伊辛模型在三维分形晶格上的相变

Jozef GENZOR,[1, 2, *] Roman KRČMÁR,[1] Hiroshi UEDA,[3, 4] Denis KOCHAN,[1, 5] Andrej GENDIAR,[1] and Tomotoshi NISHINO[2]

[1] *Institute of Physics, Slovak Academy of Sciences, Dúbravská cesta 9, 84511 Bratislava, Slovakia*
[2] *Department of Physics, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe 657-8501, Japan*
[3] *Center for Quantum Information and Quantum Biology, The University of Osaka, 1-2 Machikaneyama, Toyonaka 560-0043, Japan*
[4] *RIKEN Center for Computational Science (R-CCS), Kobe, Hyogo 650-0047, Japan*
[5] *Department of Physics and Center for Quantum Frontiers of Research and Technology (QFort), National Cheng Kung University, Tainan 70101, Taiwan*

(10Dated: 2025 年 6 月 28 日)

经典伊辛模型在具有豪斯多夫维度 $d_H = \ln 32/\ln 4 = 2.5$ 的三维分形晶格上的临界行为使用高阶张量重正化群 (HOTRG) 方法进行了研究。我们确定了临界温度 $T_c \approx 2.65231$ 以及磁化 $\beta \approx 0.059$ 和场响应 $\delta \approx 35$ 的临界指数。与之前研究的具有 $d_H \approx 1.792$ 的二维分形不同，这种三维分形的比热在 T_c 处表现出发散奇异性。结果与其他规则晶格和分形结构的结果进行了比较，以阐明维度在临界现象中的作用。

I. 介绍

维度是相变和临界现象理论中的基石 [1, 2]。对于具有平移不变性的规则格子上的系统，空间维度 d 对转变的普适类起着关键性的影响。然而，自然界中以及人工构造中的许多系统表现出分形几何 [3]。这些结构的特点是在一定范围内的自相似性、缺乏平移不变性，以及往往具有非整数豪斯多夫维度 (d_H)。这样的特性对传统意义上的临界行为及其所遵循的维度概念提出了深刻的问题。对于分形系统，除了 d_H 之外，还可以定义其他维度量度，如谱维数 d_s [4] 、分支阶数 R [5] ，或从边界缩放导出的维度（例如，对于大小为 L 的聚类中的 M 边界点，其维度为 $M \sim L^{d-1}$）。一个中心的未解决问题是这些当中是否有任何一个作为决定临界指数和超标度关系 [6, 7] 有效性的真实维度。

Sierpiński 垫片是有限分支分形的典型例子。在二维 Sierpiński 垫片 ($d_H = \ln 3/\ln 2 \approx 1.585$) 上的经典 Ising 模型及其高维推广中，尽管 $d_H > 1$，但在有限温度 [8, 9] 下著名地没有相变。这通常与它的有限分支阶数相关联，这意味着在大尺度上具有准一维特征。相比之下，无限分支的分形如 Sierpiński 地毯可以维持相变 [10]。张量网络 (TN) 算法的出现，特别是高阶张量重正化群 (HOTRG)[11]，为通过有效管理其递归结构来处理自相似分形晶格上的相变提供了强大的数值工具。我们的团队利用 HOTRG 探索了各种二维分形上的经典伊辛模型，包括一个 4x4 基底分形 ($d_H \approx 1.792$)[12, 13]、一个 6x6 基底分形 ($d_H \approx 1.934$)[14]、一个可调分形 J_1-J_2，该分形连接了这个 4x4 分形到一个规则的平方晶格 [15]，以及谢尔宾斯基地毯 ($d_H \approx 1.893$)[16]。我们在二维谢尔宾斯基地毯分形上的量子相变也进行了研究 [17]。

本文扩展了我们之前的调查，涉及三维（3D）分形晶格。该晶格是通过递归扩展过程构建的，在每一步 n，系统的线性尺寸增加四倍。一个基本单元由 32 个较小的、相同的单元组成，而完整的 $4\times4\times4$ 正立方体排列的角落和边缘上缺少 32 个单元（参见图 1）。因此，点的数量按 $N_n = 32^n$ 的比例缩放，得出 Hausdorff 维度 $d_H = \ln 32/\ln 4 = 2.5$。相比之下，从一个簇向外的键数量在每一步中增加四倍。这意味着边界缩放导出的一个维度 $M \sim L^{d-1}$，为 $d = 2$。这种将 $d_H = 2.5$ 与有效边界维度 $d = 2$ 并置的做法激发了一个核心问题。我们之前关于具有 $d_H \approx 1.792$（以及 $d = 1.5$）的二维分形的工作发现比热容 [12] 没有发散。鉴于正则二维方形晶格（$d_H = 2, d = 2$）表现出对数比热奇点 [18]，询问当前三维分形（$d_H = 2.5, d = 2$）是否会显示比热发散是相关的。

* jozef.genzor@gmail.com

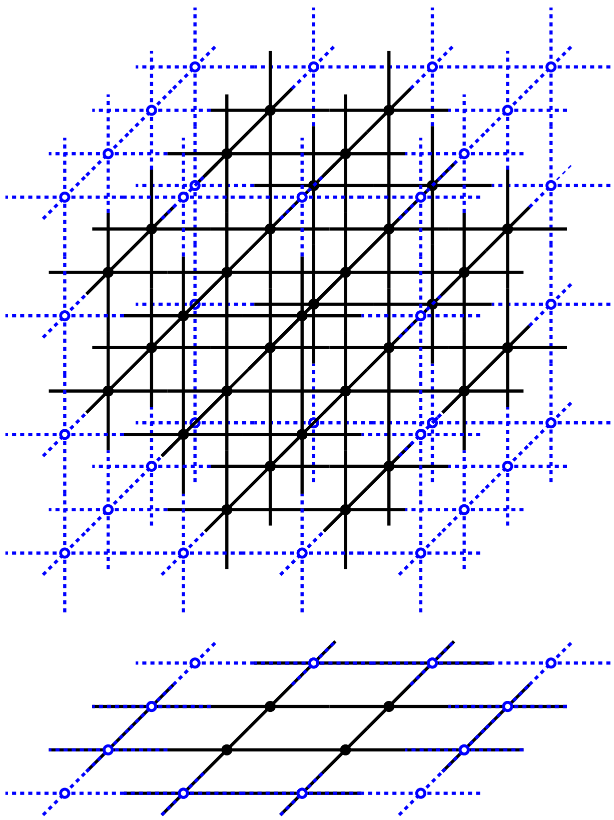


图 1.（彩色在线）上部：分形晶格的组成。第一次迭代步骤中包含 $N_{n=1} = 32$ 个顶点的基本聚集体。在系统扩展的每一步 n 中，系统的线性尺寸增加 4 倍，在这一步骤中只有 32 个单位（实心圆）相连（实线），而位于 $4 \times 4 \times 4$ 立方体边缘的其余 32 个单位（空心圆、虚线）缺失。下部：从基本聚集体六个侧面之一进行投影。

本研究的主要目的是使用 HOTRG 方法调查经典伊辛模型在这种新型三维分形晶格上的相变。我们旨在确定其临界温度 T_c 以及临界指数 β（与自发磁化相关）和 δ（表征临界等温线）。特别关注比热的性质。通过将我们的发现与规则晶格和其他分形的已知结果进行比较，我们旨在进一步阐明不同维度特性与非均匀系统中的临界现象之间的复杂关系。

论文结构如下：第 II节详细介绍了模型及其张量网络表示。我们的数值结果在第 III节中呈现并进行了分析。最后，第 IV节提供了总结、讨论和结论性评论。

II. 模型表示

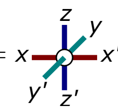
张量网络表示可以应用于任何具有局部（即短程）相互作用的经典统计系统。伊辛模型的哈密顿量定义为

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \,, \tag{1}$$

其中 σ 取值为 $+1$ 或 -1，$J > 0$ 表示铁磁耦合，h 是施加在每个自旋上的恒定外部磁场。为了简化进一步的解释，让我们考虑没有外部磁场的情况，即设置 $h = 0$。

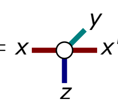
伊辛模型定义在三维分形晶格上的配分函数可以通过由五种局部张量表示的张量网络状态来表达，这些局部张量分别用 T,X,Y,Z 和 Q 表示，

$$T_{x_i x_i' y_i y_i' z_i z_i'} =$$



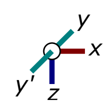
$$= \sum_\xi W_{\xi x_i} W_{\xi x_i'} W_{\xi y_i} W_{\xi y_i'} W_{\xi z_i} W_{\xi z_i'} \,, \tag{2}$$

$$X_{x_i x_i' y_i z_i} =$$



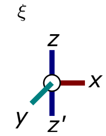
$$= \sum_\xi W_{\xi x_i} W_{\xi x_i'} W_{\xi y_i} W_{\xi z_i} \,, \tag{3}$$

$$Y_{y_i y_i' x_i z_i} =$$



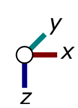
$$= \sum_\xi W_{\xi y_i} W_{\xi y_i'} W_{\xi x_i} W_{\xi z_i} \,, \tag{4}$$

$$Z_{z_i z_i' y_i x_i} =$$



$$= \sum_\xi W_{\xi z_i} W_{\xi z_i'} W_{\xi y_i} W_{\xi x_i} \,, \tag{5}$$

$$Q_{x_i y_i z_i} =$$



$$= \sum_\xi W_{\xi x_i} W_{\xi y_i} W_{\xi z_i} \,, \tag{6}$$

其中 W 是一个由键权重因子化决定的 2×2 矩阵。虽然选择 W 在某种程度上是任意的，但在这里我们选择了不对称分解

$$W = \begin{pmatrix} \sqrt{\cosh 1/T} & \sqrt{\sinh 1/T} \\ \sqrt{\cosh 1/T} & -\sqrt{\sinh 1/T} \end{pmatrix} , \tag{7}$$

其中 T 是温度。请注意，当两个局部张量通过非物理（辅助）指标 x 进行收缩时，边权重 $\mathcal{W}_{\rm B}(\sigma_i, \sigma_j) = \exp(\sigma_i \sigma_j / T)$ 正确地重新表示为

$$\mathcal{W}_{\rm B}(\sigma_i, \sigma_j) = \sum_{x=0}^{1} W_{\xi_i x} W_{\xi_j x} \,, \tag{8}$$

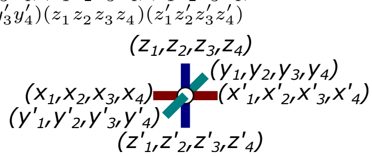
其中第一个矩阵指标 $\xi_i = (1-\sigma_i)/2$ 的取值分别为 0 和 1 当 $\sigma_i = 1$ 和 $\sigma_i = -1$ 时。为了在以下张量网络图中清晰区分，我们使用不同的颜色来表示 x、y 和 z 方向。

一种粗粒化重正化程序被用于计算配分函数。我们从零开始计迭代步骤；因此，我们将等式 (2)–(6) 中的初始张量表示为 $T^{(n=0)} = T$,$X^{(n=0)} = X$,$Y^{(n=0)} = Y$,$Z^{(n=0)} = Z$ 和 $Q^{(n=0)} = Q$。在每次迭代步骤 n 中，新的张量 $T^{(n+1)}$,$X^{(n+1)}$,$Y^{(n+1)}$,$Z^{(n+1)}$ 和 $Q^{(n+1)}$ 都是从前一次迭代的张量 $T^{(n)}$,$X^{(n)}$,$Y^{(n)}$,$Z^{(n)}$ 和 $Q^{(n)}$ 创建的。实际上，这是通过几个步骤实现的。首先，我们通过将八个张量 $T^{(n)}$ 缩并为一个 $2\times2\times2$ 立方体来构造“核心”张量 $S^{(n)}$。核心张量 $S^{(n)}$ 可以在新张量 $T^{(n+1)}$、$X^{(n+1)}$、$Y^{(n+1)}$、$Z^{(n+1)}$ 和 $Q^{(n+1)}$ 的中心找到。根据构建的张量类型，将带有两个复合指标（$L^{(n)}_{[X]}$、$L^{(n)}_{[Y]}$ 和 $L^{(n)}_{[Z]}$）的不同腿或带有单一复合指标（$C^{(n)}_{[X]}$、$C^{(n)}_{[Y]}$ 和 $C^{(n)}_{[Z]}$）的尖刺连接到“核心”张量对应的侧面上。通过重复此过程，我们可以构建所需的任意大小的晶格结构。我们现在将详细解释这一构造过程。

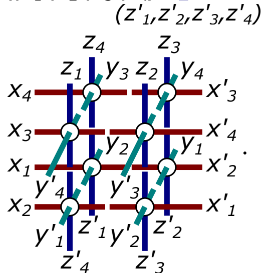
“核心”张量 $S^{(n)}$ 是通过收缩八个张量 $T^{(n)}$ 的副本构建的

$$S^{(n)}_{(x_1x_2x_3x_4)(x'_1x'_2x'_3x'_4)(y_1y_2y_3y_4)(y'_1y'_2y'_3y'_4)(z_1z_2z_3z_4)(z'_1z'_2z'_3z'_4)}$$

=



=



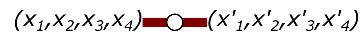
. (9)

这是通过对所有三个方向执行三步 HOTRG 扩展步骤实现的，类似于规则 3D 晶格的情况。我们使用粗线表示张量 $S^{(n)}$。

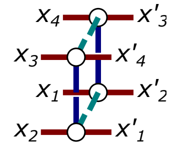
腿张量 $L^{(n)}_{[X]}$ 是由四个副本的张量 $X^{(n)}$ 构成，$L^{(n)}_{[Y]}$ 由四个副本的 $Y^{(n)}$ 构成，而 $L^{(n)}_{[Z]}$ 则由四个副本的 $Z^{(n)}$ 如下构成

$$L^{(n)}_{[X](x_1x_2x_3x_4)(x'_1x'_2x'_3x'_4)}$$

=



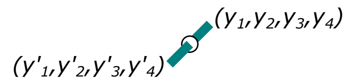
=



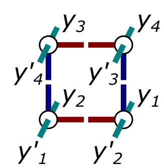
, (10)

$$L^{(n)}_{[Y](y_1y_2y_3y_4)(y'_1y'_2y'_3y'_4)}$$

=



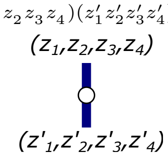
=



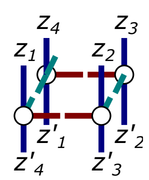
, (11)

$$L^{(n)}_{[Z](z_1z_2z_3z_4)(z'_1z'_2z'_3z'_4)}$$

=



=

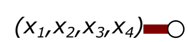


. (12)

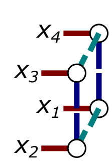
尖峰张量 $C^{(n)}_{[X]}$、$C^{(n)}_{[Y]}$ 和 $C^{(n)}_{[Z]}$ 都是通过将张量 $Q^{(n)}$ 的四个副本相应地旋转和排列构建而成的

$$C^{(n)}_{[X](x_1x_2x_3x_4)}$$

=



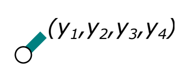
=

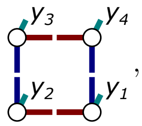


, (13)

$$C^{(n)}_{[Y](y_1y_2y_3y_4)}$$

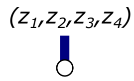
=

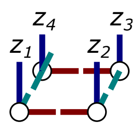


$=$ 

, (14)

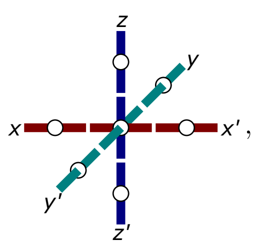
$C^{(n)}_{[Z](z_1 z_2 z_3 z_4)}$

$=$ 

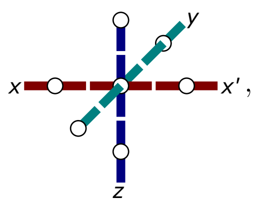
$=$ 

. (15)

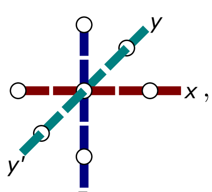
所有辅助对象准备完毕（中心张量、腿和尖刺），我们现在可以创建新的张量 $T^{(n+1)}$,$X^{(n+1)}$,$Y^{(n+1)}$,$Z^{(n+1)}$ 和 $Q^{(n+1)}$ 以进行下一步迭代步骤 $n+1$。局部张量更新如下

$T^{(n+1)}_{xx'yy'zz'} =$ 

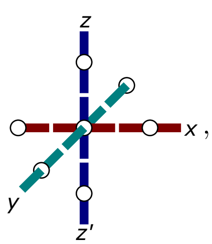
, (16)

$X^{(n+1)}_{xx'yz} =$ 

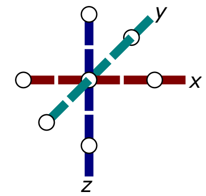
, (17)

$Y^{(n+1)}_{yy'xz} =$ 

, (18)

$Z^{(n+1)}_{zz'yx} =$ 

, (19)

$Q^{(n+1)}_{xyz} =$ 

. (20)

系统的分区函数 $Z_n(T)$ 在 n 次扩展后被评估为

$$Z_n(T) = \sum_{ijk} T^n_{iijjkk} \,, \tag{21}$$

其中我们施加了周期性边界条件。

III. 数值结果

我们设置铁磁耦合 $J = 1$，并在玻尔兹曼常数 $k_B = 1$ 的单位下工作。通过 HOTRG 进行数值计算时，对于块自旋变量最多保留 $D = 18$ 个状态。

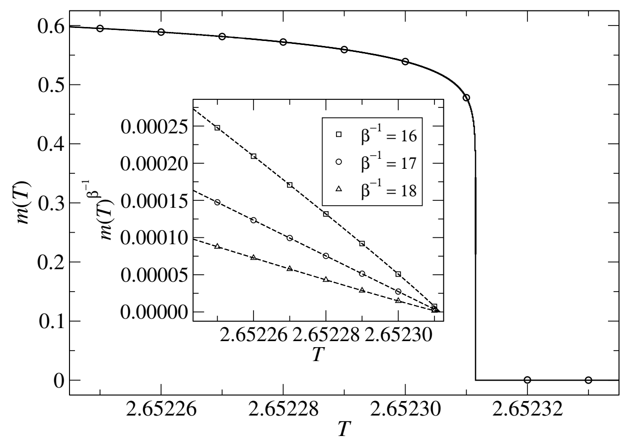


图 2. 每个站点的自发磁化率 $m(T)(D = 18)$。插图：低于 $T_c = 2.65231$ 时的幂律行为。

让我们首先看看通过向系统引入杂质而获得的自发磁化。单个杂质位于晶格的“中心”区域（在每次 HOTRG 扩展步骤后，系统都会旋转以保持杂质靠近晶格的“中心”）。图 2 显示了系统的自发磁化 $m(T)$。临界温度 $T_c = 2.65231$ 以下，磁化表现出典型的幂律行为

$$m(T) \sim |T_C - T|^{0.059} \,. \tag{22}$$

通过跟踪其相对于键尺寸 D 的收敛性，可以高精度地确定临界温度 T_c，如图 3 所示。对于 $D \geq 16$，该值稳定到六位有效数字。指数的精度可以从图 2 的小图

（作为线性依赖关系的小偏差）以及从图 3 的小图（相对于键尺寸 D 的小波动）中推断出来。$\beta(D=17)$ 与 $\beta(D=18)$ 之间的相对差异是 0.2%。**请注意，尽管当前研究的分形是三维的，临界指数 $\beta\approx 0.059\approx 1/17$ 小于平方晶格伊辛模型中的指数 $\beta_{\mathbf{square}}=1/8$。**

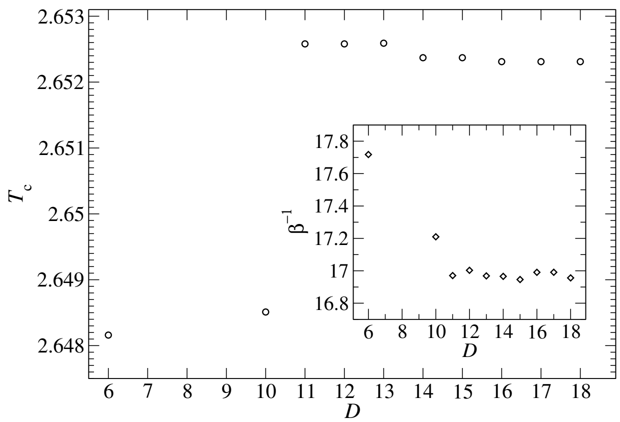


图 3. 临界温度 T_c 随着键维度 D 的收敛。对于 $D=\{16,17,18\}$，临界温度 $T_c=2.65231$ 在小数点后六位是相同的。插图：β 指数的收敛（此处展示的是其倒数值 $\beta(D)^{-1}$）相对于 D。$D=\{7,8,9\}$ 的情况是退化的，因此未包含在图中。

临界指数 β 的数值弱依赖于杂质张量的确切位置。通过对基本簇的八个中心张量上放置的杂质进行平均，我们得到了与上述略有不同的值；对于 D=17 时为 $\beta\approx 0.066\approx 1/15$，而 $\beta(D=16)$ 和 $\beta(D=17)$ 之间的相对差异小于 10^{-4}。

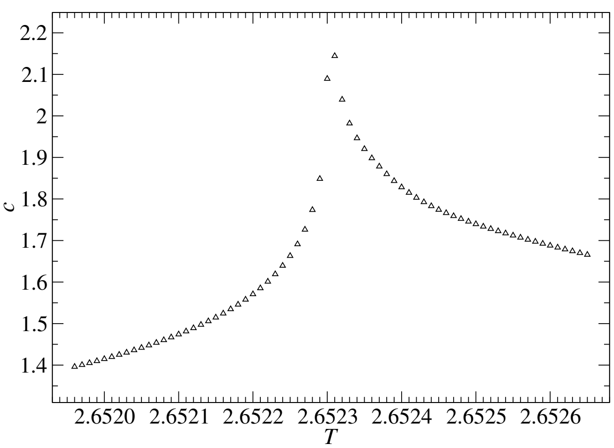


图 4. 每点的比热容 $c(T)$（从键能 $D=16$ 的数据作为对 T 的数值导数获得）。请注意，比热容 $c(T)$ 在 $T\approx 2.6523$ 附近发散，这与从磁化强度确定的 $T_c=2.65231$ 相符。

我们观察到在每个位点的比热 $c(T)$ 在 T_c 处出现了一个奇异行为（发散），这是作为键能 u 的数值导数得到的，相对于温度而言，即 $c(T)=du/dT$，见图 4。我们希望强调在**这种行为与之前研究的二维分形晶格中观察到的行为不同 [12]** 处没有发现发散现象。

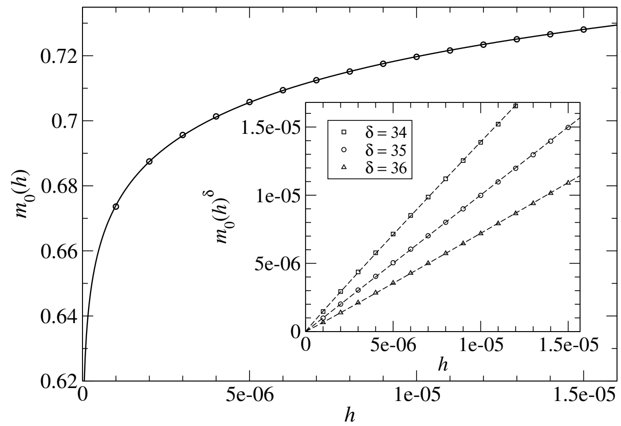


图 5. 自发磁化 $m_0=m(T=T_c)$ 在温度 $T_c=2.65231(D=18)$ 下的磁场响应。插图：m_0 对非零外磁场 h 的幂律依赖关系。

为了确定另一个独立的临界指数，我们还对自发磁化 m 在 T_c 处的磁场响应进行了数值考察，请参见图 5。

$$m_0(h)=m(T=T_c,h)\sim h^{1/35}\,. \tag{23}$$

$\delta(D=17)$ 和 $\delta(D=18)$ 之间的相对差异是 0.4%。

现在我们考虑平均磁化率以获得临界指数 δ。与之前一样，我们得到的值略有不同；对于 D=17 的情况是 $\delta\approx 31$，而 $\delta(D=16)$ 和 $\delta(D=17)$ 之间的相对差异仍然非常小，即小于 10^{-4}。

我们也试图确定临界指数 α，它通过关系式 $c(T)\sim|T-T_c|^{-\alpha}$ 控制了特定热容在临界温度附近的行为。虽然我们对特定热容数据的分析（图 4）始终指向一个小的正值 α（范围从 0.05 到 0.07），但由于这种奇异性较弱，使用现有的数值精度进行更精确的确定具有挑战性。

IV. 结论与讨论

在这项工作中，我们使用高阶张量重正化群（HOTRG）算法研究了经典伊辛模型在一种新型三维分形晶格上的临界行为。该晶格的豪斯多夫维度为 $d_H=2.5$，边界标度维数为 $d=2$。我们的数值模拟精确确定了临界温度为 $T_c\approx 2.65231$。我们计算出自发

Geometry	$d^{(\mathrm{H})}$	d	β	δ
1D chain	1	1	$1/\infty$	∞
4x4 fractal [12–14]	≈ 1.792	1.5	$\approx 1/72$	≈ 205
SC(3, 1) [16]	≈ 1.893	≈ 1.631	$\approx 1/7.4$	*
6x6 fractal [14]	≈ 1.934	≈ 1.774	$\approx 1/15$	*
2D square lattice	2	2	1/8	15
3D fractal (current study)	2.5	2	$\approx 1/17$	≈ 35
3D lattice [11, 19]	3	3	$\approx 1/3$	≈ 4.79
4D lattice	4	4	1/2	3

表 I. 临界指数 β 和 δ 关于经典伊辛模型的维度。$d^{(\mathrm{H})}$ 是豪斯多夫维数，而 d 是从之前定义的边界缩放中得出的维度。对于 4x4 分形的情况，我们报告的是单点测量得到的值，而不是（部分）平均或全局结果。对于谢尔宾斯基地毯 SC(3, 1) 的情况，我们报告的是通过全局测量得到的 β 值（因为单点测量严重依赖于位置）。三维晶格：$\beta \approx 0.3295$ 由 HOTRG [11]，$\beta \approx 0.3262$ 由 MC [19]。未知值用星号 (*) 符号代替。

磁化率的临界指数为 $\beta \approx 0.059 \approx 1/17$，等温临界指数为 $\delta \approx 35$。这些发现为缺乏平移不变性的系统中几何与临界现象之间的复杂关系提供了新的见解。

本研究的一个主要发现是在特定热容中观察到了在 T_c 处的发散奇点。这一结果，在结合先前的研究成果时，有助于阐明这种奇点在分形晶格上出现的条件。我们可以观察到一个明显的进展：虽然 4x4 分形（$d_H \approx 1.792, d = 1.5$）没有发散 [12]，但 6x6 分形（$d_H \approx 1.934$，$d \approx 1.774$）[14] 和我们当前的 3D 分形（$d_H = 2.5$，$d = 2$）确实有。这一有序序列强烈表明，发散的比热容的出现受维数阈值的控制。我们的结果结合先前的工作，有助于将这个阈值限定在 4x4 和 6x6 分形的维数特征之间。在这种情况下，$d = 2$ 的存在与著名的具有对数奇点 [18] 的常规二维方格晶格建立了有力的平行关系，并强化了系统连通性是关键因素的观点。

计算出的临界指数 $\beta \approx 1/17$ 和 $\delta \approx 35$ 展现了一个更为复杂的图景。如表 I所示，这些值与常规二维 ($d = 2$) 或三维 ($d = 3$) 格点的值不一致。有趣的是，磁化指数 $\beta \approx 1/17$ 即使比二维正方形格子（$\beta = 1/8$）还要小，而磁场响应指数 $\delta \approx 35$ 显著大于二维值（$\delta = 15$）。这一发现很重要，因为它打破了仅基于豪斯多夫维数的简单分层排序临界指数的想法。例如，一个简单的由 d_H 排序会将这个分形置于二维和三维规则格子之间，但其指数并不遵循这种插值。

这导致了关于分形上临界现象研究中的核心问题：是否有任何维度决定了普适类？我们的结果强化了这样一种观念，即 d_H 并非唯一的预测因素。二维谢尔宾斯基垫片 ($d_H \approx 1.585$) 上的经典伊辛模型著名地表现出没有有限温度相变 [8, 9]。这通常归因于其有限的分支顺序及其边界标度维度 $d = 1$，后者更好地反映了它在大尺度上的准一维性质。对于本文研究的三维分形，边界维度是 $d = 2$，正如讨论所言，似乎与比热行为一致，但未能决定指数的完整普适类。

为了比较，考虑横向场量子伊辛模型是有启发性的，在这个模型中空间维度实际上增加了一维。如表 II 所总结的，临界指数再次不遵循简单的单调依赖关系于分形维度。一个值得注意的反例是 Sierpinski 金字塔，尽管其豪斯多夫维度为 $d_H = 2$，但表现出的临界指数 $\beta = 0.25 \pm 0.02$ [20]，这个值与常规二维量子伊辛模型（等同于三维经典伊辛模型）的 $\beta \approx 1/3$ 不同。

Geometry	$d^{(\mathrm{H})}$	d	β	δ
1D chain	1	1	1/8	15
2D Sierpinski gasket [17]	≈ 1.585	1	$\approx 1/5$	≈ 8.7
Sierpinski pyramid [20]	2	1	0.25 ± 0.02	?
2D lattice [11]	2	2	$\approx 1/3$	≈ 4.79
3D lattice	3	3	1/2	3

表 II. 临界指数 β 和 δ 的量子伊辛模型在横向场中。普适类对应于高一维度的经典伊辛模型。

我们的结果强烈支持这样一个观点，即普遍性概念虽然在规则晶格上是稳健的，但在分形结构中仅以“弱”的形式适用。这与 Carmona 等人阐述的观点一致，即在自相似结构中，临界指数不由单一的维数参数决定，而是可能依赖于连通性和空隙度等详细的几何特性 [21]。晶格的自相似性意味着在最小尺度上的这些结构性细节会被放大到宏观尺度上，深刻影响着临界点处的整体行为。

这里呈现的结果基于通过杂质张量探测系统获得的局部测量。通过计算全局量（例如，利用自动微分）可以获得更完整的图像，尽管这种方法对于目前方法下的这种复杂性三维系统来说，在计算上是不可行的。未来的工作应该扩展此分析，研究具有不同维度特性的其他三维分形晶格，以解开 d_H、d 和连接性的作用。此外，确定全部临界指数集（例如，α, γ, ν）将允许对这种结构上的超标度关系的有效性进行严格的测试。最后，在这个晶格上探索量子相变，类似于在二维 Sierpiński

分形 [17] 上的研究，将是理解量子涨落如何与这种独特几何相互作用的迷人途径。

ACKNOWLEDGMENTS

数值计算在 RIKEN 先进计算科学研究所 (AICS) 的 K 计算机上进行。本工作部分得到了以下支持：1）通过 Slovakia 的复苏和韧性计划下的项目编号 09I03-03-V04-00682，由欧盟 NextGenerationEU 提供；2）由 Slovak Academy of Sciences 通过 IMPULZ 2021 计划资助的项目 IM-2021-26（SUPERSPIN）；3）由 Agentúra pre Podporu Výskumu a Vývoja（编号 APVV-20-0150）和 Vedecká Grantová Agentúra MŠV-VaM SR 及 SAV（VEGA 编号 2/0156/22）提供支持。H.U. 感谢 JSPS KAKENHI 资助号 JP21H05182 和 JP21H05191 的支持，以及文部科学省 Q-LEAP 资助号 JPMXS0120319794 的支持，还有 JST COI-NEXT 编号 JPMJPF2014 及 CREST 编号 JPMJCR24I1 的支持。

[1] C. Domb and M. S. Green, eds., *Phase Transitions and Critical Phenomena, Volume 1: Exact Results* (Academic Press, London and New York, 1972) p. 506.

[2] M. E. Fisher, The renormalization group in the theory of critical behavior, Reviews of Modern Physics **46**, 597 (1974).

[3] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1982) p. 468.

[4] S. Alexander and R. Orbach, Density of states on fractals: “fractons”, Journal de Physique Lettres **43**, 625 (1982).

[5] Y. Gefen, A. Aharony, and B. B. Mandelbrot, Phase transitions on fractals. i. quasi-linear lattices, Journal of Physics A: Mathematical and General **16**, 1267 (1983).

[6] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, 2nd ed. (Taylor & Francis, London, 1994) p. 192.

[7] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, The International Series of Monographs on Physics (Oxford University Press, Oxford, 1971) p. 308.

[8] Y. Gefen, B. B. Mandelbrot, and A. Aharony, Critical phenomena on fractal lattices, Physical Review Letters **45**, 855 (1980).

[9] J. H. Luscombe and R. C. Desai, Critical behavior of the ising model on the sierpiński gasket, Physical Review B **32**, 1614 (1985).

[10] P. Monceau, M. Perreau, and F. Hébert, Magnetic critical behavior of the ising model on fractal structures, Physical Review B **58**, 6386 (1998).

[11] Z. Y. Xie, J. Chen, M. P. Qin, J. W. Zhu, L. P. Yang, and T. Xiang, Coarse-graining renormalization by higher-order singular value decomposition, Physical Review B **86**, 045139 (2012).

[12] J. Genzor, A. Gendiar, and T. Nishino, Phase transition of the ising model on a fractal lattice, Physical Review E **93**, 012141 (2016).

[13] J. Genzor, Calculation of critical exponents on fractal lattice ising model by higher-order tensor renormalization group method, Physical Review E **107**, 034131 (2023).

[14] J. Genzor, T. Nishino, and A. Gendiar, Tensor networks: Phase transition phenomena on hyperbolic and fractal geometries, Acta Physica Slovaca **67**, 85 (2017).

[15] J. Genzor, A. Gendiar, and Y.-J. Kao, J_1–j_2 fractal studied by multirecursion tensor-network method, Physical Review E **105**, 024124 (2022).

[16] J. Genzor, A. Gendiar, and T. Nishino, Local and global magnetization on the sierpiński carpet, Physical Review E **107**, 044108 (2023).

[17] R. Krčmár, J. Genzor, Y. Lee, H. Čenčariková, T. Nishino, and A. Gendiar, Tensor-network study of a quantum phase transition on the sierpiński fractal, Physical Review E **98**, 062114 (2018).

[18] L. Onsager, Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition, Physical Review **65**, 117 (1944).

[19] M. Hasenbusch, Monte carlo studies of the three-dimensional ising model in equilibrium, International Journal of Modern Physics C **12**, 911 (2001).

[20] H. Yi, Quantum critical behavior of the quantum ising model on fractal lattices, Physical Review E **91**, 012118 (2015).

[21] J. M. Carmona, U. M. B. Marconi, J. J. Ruiz-Lorenzo, and A. Tarancón, Critical properties of the ising model on sierpinski fractals: A finite-size scaling-analysis approach, Physical Review B **58**, 14387 (1998).