi k_1 k_2 z \Phi_n(\boldsymbol{\kappa}) \left\{ \text{sinc} \left[\frac{z}{2} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \kappa^2 \right] + \text{sinc} \left[\frac{z}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \kappa^2 \right] \right\}, \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$, Φ_n 是折射率功率谱, z 是传播距离, $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ 。令 $k_1 = k_2 = k$ 并且假设第二个 $\text{sinc}(x)$ 函数等于一(即几何光学近似)简化了方程 (1) 至数十年来用于生成大气相位屏的表达式。然而, 涉及湍流的多波长仿真应使用方程 (1) 的完整表达式来合成屏幕, 因为需要捕捉感兴趣波长范围内湍流相位的物理相关性。

查诺茨基在参考文献 [26] 中首次提出了这种技术。在此, 他描述了如何使用稀疏谱 (SS) 方法合成双波长相位屏 [7,8]。我们在本文中的目的是展示如何使用更流行的傅里叶或频谱方法生成此类屏幕 [2,5,9]。

重要的是要声明, 尽管傅里叶技术可能比 SS 更受欢迎, Charnotskii 在 [9,26] 文献中提出了有力的论据来证明 SS 方法的优越性。我们并不质疑他在那些论文中的结论。相反, 我们的目的是将现有的单波长傅里叶方法推广到任意数量的波长。以下, 我们将介绍我们多波长傅里叶/光谱相位屏方法的理论、程序和验证。

2. 理论

我们从传统的傅里叶方法开始, 用于生成单一波数 $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ [2,5,9] 的大气相位屏:

$$\phi[i, j, k_1] = \text{Re} \left\{ \sum_{m,n} (r^r[m, n, k_1] + jr^i[m, n, k_1]) \sqrt{\Phi_S[m, n, k_1, k_1]} \frac{2\pi}{L_x} \frac{2\pi}{L_y} \right. \\ \left. \times \exp\left(j2\pi \frac{m}{M} i\right) \exp\left(j2\pi \frac{n}{N} j\right) \right\}, \quad (2)$$

其中 $\text{Re}(c)$ 是 c 的实部; M, N 沿水平和垂直网格方向的点数; i, j 对应于 x, y 的索引; m, n 对应于空间频率 κ_x, κ_y 的索引。同样, 在方程 (2) 中, $L_x = M\Delta x, L_y = N\Delta y, \Delta x, \Delta y$ 是水平和垂直网格间距, r^r, r^i 是 $N \times M$ 个独立的标准正态随机数矩阵, 最后, Φ_S 是在方程 (1) 中的相位功率谱 [27,28]。方程 (2) 等价于一个离散逆傅里叶变换; 因此, 可以使用快速傅里叶变换 (FFT) 算法来合成屏幕。注意, 在方程 (2) 中的和的虚部在统计上与实部独立, 并且也具有适当的空域统计特性。其中一个或两个都可以用来形成 ϕ 。

我们的目标是使用方程 (2) 在 $k_2, k_3, \dots, k_Q$ 生成具有适当协方差的其他相位屏幕。

继续，我们使用方程 (2) 计算矩 $\langle \phi[i_1, j_1, k_p] \phi[i_2, j_2, k_q] \rangle$ ，展开后得到

$$\begin{aligned} \langle \phi[i_1, j_1, k_p] \phi[i_2, j_2, k_q] \rangle &= \sum_{m_1, n_1} \sum_{m_2, n_2} \frac{2\pi}{L_x} \frac{2\pi}{L_y} \sqrt{\Phi_S[m_1, n_1, k_p, k_p]} \sqrt{\Phi_S[m_2, n_2, k_q, k_q]} \\ &\times \left\{ \langle r^r[m_1, n_1, k_p] r^r[m_2, n_2, k_q] \rangle \cos \left[2\pi \left(\frac{m_1}{M} i_1 + \frac{n_1}{N} j_1 \right) \right] \cos \left[2\pi \left(\frac{m_2}{M} i_2 + \frac{n_2}{N} j_2 \right) \right] \right. \\ &+ \langle r^i[m_1, n_1, k_p] r^i[m_2, n_2, k_q] \rangle \sin \left[2\pi \left(\frac{m_1}{M} i_1 + \frac{n_1}{N} j_1 \right) \right] \sin \left[2\pi \left(\frac{m_2}{M} i_2 + \frac{n_2}{N} j_2 \right) \right] \\ &- \langle r^r[m_1, n_1, k_p] r^i[m_2, n_2, k_q] \rangle \cos \left[2\pi \left(\frac{m_1}{M} i_1 + \frac{n_1}{N} j_1 \right) \right] \sin \left[2\pi \left(\frac{m_2}{M} i_2 + \frac{n_2}{N} j_2 \right) \right] \\ &\left. - \langle r^i[m_1, n_1, k_p] r^r[m_2, n_2, k_q] \rangle \sin \left[2\pi \left(\frac{m_1}{M} i_1 + \frac{n_1}{N} j_1 \right) \right] \cos \left[2\pi \left(\frac{m_2}{M} i_2 + \frac{n_2}{N} j_2 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

令 $\langle r_1^r r_2^r \rangle = \langle r_1^i r_2^i \rangle$ 和 $\langle r_1^r r_2^i \rangle = \langle r_1^i r_2^r \rangle$ 简化方程 (3) 为

$$\begin{aligned} \langle \phi[i_1, j_1, k_p] \phi[i_2, j_2, k_q] \rangle &= \sum_{m_1, n_1} \sum_{m_2, n_2} \frac{2\pi}{L_x} \frac{2\pi}{L_y} \sqrt{\Phi_S[m_1, n_1, k_p, k_p]} \sqrt{\Phi_S[m_2, n_2, k_q, k_q]} \\ &\times \left\{ \langle r^r[m_1, n_1, k_p] r^r[m_2, n_2, k_q] \rangle \cos \left[2\pi \left(\frac{m_1}{M} i_1 + \frac{n_1}{N} j_1 - \frac{m_2}{M} i_2 - \frac{n_2}{N} j_2 \right) \right] \right. \\ &\left. - \langle r^r[m_1, n_1, k_p] r^i[m_2, n_2, k_q] \rangle \sin \left[2\pi \left(\frac{m_1}{M} i_1 + \frac{n_1}{N} j_1 + \frac{m_2}{M} i_2 + \frac{n_2}{N} j_2 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

为了屏幕具有物理意义，方程 (4) 必须等于方程 (1) 中的 B_S 。这需要 $\langle r_1^r r_2^i \rangle = 0$ 和

$$\langle r^r[m_1, n_1, k_p] r^r[m_2, n_2, k_q] \rangle = \frac{\Phi_S[m_1, n_1, k_p, k_p] \delta[m_1 - m_2] \delta[n_1 - n_2]}{\sqrt{\Phi_S[m_1, n_1, k_p, k_p]} \sqrt{\Phi_S[m_2, n_2, k_q, k_q]}}, \quad (5)$$

，其中 $\delta[x]$ 是克罗内克德尔塔函数。将方程 (5) 代入方程 (4)，并对 m_2, n_2 进行简单的求和，我们得到方程 (1) 的黎曼和形式。

上述分析表明，我们可以使用相关高斯随机数在方程 (2) 中以适当的物理协方差合成相位屏 k_p 和 k_q 。这些数字使用 Cholesky 因子很容易生成。参考方程 (5)，对于 r_p^r, r_q^r 和 r_p^i, r_q^i （实部和虚部统计独立）的协方差矩阵等于

$$\Sigma_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & R_{pq} \\ R_{pq} & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中 R_{pq} 是

$$R_{pq} = \frac{\Phi_S[m, n, k_p, k_q]}{\sqrt{\Phi_S[m, n, k_p, k_p]} \sqrt{\Phi_S[m, n, k_q, k_q]}}. \quad (7)$$

很容易将方程 (6) 推广到任意数量的波数，使得

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1Q} \\ R_{12} & 1 & R_{23} & \dots & R_{2Q} \\ R_{13} & R_{23} & 1 & \dots & R_{3Q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1Q} & R_{2Q} & R_{3Q} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

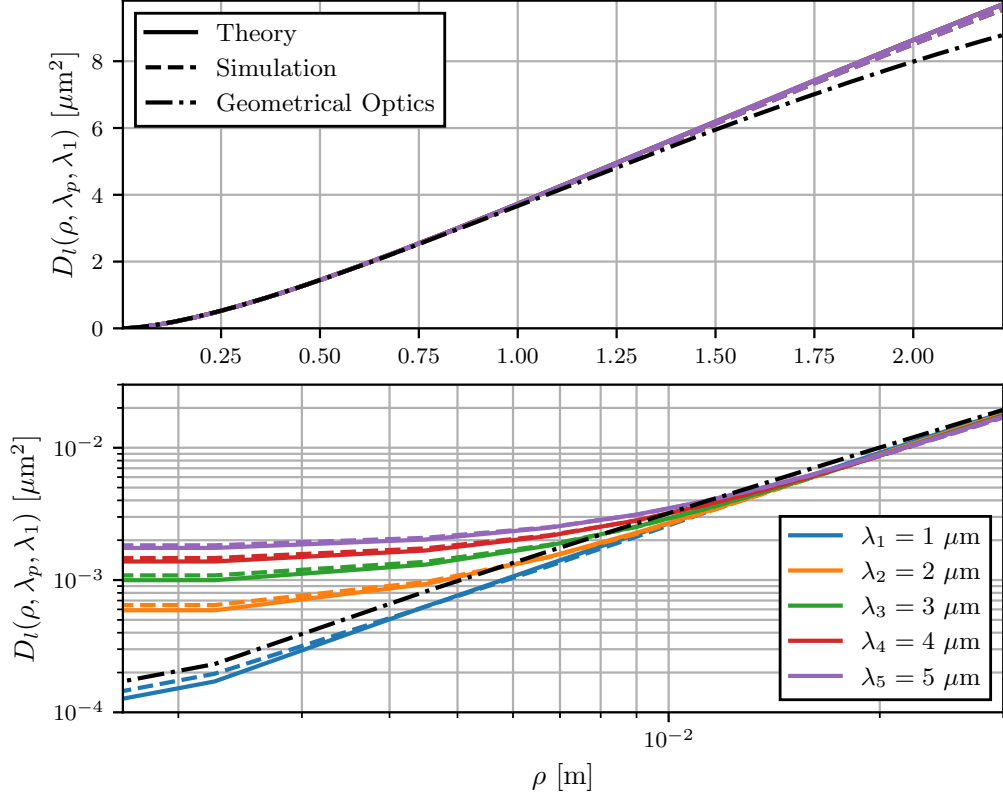


图 1. 两个波长的 OPL 结构函数 $D_l(\rho, \lambda_p, \lambda_1)$ 结果在线性和双对数尺度上绘制。

对方程 (8) 进行 Cholesky 分解—即， $\Sigma = LL^T$ ，其中 L 是一个下三角矩阵—是 [29,30]

$$L_{qq} = \left(\Sigma_{qq} - \sum_{k=1}^{q-1} L_{qk}^2 \right)^{1/2} \quad (9)$$

$$L_{pq} = \frac{1}{L_{qq}} \left(\Sigma_{pq} - \sum_{k=1}^{q-1} L_{pk} L_{qk} \right) \quad p > q.$$

高斯随机数 $r_{1,\dots,Q}^r$ 和 $r_{1,\dots,Q}^i$ 被代入方程 (2) 以合成相位屏在 $k_1, k_2, \dots, k_Q$ ，它们根据

$$\begin{bmatrix} r_1^r, r_1^i \\ r_2^r, r_2^i \\ r_3^r, r_3^i \\ \vdots \\ r_Q^r, r_Q^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \dots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{Q1} & L_{Q2} & L_{Q3} & \dots & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1, r_{Q+1} \\ r_2, r_{Q+2} \\ r_3, r_{Q+3} \\ \vdots \\ r_Q, r_{2Q} \end{bmatrix} \quad (10)$$

从 $2Q \times M$ 矩阵的独立标准正态随机数生成，并使用方程 (9) 递归计算 L_{pq} 。

3. 程序

总结而言，使用 FFT 生成多波长相位屏的过程如下：

- (1) 生成两组 Q 标准正态随机数。
- (2) 使用方程 (9) 计算 Cholesky 矩阵 $\mathbf{L}$ 。
- (3) 生成 $r_{1,\dots,Q}^r$ 和 $r_{1,\dots,Q}^i$ 使用方程 (10)。
- (4) 将 $r_{1,\dots,Q}^r$ 和 $r_{1,\dots,Q}^i$ 代入方程 (2)。
- (5) 计算 Q 二维 FFT。

我们注意到我们的方法也可以用于合成多波长次谐波屏幕 [2,5,9]:

- (1) 生成两组 Q 标准正态随机数。
- (2) 使用方程 (9) 计算 Cholesky 矩阵 $\mathbf{L}$ 。
- (3) 生成 $r_{1,\dots,Q}^r$ 和 $r_{1,\dots,Q}^i$ 使用方程 (10)。
- (4) 将 $r_{1,\dots,Q}^r$ 和 $r_{1,\dots,Q}^i$ 代入参考文献 [9] 的方程 (10) 中。
- (5) 计算离散傅里叶变换。
- (6) 求和次谐波屏幕。

4. 验证

图 1 显示了光学路径长度 (OPL) 结构函数 D_l 的仿真和理论结果对比。理论上的 D_l 给出为参考文献 [26] 中的方程 (18)，我们以数值方式计算了它，其中 Φ_n 等于修改后的冯·卡门谱 [31]， $C_n^2 = 3.71 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ ， $z = 750 \text{ m}$ ， $l_0 = 5 \text{ mm}$ 和 $L_0 = 20 \text{ m}$ 。我们还包括了几何光学 (GO) D_l ，我们从 Ref. [32] 第 6 章方程 (60) 给出的相位结构函数 $D_S = k_p k_q D_l$ 获得。我们从 1000 个统计独立的 ϕ 计算模拟的 D_l ，其中正方形网格的边长和间距分别为 9 m 和 $l_0/3$ 。每个 ϕ 由一个 FFT 屏幕加上三个次谐波屏幕组成。我们在参考文献 [33] 中包含了一个用于生成多波长相位屏的 Python 脚本。

我们观察到理论和模拟的 D_l 在图 1 中有很好的致。这些结果的质量验证了我们的多波长傅里叶相位屏方法。请注意，双波长结构函数在 $\rho = 0$ 处不等于零，与单波长的 D_l 不同。这一特征在参考文献 [26] 中进行了描述。此外，单波长 D_l (蓝色轨迹) 在小分离距离时 (底部图) 低于 GO D_l ，这是由于衍射造成的，该衍射包含在方程 (2) 的相位功率谱中。

5. 结论

在这篇论文中，我们介绍了一种使用 FFT 生成多波长大气相位屏的方法。这项工作扩展了已建立的用于单波长相位屏生成的傅里叶/谱方法，并增强了最近的 SS 方法，用于双波长相位屏 [26]。这篇短文从总结我们方法理论基础的部分开始，并以详细的逐步指南结束，说明如何实现我们的技术。然后通过将从五个波长处生成的 1,000 个相位屏得到的双波长 OPL 结构函数与理论进行比较来验证我们的方法。结果非常吻合。我们生成多波长相位屏的方法将在研究强湍流对双波长自适应光学系统影响的模拟中发挥作用。

致谢

作者感谢联合定向能源转型办公室赞助此项研究。

M.W.H.：本文表达的观点属于作者本人，并不代表 Epsilon C5I 或 Epsilon Systems 的政策或立场。

披露声明

作者声明，在进行研究时不存在可能被视为潜在利益冲突的任何商业或财务关系。

美国政府授权复制和分发重印本用于政府目的，无论是否存在版权标记。分布声明 A。批准公开发布：分配无限制。公共事务发布批准编号：NSWCDD-PN-25-00102。

资金支持

此项研究未获得任何资助。

参考文献

- [1] Roddier NA. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials. *Opt Eng.* 1990;29(10):1174–1180. Available from: <https://doi.org/10.1117/12.55712>.
- [2] Lane RG, Glindemann A, Dainty JC. Simulation of a Kolmogorov phase screen. *Waves in Random Media.* 1992;2(3):209–224. Available from: <https://doi.org/10.1088/0959-7174/2/3/003>.
- [3] Roggemann MC, Welsh BM. *Imaging through turbulence*. Boca Raton, Florida: CRC Press; 1996.
- [4] Frehlich R. Simulation of laser propagation in a turbulent atmosphere. *Appl Opt.* 2000 Jan;39(3):393–397. Available from: <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-39-3-393>.
- [5] Schmidt JD. *Numerical simulation of optical wave propagation with examples in matlab*. Bellingham, Washington: SPIE Press; 2010.
- [6] Carbillet M, Riccardi A. Numerical modeling of atmospherically perturbed phase screens: New solutions for classical fast Fourier transform and Zernike methods. *Appl Opt.* 2010 Nov;49(31):G47–G52. Available from: <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-49-31-G47>.
- [7] Charnotskii M. Sparse spectrum model for a turbulent phase. *J Opt Soc Am A.* 2013 Mar; 30(3):479–488. Available from: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-30-3-479>.
- [8] Charnotskii M. Statistics of the sparse spectrum turbulent phase. *J Opt Soc Am A.* 2013 Dec;30(12):2455–2465. Available from: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-30-12-2455>.
- [9] Charnotskii M. Comparison of four techniques for turbulent phase screens simulation.

- J Opt Soc Am A. 2020 May;37(5):738–747. Available from: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-37-5-738>.
- [10] Hyde MW, McCrae JE, Kalensky M, et al. “Hidden phase” in two-wavelength adaptive optics. Appl Opt. 2024 Jun;63(16):E1–E9. Available from: <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-63-16-E1>.
 - [11] Hyde MW, Kalensky M, Spencer MF. Phase error scaling law in two-wavelength adaptive optics. IEEE Photonics Technol Lett. 2024 June;36(12):779–782.
 - [12] Fugate RQ, Fried DL, Ameer GA, et al. Measurement of atmospheric wavefront distortion using scattered light from a laser guide-star. Nature. 1991;353(6340):144–146.
 - [13] Fugate RQ, Ellerbroek BL, Higgins CH, et al. Two generations of laser-guide-star adaptive-optics experiments at the Starfire Optical Range. J Opt Soc Am A. 1994 Jan; 11(1):310–324. Available from: <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-11-1-310>.
 - [14] Ageorges N, Dainty C, editors. Laser guide star adaptive optics for astronomy. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic; 2000.
 - [15] Parenti RR, Sasiela RJ. Laser-guide-star systems for astronomical applications. J Opt Soc Am A. 1994 Jan;11(1):288–309. Available from: <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-11-1-288>.
 - [16] Wang L, Andersen D, Ellerbroek B. Sky coverage modeling for the whole sky for laser guide star multiconjugate adaptive optics. Appl Opt. 2012 Jun;51(16):3692–3700. Available from: <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-51-16-3692>.
 - [17] Lukin VP. Efficiency of some correction systems. Opt Lett. 1979 Jan;4(1):15–17. Available from: <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-4-1-15>.
 - [18] Hogge CB, Butts RR. Effects of using different wavelengths in wave-front sensing and correction. J Opt Soc Am. 1982 May;72(5):606–609. Available from: <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-72-5-606>.
 - [19] Holmes JF, Gudimetla VSR. Strehl’s ratio for a two-wavelength continuously deformable optical adaptive transmitter. J Opt Soc Am. 1983 Sep;73(9):1119–1122. Available from: <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-73-9-1119>.
 - [20] Winocur J. Dual-wavelength adaptive optical systems. Appl Opt. 1983 Dec; 22(23):3711–3715. Available from: <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-22-23-3711>.
 - [21] Devaney N, Goncharov AV, Dainty JC. Chromatic effects of the atmosphere on astronomical adaptive optics. Appl Opt. 2008 Mar;47(8):1072–1081. Available from: <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-47-8-1072>.
 - [22] Kalensky M, Getts D, Banet MT, et al. Limitations of beam-control compensation. Opt Express. 2024 Nov;32(24):42301–42317. Available from: <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-32-24-42301>.
 - [23] Fried DL, Vaughn JL. Branch cuts in the phase function. Appl Opt. 1992 May; 31(15):2865–2882. Available from: <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-31-15-2865>.
 - [24] Fried DL. Branch point problem in adaptive optics. J Opt Soc Am A. 1998 Oct;

- 15(10):2759–2768. Available from: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-15-10-2759>.
- [25] Ishimaru A. Temporal frequency spectra of multifrequency waves in turbulent atmosphere. *IEEE Trans Antennas Propag.* 1972 Jan;20(1):10–19.
 - [26] Charnotskii M. Phase screens for the two-wave adaptive optics simulations. *Optica Open.* 2024;Preprint.
 - [27] Tatarskii VI. Wave propagation in a turbulent medium. New York, New York: McGraw-Hill; 1961.
 - [28] Ishimaru A. Wave propagation and scattering in random media. Piscataway, New Jersey: IEEE Press; 1999.
 - [29] Strang G. Linear algebra and its applications. 3rd ed. Toronto, Canada: Thomson Learning; 1988.
 - [30] Watkins DS. Fundamentals of matrix computations. 2nd ed. New York, New York: Wiley; 2002.
 - [31] Sasiela RJ. Electromagnetic wave propagation in turbulence. 2nd ed. Bellingham, Washington: SPIE Press; 2007.
 - [32] Andrews LC, Phillips RL. Laser beam propagation through random media. 2nd ed. Bellingham, Washington: SPIE Press; 2005.
 - [33] Hyde M. `Generate_Multi_Wvl_Screens.py`: Python script to synthesize multi-wavelength atmospheric phase screens. 2025 Feb; Available from: <https://doi.org/10.6084/m9.figshare.27981053.v2>.