Reinhardt 基数和最终占优函数

Marwan Salam Mohammd
marwan.mizuri@gmail.com

2025 年 5 月 3 日

摘要

我们证明了一个关于集合论宇宙自体初等嵌入（Reinhardt 嵌入）以及在序数上"最终占优势"的函数的结果。我们将这一结果应用于展示满足某些严格条件的初等嵌入的存在，这些嵌入也让人想起在一个更局部环境中的可延展性。进一步构建这些概念的基础上，我们明确了在 Reinhardt 嵌入下由 Gabriel Goldberg 在其论文《可测基数和无选择公理》中证明的一些大基数的本质。最后，这些想法被用于给出 Kunen 不一致性的另一种证明。

1 介绍

让我们在集合论的通常一阶语言中补充一个函数符号 j,，并让 ZFC(j) 成为以下公理的集合:

(i) 通常的公理 ZFC.
(ii) 包含 j 的公式的理解与替换。
(iii) 断言 j 是集合论宇宙 V 到其自身的非平凡初等嵌入的公理。

关于 ZFC(j) 的模型的考虑最早由 William N. Reinhardt 在他 1967 年的博士论文 [8] 中提出。然而，这个理论很快就被 Kenneth Kunen[6] 发现是不一致的。证明的关键在于使用了选择公理 (AC)，并且至今尚不清楚没有它是否存在不一致性。

本文的背景理论将是 ZFC(j) 而不包括 AC,，我们用 ZF(j). 表示。我们将使用 κ 来表示与 j, 相对应的 *Reinhardt* 基数，即 j 的临界点（或用符号表示为 $\kappa = \operatorname{crit} j$).）。在第 2节中，我们证明了一个关于 j 以及它与"最终超越" j 在正规基数上的函数的关系的结果。

定义 1.1. 给定一个极限序数 δ 和两个函数 $f, g : \delta \to \delta$,，我们说 g 最终占优 f, 并写为 $f \leq^* g$, 当且仅当存在 $\alpha < \delta$ 使得对于所有 $f(\beta) \leq g(\beta)$ 成立。$\beta \geq \alpha$.

Theorem 2.2. *如果 $\delta > \kappa$ 是一个正则基数，使得 $j(\delta) = \delta$,，那么在 j 的值域中不存在函数 $g : \delta \to \delta$ 使得 $j|_\delta \leq^* g$.*

对于任意初等嵌入 $k : V_\delta \to V_\delta$,，其中 δ 是极限序数，我们将考虑作为 k 的“根”的初等嵌入 $l : V_\delta \to V_\delta$（定义 3.1）。关于这一点，在第 3节中，我们证明了以下结果，该结果显示存在一个类似于 V_δ. 中的可延展基数的序数 α。设 $\lambda > \kappa$ 是最小的序数，使得 $j(\lambda) = \lambda$.

Theorem 3.8. *对于所有正则基数 $\delta > \lambda$，使得 $j(\delta) = \delta$, 存在一个 $\alpha < \delta$，使得对每一个 $\beta \in (\alpha, \delta)$, 都存在一个根 k 满足 $j|_{V_\delta}$ 的条件。$k(\alpha) > \beta$.*

在同一节中，我们引入了“(j, δ)-小性”的概念（定义 3.9），并建立了以下内容：

Theorem 3.10. *不存在任何正则基数的 (j, δ)-小集 $\delta > \lambda$.*

Goldberg 表明 Reinhardt 基数的存在意味着存在一个适当的基数类，这些基数是几乎超紧的 [4]。在同一论文中，他证明了如果 η 几乎超紧，则要么 η 要么 η^+ 是正则的。[1] 我们通过在第 4节证明以下结果来稍微改进这一结论：

Theorem 4.10. *如果 $\eta > \lambda$ 是一个几乎超紧基数且不是几乎超紧基数的极限，则它不是正则的。*

因此，在这种情况下，总是 η^+ 是一个正规基数。最后，在最后一节中，我们通过证明存在 (j, δ)-小集合来给出 Kunen 不一致性的另一种证明。AC.

Theorem 5.3 (AC)**.** *存在一个序数 θ, 使得对于每一个奇异的几乎超紧 $\eta > \theta$，满足 $\operatorname{cof}(\eta) = \omega$ 和 $j(\eta) = \eta$, 的条件，都存在一个 (j, η^+)-小集。*

Corollary 5.4 (库纳不一致性)**.** *理论 ZFC(j) 是不一致的。*

2 最终占优函数

在本简短章节中我们仅证明定理 2.2。以下引理是显而易见的。

引理 2.1. *对于任意基数 δ, 其共尾性严格大于 κ, 以及任意俱乐部集合 $C \subset \delta$, 具有递增枚举 $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \operatorname{cof}(\delta) \rangle$,，如果对于所有 $\xi < \kappa$, 都有 $j(\alpha_\xi) = \alpha_\xi$，则 $j(\alpha_\kappa) > \alpha_\kappa$.*

证明. 假设矛盾地存在 $j(\alpha_\kappa) = \alpha_\kappa$. 考虑 $j(\langle \alpha_\xi \mid \xi < \kappa + 1 \rangle) = \langle \beta_\xi \mid \xi < j(\kappa) + 1 \rangle$. 由初等性，$\beta_\xi = j(\alpha_\xi) = \alpha_\xi$, 对于所有 $\xi < \kappa$. 由于 $j(C)$, 的闭包，我们知道 $\beta_\kappa = \sup\{\beta_\xi \mid \xi < \kappa\} = \sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \kappa\} = \alpha_\kappa$. 所以，$j(\alpha_\kappa) = \alpha_\kappa = \beta_\kappa$. 但是，$j(\alpha_\kappa) = \beta_{j(\kappa)} > \beta_\kappa$. □

[1] 后继基数在 ZF 不必是正规的。详情请参见第 4节开头的讨论。

定理 2.2. *如果 $\delta > \kappa$ 是一个正则基数，使得 $j(\delta) = \delta$,，那么在 j 的值域中不存在函数 $g : \delta \to \delta$ 使得 $j|_\delta \leq^* g$.*

证明. 朝着矛盾的方向工作，并设 $j(f) = g$ 为使得 $j|_\delta \leq^* g$. 成立的值。设 $\alpha < \delta$ 为使得对于所有 $\beta \geq \alpha$. 均成立 $j|_\delta(\beta) \leq g(\beta)$ 的值。定义序列 $x = \langle x_\xi \mid \xi < \delta\rangle$ 从 f 和 α 开始，通过设定 $x_0 = \alpha$,，在极限阶段取极限，并在后继阶段取 $x_{\xi+1} = f(\beta)$，其中 $\beta \geq x_\xi$ 是使得 $f(\beta) > \beta$. 成立的最小值。我们需要确保这是明确定义的。δ 的规律性确保了极限阶段的成功。对于后续阶段，我们需要检查是否总能找到一个任意高的 β 在 δ 之下，使得 $f(\beta) > \beta$. 成立。由于 j, 的本原性，我们可以通过验证 g, 是否也满足同样的条件来完成这一点，并且因为 $j|_\delta \leq^* g$,，这可以通过确保 $j|_\delta$ 满足该条件来实现。但 $j|_\delta$ 明显满足该条件：存在任意高的 $\gamma < \delta$, 使得 $j(\gamma) = \gamma$,，且对于任何这样的 γ, 我们有 $j(\gamma+\kappa) = \gamma + j(\kappa) > \gamma + \kappa$.

序列 $\langle x_\xi \mid \xi < \delta\rangle$ 是正常的，因此它必须有无限多个不动点。我们现在考虑 x 和 $j(x) = y = \langle y_\xi \mid \xi < \delta\rangle$.。设 C_x 和 C_y 分别表示 x 和 y, 的不动点集合，并且设 $C_{j|_\delta}$ 表示 $j|_\delta$. 的不动点集合。由于 C_x 和 C_y 是俱乐部，而 $C_{j|_\delta}$ 是一个 $<\kappa$-俱乐部，它们的交集 $C_x \cap C_y \cap C_{j|_\delta}$ 也必须是一个 $<\kappa$-俱乐部。这个交集的闭包是一个俱乐部集，我们将其记作 C,，并令 $\langle c_\xi \mid \xi < \delta\rangle$ 为其递增枚举。

由引理 2.1，我们有 $j(c_\kappa) > c_\kappa$.。我们也有 $c_\kappa = x_{c_\kappa} = y_{c_\kappa}$, 因为 $C \subset C_x, C_y$.。另外，通过将 j 应用于 $x_{c_\kappa} = c_\kappa$,，我们得到 $y_{j(c_\kappa)} = j(c_\kappa)$.。根据 x 的定义和 j, $y_{c_\kappa+1} = g(\beta)$ 的基本性，其中 $\beta \geq y_{c_\kappa}$ 是最小的一个使得 $g(\beta) > \beta$. 成立。最小的那个 β 是 y_{c_κ}, 因为 $g(y_{c_\kappa}) \geq j(y_{c_\kappa}) = j(c_\kappa) > c_\kappa = y_{c_\kappa}$.。我们现在有 $y_{c_\kappa+1} = g(y_{c_\kappa}) \geq j(c_\kappa) = j(x_{c_\kappa}) = y_{j(c_\kappa)}$.。但是，$j(c_\kappa) > c_\kappa + 1$ 意味着 $y_{j(c_\kappa)} > y_{c_\kappa+1}$,，这是一个矛盾。 □

3 可扩展性行为

给定一个非平凡的基本嵌入 $k : V_\delta \to V_\delta$（此处允许 $\delta = \mathrm{OR}$），关键序列 $\langle \kappa_n(k) \mid n \in \omega\rangle$ 的 k 是通过设置 $\kappa_0(k) = \operatorname{crit} k$ 和 $\kappa_{n+1}(k) = k(\kappa_n(k))$. 来递归定义的。此序列的上确界将用 $\lambda(k)$. 表示。请注意，$\lambda(k)$ 是其临界点之上 k 的第一个不动点。我们将通过令 $\kappa_n = \kappa_n(j)$ 来简化符号表示。$\lambda = \lambda(j)$.

对于每一个序数 δ,，令 $\mathcal{E}_\delta$ 表示所有非平凡初等嵌入的集合 $k : V_\delta \to V_\delta$.。证明 $\mathcal{E}_\delta$ 对于所有的 $\delta \geq \lambda$: 都是非空的是一个简单的论证。如果不是这样，取最小的反例 δ_0，并注意到 $j|_{V_{\delta_0}} \in \mathcal{E}_{\delta_0}$.

定义 3.1. 对于极限序数 δ 和 $k, l \in \mathcal{E}_\delta$,，通过设置定义操作 $k[l]$, 的 k 的应用到 l,。$k[l] = \bigcup_{\alpha<\delta} k(l|_{V_\alpha})$.

引理 3.2. 对于 $k,l\in\mathcal{E}_\delta$，其中 δ 是一个极限序数，$k[l](k(a))=k(l(a))$ 对所有 $a\in V_\delta$.

证明. 固定某个 $\alpha<\delta$ 使得 $a\in V_\alpha$. 然后, $k[l](k(a))=k(l|_{V_\alpha})(k(a))=k(l|_{V_\alpha}(a))=k(l(a))$. □

下列引理与 [2, Lemma 1.6] 类似。

引理 3.3. 如果 $k,l\in\mathcal{E}_\delta$ 其中 δ 是一个极限序数，则 $k[l]$ 也在 $\mathcal{E}_\delta$. 中 此外，$\operatorname{crit} k[l]=k(\operatorname{crit} l)$, 并且如果 $\langle\gamma_n\mid n\in\omega\rangle$ 是 l, 的临界序列，则 $\langle k(\gamma_n)\mid n\in\omega\rangle$ 是的临界序列 $k[l]$.

证明. 首先注意，对于任意的 $\alpha_1,\alpha_2<\delta$,，两个函数 $l|_{V_{\alpha_1}}$ 和 $l|_{V_{\alpha_2}}$ 兼容的事实意味着 $k(l|_{V_{\alpha_1}})$ 和 $k(l|_{V_{\alpha_2}})$ 兼容。因此，$k[l]$ 是一个定义域和陪域为 V_δ. 的函数。此外，由于它是注入的 $\subset$ 链的并集，所以它是单射的。

为了证明它是初等的，固定一个公式 $\phi(x)$ 和一个序数 $\alpha<\delta$.。根据 l, 的初等性，我们有

$$\forall x\in V_\alpha(V_\delta\models\phi(x)\iff V_\delta\models\phi(l|_{V_\alpha}(x))).$$

将 k 应用于上述公式得到

$$\forall x\in V_{k(\alpha)}(V_\delta\models\phi(x)\iff V_\delta\models\phi(k(l|_{V_\alpha})(x))).$$

由于 α 是任意的，上面的结果对所有的 x 都必须正确。V_δ.

$\operatorname{crit} k[l]=k(\operatorname{crit} l)$ 成立是由于两个事实：$k[l](k(\operatorname{crit} l))>k(\operatorname{crit} l)$,，它由 $l(\operatorname{crit} l)>\operatorname{crit} l$, 得出，以及 $\forall\alpha<k(\operatorname{crit} l)(k[l](\alpha)=\alpha)$,，它由 $\forall\alpha<\operatorname{crit} l(l(\alpha)=\alpha)$. 得出。对于引理的最终断言：

$$\begin{aligned}k[l]^n(\operatorname{crit} k[l])&=k[l]^n(k(\operatorname{crit} l))=k[l]^{n-1}(k[l](k(\operatorname{crit} l)))\\&=k[l]^{n-1}(k(l(\operatorname{crit} l)))=k(l^n(\operatorname{crit} l)),\end{aligned}$$

通过 n 次应用 Lemma 3.2。 □

从此以后，我们将始终假设 δ 是一个极限序数。

定义 3.4. 对于任何 $k\in\mathcal{E}_\delta$,，我们可以定义两个集合 $I(k)=\{k_n\mid n\geq 1\}$,，其中 $k_1=k$ 和 $k_{n+1}=k_n[k_n]$, 以及 $R(k)=\{l\in\mathcal{E}_\delta\mid l[l]=k\}$. 每当 $l[l]=k$,，我们将称 l 为根的 k 和 k 平方 的 l.

定义 3.5. 对于 $k\in\mathcal{E}_\delta$，通过以下递归定义集合 $A(k)$：设 $A_0=I(k)$ 和 $A_{n+1}=A_n\cup\bigcup_{l\in A_n}R(l)$, 并令 $A(k)=\bigcup_n A_n$.

注意集合 $A(k)$ 是包含 k 并且在取平方和开方运算下闭合的最小集合。

引理 3.6. *如果 $\delta > \kappa$ 是一个极限序数，使得 $j(\delta) = \delta,$，则 $j(A(j|_{V_\delta})) = A(j|_{V_\delta})$.*

证明. 用 j' 表示 $j|_{V_\delta}$ 以简化表示。首先，由于 j, 的初等性，我们有 $j(A(j')) = A(j(j'))$. 然后，注意到 $j' = \bigcup_{\alpha<\delta} j'|_{V_\alpha}$，我们得到

$$j(j') = j\Big(\bigcup_{\alpha<\delta} j'|_{V_\alpha}\Big) = \bigcup_{\alpha<\delta} j(j'|_{V_\alpha}) = \bigcup_{\alpha<\delta} j'(j'|_{V_\alpha}) = j'[j'],$$

因此 $A(j(j')) = A(j'[j'])$. 最后，根据定义，我们建立 $A(j'[j']) = A(j') : I(j'[j']) \subset I(j')$ 蕴含 $A(j'[j']) \subset A(j')$。对于反向包含，注意到 $j' \in R(j'[j']) \subset A(j'[j'])$，并且因为 $A(j')$ 是包含 j' 并在取平方和根下封闭的最小集合，所以必须有 $A(j') \subset A(j'[j'])$. 将所有内容综合起来，我们得到

$$j(A(j')) = A(j(j')) = A(j'[j']) = A(j'). \qquad \square$$

定理 3.7. *对于所有正则基数 $\delta > \lambda$，使得 $j(\delta) = \delta$, 存在一个 $\alpha < \delta$，使得对于每一个 $\beta \in (\alpha, \delta)$, 都存在一个 $k \in A(j|_{V_\delta})$ 满足 $k(\alpha) > \beta$.*

证明. 令 A 表示 $A(j|_{V_\delta})$ 以简化起见。为了得出矛盾，固定任意这样的 δ 并假设不存在这样的 $\alpha < \delta$.。定义 $f : \delta \to \mathrm{OR}$ 为设置 $f(\xi) = \sup\{k(\xi) \mid k \in A\}$.。根据假设，对于所有 $\xi < \delta$. 有 $f(\xi) < \delta$,。由于引理 3.6 $j(A) = A$, 我们必有 $j(f) = f$.。但显然，对于所有 $k \in A$, 有 $f \geq^* k|_\delta$，特别是 $f \geq^* j|_\delta$,，这与定理 2.2矛盾。 $\square$

因此，α 在 V_δ. 内的行为与可延展基数有些相似。这种行为在 Goldberg[4]、Asperó[1] 和 Mohammd 的情况下已经以更全局的形式在仅 ZF 下进行了考虑。[7]

我们可以对上述基本嵌入 k 施加更多的限制，同时仍然得到相同的结果：

定理 3.8. *对于所有正则基数 $\delta > \lambda$，使得 $j(\delta) = \delta$, 存在一个 $\alpha < \delta$，使得对于每一个 $\beta \in (\alpha, \delta)$, 都存在一个 $k \in R(j|_{V_\delta})$ 满足 $k(\alpha) > \beta$.*

证明. 首先注意到 $R(j|_{V_\delta})$ 不为空，因为 $j(R(j|_{V_\delta})) = R(j(j|_{V_\delta})) = R(j|_{V_\delta}[j|_{V_\delta}])$ 不为空，这是由 $j|_{V_\delta}$. 所证明的。这次定义 $f : \delta \to \mathrm{OR}$，设定为 $f(\xi) = \sup\{k(\xi) \mid k \in R(j|_{V_\delta})\}$.。同样地，如果定理对 δ, 失效，则对于所有 $\xi < \delta$. 有 $f(\xi) < \delta$。显然，对于所有 $k \in R(j|_{V_\delta})$. 有 $f \geq^* k|_\delta$。由基本性，对于所有 $k \in j(R(j|_{V_\delta})) = R(j(j|_{V_\delta})) = R(j|_{V_\delta}[j|_{V_\delta}])$. 有 $j(f) \geq^* k|_\delta$。特别是，$j(f) \geq^* j|_\delta$, 矛盾了定理 2.2。 $\square$

上述定理可以证明对于任何满足 $j|_{V_\delta} \in j(X)$,的集合 $X \subset \mathcal{E}_\delta$, 成立。$R(j|_{V_\delta})$.

定义 3.9. 给定一个正则基数 $\delta > \lambda$，使得 $j(\delta) = \delta$ 和一个集合 $X \subset \mathcal{E}_\delta$,，我们说 X 是 (j, δ)-小当且仅当 $j|_{V_\delta} \in j(X)$ 和 $\sup\{k(\xi) \mid k \in X\} < \delta$, 对所有 $\xi < \delta$.

因此，我们有如下内容：

定理 3.10. *不存在任何常正则基数的 (j, δ)-小集 $\delta > \lambda$.* □

我们将在最后一节证明 AC 意味着对于无界多个 δ, 存在 (j, δ)-小集，这将给我们 Kunen 不一致性。

4 正规基数

在选择公理的背景下，每个后继基数是正则的事实是一个基本的集合论事实。没有 AC,，无法保证后继基数是正则的。事实上，Moti Gitik 已经证明与 ZF 一致存在没有正则不可数基数 [3]。

在 ZF(j), 中，我们已经知道 κ_n 对所有 $n \in \omega$. 都是正则的。David Asperó 询问是否存在超过 λ, 的正则基数，Goldberg 在 [4] 中对此问题给出了肯定的回答。我们需要对 Goldberg 的结果进行更详细的说明，因此让我们从回忆他的论文中所需的内容开始。

定义 4.1 ([4])**.** 一个基数 η 被称为对于 $\gamma < \eta < \nu$ 和 $x \in V_\nu$ 的 (γ, ν, x)-*几乎超紧致*当且仅当存在 $\bar{\nu} < \eta$ 和 $\bar{x} \in V_{\bar{\nu}}$ 使得有一个初等嵌入 $k : V_{\bar{\nu}} \to V_\nu$ 使得 $k(\gamma) = \gamma$ 和 $k(\bar{x}) = x$. 我们说 η 是 $< \mu$-*几乎超紧致*当且仅当对于所有的 $\gamma < \eta < \nu < \mu$ 和所有 $x \in V_\nu$,， η 是 (γ, ν, x)-几乎超紧的，我们简单地说 η 几乎超紧当且仅当它对所有的 $<\mu$ 都是几乎超紧的 $\mu > \eta$.

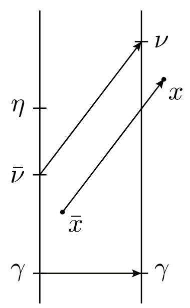

图 1: 几乎超级紧致性

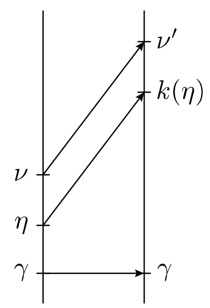

图 2: 几乎可扩展性

定义 4.2 ([4])**.** 一个基数 η 被称为 (γ, ν)-*几乎可扩展*对于 $\gamma < \eta < \nu$ 当且仅当存在一个初等等价嵌入 $k : V_\nu \to V_{\nu'}$ 使得 $k(\gamma) = \gamma$ 和 $k(\eta) > \nu$. 我们说 η 是

$<\mu$-几乎可扩展当且仅当对于所有的 $\gamma < \eta < \nu < \mu$,，$\eta$ 都是 (γ, ν)-几乎可延拓的，而对于 η 我们简单地说它是几乎可扩展当且仅当它是对于所有 $<\mu$-几乎可延拓的 $\mu > \eta$.

请注意，一个基数可以通过是几乎超紧基数的极限而成为几乎超紧基数，同样地，对于几乎可延展基数也是如此。因此，几乎超紧基数和几乎可延展基数这两类基数都是封闭的。

命题 4.3 ([4]). *如果基数 η 是 $<\mu$-几乎可延展的，其中 μ 是一个极限序数，那么它也是 $<\mu$-几乎是超紧的。* □

命题 4.4 ([4]). *如果存在一个 Reinhardt 基数，则存在一个几乎可延展基数的俱乐部真类。* □

Goldberg 证明了如果 η 几乎超紧致，则大于 η 的每个后继基数的共尾度至少为 η [4, Corollary 2.18]。这反过来意味着以下命题，该命题与命题 4.3和 4.4一起给出了正则基数的真类。ZF(j).

命题 4.5 ([4]). *如果 η 是几乎超紧的，则要么 η 要么 η^+ 是一个正规基数。* □

让我们称一个不是几乎超紧基数极限的几乎超紧基数为*几乎超紧的后继者*。我们将证明如果 η 是大于 λ, 的一个后继几乎超紧基数，那么它不能是正规的。因此，根据 Goldberg 的结果，对于所有作为后继几乎超紧基数的 $\eta > \lambda$，我们一定有 η^+ 是正规的。首先我们需要一些中间结果。以下引理很容易。

引理 4.6. *如果 η_0 是 $<\eta_1$-几乎超紧的，并且 η_1 几乎超紧，则 η_0 也几乎是超紧的。*

证明. 固定 $\gamma < \eta_0$, 某些 $\nu \geq \eta_1$, 和 $x \in V_\nu$.，令 γ' 编码成对 $\langle \gamma, \eta_0 \rangle$ 在 $\mathrm{OR} \times \mathrm{OR}$. 的典范良序中。注意 $\gamma' < \eta_0 < \eta_1$, 因此，由 η_1, 几乎超紧性，我们可以找到一个初等嵌入 $k : V_{\bar{\nu}+\omega} \to V_{\nu+\omega}$ 使得 $\bar{\nu} + \omega < \eta_1$，$k(\gamma') = \gamma'$，$k(\langle \bar{\gamma}, \bar{\eta}_0 \rangle) = \langle \gamma, \eta_0 \rangle$, 和 $k(\bar{x}) = x$, 对某些 $\langle \bar{\gamma}, \bar{\eta}_0 \rangle, \bar{x} \in V_{\bar{\nu}}$.。由于 $\mathrm{OR} \times \mathrm{OR}$ 的典范良序是 Δ_0,，k 的初等性以及事实 $k(\gamma') = \gamma'$ 意味着 $\langle \bar{\gamma}, \bar{\eta}_0 \rangle = \langle \gamma, \eta_0 \rangle$.。因此，两者 γ 和 η_0 都被 k. 固定。由于 $\eta_0 < \eta_1 \leq \nu$,，我们还必须有 $\eta_0 < \bar{\nu}$ 由初等性得出。

我们已经知道 $\bar{\nu} < \eta_1$,，因此现在可以使用 η_0 的 $<\eta_1$-几乎超紧性来获得另一个初等嵌入 $l : V_{\bar{\bar{\nu}}} \to V_{\bar{\nu}}$，使得 $\bar{\bar{\nu}} < \eta_0$, $l(\gamma) = \gamma$, 和 $l(\bar{\bar{x}}) = \bar{x}$.。最后，复合初等嵌入 $k \circ l : V_{\bar{\bar{\nu}}} \to V_\nu$ 固定了 γ，并在其范围内具有 x，因此是我们要证明的对象。 □

定义 3.1和引理 3.3也适用于 $\delta = \mathrm{OR}$,，即对于初等嵌入 $j : V \to V$.。因此，令 $j_n, n < \omega$, 如定义 3.4中从 j 定义的那样。

引理 4.7 ([9, Lemma 1.3])**.** *对于所有的 α, 存在 n 使得 $j_n(\alpha) = \alpha$.*

证明. 假设情况并非如此,并将α固定为最小的反例。设$\gamma > \alpha$是由j,固定的极限序数,并用j'.表示$j|_{V_\gamma}$ 首先,考虑序列$j(\langle j_1', j_2', j_3' \cdots \rangle) = \langle j(j_1'), j(j_2'), j(j_3') \cdots \rangle$. 我们知道$j(j_1') = j_2'$按定义,因此,由于$j$,的元素性,我们必须有$j(j_2') = j_2'[j_2'] = j_3', j(j_3') = j_3'[j_3'] = j_4', \ldots$ 等等。因此，对于所有 $j(j_n') = j_{n+1}' n \geq 1$.

现在，对于每个 $n \geq 1$,，令 $A_n \subset \alpha$ 为在 α 中由 j_n'. 固定的序数集合。由于 α, 的最小性，必须有 $\alpha = \bigcup_n A_n$.。现在，$j(A_n)$ 是在 $j(\alpha)$ 中由 $j(j_n') = j_{n+1}'$, 和 $j(\alpha) = j(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n j(A_n)$. 固定的序数集合。由于我们的假设，$\alpha \in j(\alpha)$,，必须存在某个 m 使得 $\alpha \in j(A_m)$.。但这意味着 α 是 j_{m+1}', 的不动点，这与选择矛盾。α. □

利用上述引理并将有限序数序列编码为单一序数，我们可以始终找到某个 n，使得 j_n 固定任何期望的有限序数集合。给定一个初等嵌入 $k : V_\delta \to V_\delta$ 和 $\gamma < \delta$,，令 $R^\gamma(k) = \{l \in R(k) \mid l(\gamma) = \gamma\}$.

定理 4.8. *设 $\delta > \lambda$ 是一个正则基数，设 $\gamma < \delta$, 和设 n 使得 j_n 固定 γ 和 δ.。则存在 $\alpha < \delta$，使得对所有 $\beta > \alpha$ 存在 $k \in R^\gamma(j_n|_{V_\delta})$，使得 $k(\alpha) > \beta$.*

证明. 类似于定理 3.8的证明，使用 j_n 代替 j. □

推论 4.9. *对于任何正则极限基数 $\delta > \lambda, V_\delta$ ，存在一个几乎可扩展基数的俱乐部类。*

证明. 对于每个 $\gamma < \delta$,，令 $\alpha_\gamma < \delta$ 为由定理 4.8给出的最小序数 α。定义 $F : \delta \to \delta$ 为设置 $F(\xi) = \sup\{\alpha_\gamma \mid \gamma < \xi\}$.。此定义由 δ. 的正则性保证。注意，F 是一个递增且连续的函数，因此 F 的不动点集形成一个俱乐部 $C \subset \delta$.。如果 $D \subset \delta$ 是低于 δ, 所有基数的俱乐部，那么显然 $C \cap D$ 的任何成员都是几乎可扩展的基数。V_δ. □

我们现在准备证明本节的主要定理。

定理 4.10. *如果 $\eta > \lambda$ 是一个后继几乎超紧基数，则它不是正规的。*

证明. 令 $\alpha < \eta$ 为这样一个值, 在开区间 (α, η) 内没有几乎超紧基数, 并假设矛盾地认为 η 是正规的。容易看出任何几乎超紧基数都是极限基数, 因此推论 4.9 适用于 η,，我们可以固定一个在 V_η. 中几乎是可扩展的基数 $\beta \in (\alpha, \eta)$。这意味着 β 是 $<\eta$-几乎可扩展的, 从而由命题 4.3可知它是 $<\eta$-几乎超紧的。现在，由命题 4.6可知 β 必须几乎是超紧的，这是一个矛盾。 □

根据 Goldberg 的结果，命题 4.5，我们得到以下结论:

推论 4.11. *如果 $\eta > \lambda$ 是一个后继几乎超紧基数，则 η^+ 是正则的。*

5 小集-under AC

在本节中，我们将给出 Kunen 不一致性的另一种证明。特别地，我们将证明 AC 蕴含小集的存在性，这与定理 3.10相矛盾。该证明基于 Solovay 结果的证明，在 [5, Theorem 20.8] 中给出，表明奇异基数假设在强紧基数之上成立。

引理 5.1 (AC)**.** *存在一个序数 θ，使得对于每一个奇异的几乎超紧 $\eta > \theta$,，都存在一个几乎超紧 $\eta' < \eta$ 和一个集合 $\{M_\alpha \subset \eta^+ \mid \alpha < \eta^+\}$，满足 $|M_\alpha| < \eta'$ 且*

$$[\eta^+]^\omega = \bigcup_{\alpha<\eta^+} [M_\alpha]^\omega.$$

证明. 假设否则，并令 $\langle \eta_\xi \mid \xi \in \mathrm{OR} \rangle$ 为在 λ 之上那些失败的奇异几乎超紧基数的递增枚举。由命题 4.5，对于每一个 ξ.，η_ξ^+ 是正则的。注意

$$\eta_\kappa < \eta_{\kappa+1} < \eta_{\kappa+1}^+ < j(\eta_\kappa) = \eta_{j(\kappa)} < \sup j"\eta_{\kappa+1}^+ < j(\eta_{\kappa+1}^+).$$

设 $\eta' = \eta_\kappa, \eta = \eta_{\kappa+1}$, 和 $\sigma = \sup j"\eta_{\kappa+1}^+$. 定义了在 η^+ 上的 κ-完备超滤子 D，使得对于所有 $X \subset \eta^+$.，有 $X \in D \iff \sigma \in j(X)$,。由于 $\mathrm{cof}(\sigma) = \eta^+ < j(\eta')$,，集合 $E = \{\alpha < \eta^+ \mid \mathrm{cof}(\alpha) < \eta'\}$ 属于 D.

使用 AC, 对每个 $\alpha \in E$, 固定一个 $A_\alpha \subset \alpha$ 以使它与 $|A_\alpha| < \eta'$. 同尾 如果 $\alpha < \eta^+$ 不在 E, 中 则设置 $A_\alpha = \emptyset$. 设 $\langle B_\alpha \mid \alpha < j(\eta^+) \rangle = j(\langle A_\alpha \mid \alpha < \eta^+ \rangle)$. 由于 B_σ 在 $\sigma = \sup j"\eta^+$, 中是同尾的 对于每一个 $\mu < \eta^+$, 都存在 $\mu' \in (\mu, \eta^+)$ 使得 $[j(\mu), j(\mu')) \cap B_\sigma \neq \emptyset$. 定义序列 $\langle \mu_\zeta \mid \zeta < \eta^+ \rangle$ 在 η^+ 中递归地通过设置 $\mu_0 = 0$, 在极限阶段取极限，在后继阶段令 $\mu_{\zeta+1} < \eta^+$ 如此使得 $[j(\mu_\zeta), j(\mu_{\zeta+1})) \cap B_\sigma \neq \emptyset$. 对于 $\zeta < \eta^+$, 设置 $I_\zeta = [\mu_\zeta, \mu_{\zeta+1})$. 对每个 $\alpha < \eta^+$, 定义

$$M_\alpha = \{\zeta < \eta^+ \mid I_\zeta \cap A_\alpha \neq \emptyset\}.$$

现在，固定任意的 $\zeta < \eta^+$. 由构造可知 $j(I_\zeta) = [j(\mu_\zeta), j(\mu_{\zeta+1}))$ 与 B_σ. 相交 因此，所有这样的 $\alpha < \eta^+$ 集合使得 $\zeta \in M_\alpha$ 属于 D.

我们将证明 $\{M_\alpha \mid \alpha < \eta^+\}$ 和 η' 是该引理对 η, 结论的证据，从而导致矛盾。首先，对于每个 α, $|M_\alpha| \leq |A_\alpha| < \delta$ ，由于 I_ζ 互相不相交。接下来，固定 $x \in [\eta^+]^\omega$. 对每个 $\zeta \in x$,，使得 $\zeta \in M_\alpha$ 在 D. 中的 α 集合 因此，由 $D, x \subset M_\alpha$ 的 κ 完备性可知，对于某个 α. 从而，$x \in [M_\alpha]^\omega$, 成立，我们完成了证明。 □

引理 5.2 (AC)**.** *存在一个序数 θ，使得对于每一个具有可数共尾性的奇异几乎超紧的 $\eta > \theta$，我们有 $|V_{\eta+1}| = \eta^+$.*

证明. 固定 θ 如前一引理所示。固定 $\eta > \theta$,，并令 $\eta' < \eta$ 和 $\{M_\alpha \mid \alpha < \eta^+\}$ 再

次如前一引理所示。注意 $|V_\eta| = \eta$. 我们现在有

$$
\begin{aligned}
|V_{\eta+1}| = 2^{|V_\eta|} = 2^\eta = \eta^\omega \leq (\eta^+)^\omega = |[\eta^+]^\omega| = |\bigcup_{\alpha<\eta^+} [M_\alpha]^\omega| \\
\leq \sum_{\alpha<\eta^+} |[M_\alpha]^\omega| = \eta^+ \cdot \sup_{\alpha<\eta^+} |[M_\alpha]^\omega| \leq \eta^+ \cdot \eta = \eta^+,
\end{aligned}
$$

其中最后一个不等式来自于 η' 是一个强限制，且对于所有 $|M_\alpha| < \eta'$ 成立 $\alpha < \eta^+$. □

定理 5.3 (AC)**.** *存在一个序数 θ，对于每一个奇异的几乎超紧 $\eta > \theta$，使得 $\mathrm{cof}(\eta) = \omega$ 和 $j(\eta) = \eta$, 存在一个 (j, η^+)-小集。*

证明. 固定 θ 如前一个引理所示，并令 $\eta > \theta$ 为任意奇异几乎超紧的数，使得 $\mathrm{cof}(\eta) = \omega$ 和 $j(\eta) = \eta$.。根据前一个引理，我们可以固定一个满射 $b : \eta^+ \to \mathcal{E}_\eta \subset V_{\eta+1}$.。令 $\beta < \eta^+$ 满足 $j|_{V_\eta} \in \mathrm{range}\, j(b|_\beta)$.。令 $X \subset \mathcal{E}_{\eta^+}$ 包含所有这样的 k, 使得 $k|_{V_\eta} \in \mathrm{range}\, b|_\beta$.。我们将证明 X 是 (j, η^+)-小的。首先，由于 $j|_{V_\eta} \in \mathrm{range}\, j(b|_\beta)$, 我们有 $j|_{V_{\eta^+}} \in j(X)$. 接下来，我们需要证明 $\sup\{k(\xi) \mid k \in X\} < \eta^+$, 对所有 $\xi < \eta^+$. 成立 注意到，对于 $k, l \in \mathcal{E}_{\eta^+}$, $k|_{V_\eta} = l|_{V_\eta}$ 意味着 $k|_{V_{\eta+1}} = l|_{V_{\eta+1}}$. 这是因为 $k(A) = \bigcup_{\alpha<\eta} k(A \cap V_\alpha)$, 对于所有 $A \subset V_\eta$ 和所有 $k \in \mathcal{E}_{\eta^+}$. 同样地，$k|_{V_{\eta+1}} = l|_{V_{\eta+1}}$ 意味着 $k|_{\eta^+} = l|_{\eta^+}$, 因为每个 $\alpha \in (\eta, \eta^+)$ 都对应某个良序的 η. 因此，对于每个 $\xi < \eta^+$,

$$
|\{k(\xi) \mid k \in X\}| \leq |\{k|_{\eta^+} \mid k \in X\}| \leq |\{k|_{V_\eta} \mid k \in X\}| \leq |(b|_\beta)| < \eta^+. \qquad \square
$$

Kunen 不一致性现在作为上述定理和定理 3.10的一个推论得出。

推论 5.4 (库纳不一致性)**.** *理论 ZFC(j) 是不一致的。*

References

[1] David Asperó. *A short note on very large large cardinals (without choice)*. URL: `https://archive.uea.ac.uk/~bfe12ncu/asnovslcwc.pdf`.

[2] Patrick Dehornoy. “Elementary Embeddings and Algebra”. *Handbook of Set Theory*. Ed. by Matthew Foreman and Akihiro Kanamori. Springer Netherlands, 2009.

[3] Moti Gitik. “All uncountable cardinals can be singular”. *Israel Journal of Mathematics* 35.1-2 (1980), pp. 61–88.

[4] Gabriel Goldberg. “Measurable cardinals and choiceless axioms”. *Annals of Pure and Applied Logic* 175.1, Part B (2024), p. 103323.

[5] Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Springer, 2003.

[6] Kenneth Kunen. "Elementary embeddings and infinitary combinatorics". *The Journal of Symbolic Logic* 36.3 (1971), pp. 407–413.

[7] Marwan Salam Mohammd. *Berkeley cardinals and Vopěnka's Principle*. 2024. arXiv: `2404.10455 [math.LO]`.

[8] William Reinhardt. "Topics in the Metamathematics of Set Theory". PhD thesis. University of California, Berkeley, 1967.

[9] Farmer Schlutzenberg. *A weak reflection of Reinhardt by super Reinhardt cardinals*. 2020. arXiv: `2005.11111 [math.LO]`.