

# 弦可积性在库仑分支上的表现

罗恩·德马贾哈<sup>1</sup> 和康斯坦丁·扎雷姆博<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> 物理与天文学系，乌普萨拉大学，箱号 516，瑞典乌普萨拉市，SE-751 20

<sup>2</sup> 瑞典皇家理工学院和斯德哥尔摩大学的诺迪塔，汉内斯·阿尔文街 12 号，  
斯德哥尔摩，瑞典，106 91

<sup>3</sup> 哥本哈根大学尼尔斯玻尔研究所，丹麦哥本哈根 Blegdamsvej 17，邮编  
2100

ron.demjaha.8644@student.uu.se, zarembo@nordita.org

## 摘要

$N = 4$  超杨-米尔斯理论的库仑分支由  $AdS_5 \times S^5$  空间的 D3-膜描述。我们证明了 D-膜上的边界条件通过构造一个动力和谱参数相关的反射矩阵来保持弦西格玛模型的积分性，该矩阵编码了无限数量的守恒电荷。

## 1 介绍

我们证明在 [1, 2] 中，反德西特空间中的横向 D3-膜（图 1）保持了弦  $\sigma$  模型的可积性。这一设置的全息对偶是  $\mathcal{N} = 4$  超 Yang-Mills 理论的库仑分支，其中  $SU(N + 1)$  对称性被破缺为  $SU(N) \times U(1)$ 。这可能是具有明确 S-矩阵和格林函数中正常截断和极点的最简单的全息模型。

库仑分支的可积性从多个角度进行了研究 [3, 4, 5, 6]，包括关于束缚态非微扰谱的一个显著猜想 [4] 和一点函数的确切结果 [6]。在所有这些工作中，库仑分支的可积性都被视为理所当然，就像从理论的共形相继承的一

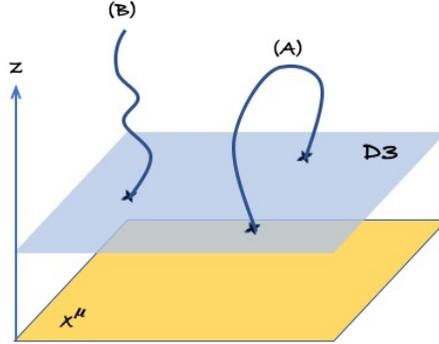


图 1: 朗道分支的 D3-膜对偶。

样。尽管结果确实表明可积性得以保留，先验这一点并不保证且需要证明。质疑库仑分支可积性的理由也存在。

AdS/CFT 可积性从弦的角度来看更加明显。在  $AdS_5 \times S^5$  上的弦运动方程允许 Lax 表示 [7]，因此具有无限数量的守恒定律，这禁止了弦世界面上的粒子产生，并为使用 Bethe Ansatz 的强大代数方法研究谱数据和关联函数开辟了一条途径。

开放弦附着在 D 膜上的边界条件通常会破坏可积性，但在特殊情况下也可能保持可积性，在  $AdS_5 \times S^5$  中的字符串已根据 [1] 进行了分类。相当令人惊讶的是，库仑分支 D3 膜并未出现在此分类中。此外，对于终止于  $AdS_3$  中圆形膜的弦，该膜是  $AdS_5$  中库仑分支膜的一个近似替代品，可积性实际上被破坏了 [8]。因此这个问题需要进一步的研究。

在 [1] 中对可积条件的分析是在某些假设下完整且详尽的。这一次，D 膜上的反射由一个具有数值条目的常数矩阵建模（如 [1] 所示），这是一个相当自然的假设，但也有例外情况已知存在。例如，如果允许反射矩阵是动态的（如 [2] 所示），依赖于世界面场，则 Karch-Randall D5 膜的可积条件会允许多种解。除了库仑分支上的常数反射矩阵外，在这种情况下我们也将寻找一个动态的反射矩阵。在下一节中，我们将介绍扩展以适应动态反射因子的形式主义——双行转移矩阵（如 [9] 所示），特别适合于  $AdS_5$  [2]（更详细的回顾可以在 [10] 找到）。在第 3 节中，我们将这种形式主义应用于

图 1 中的库仑分支 D3 膜。

## 2 可积边界条件在 $AdS_5$

经典玻色弦在  $AdS_5$  中的共形规范下由拉格朗日量定义：

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial_\alpha x^\mu)^2 + (\partial_\alpha z)^2}{2z^2}. \quad (2.1)$$

添加  $S^5$  和费米子在经典层面上是简单的，将在后面讨论。固定共形规范对于我们来说并不重要，只是简化了符号：当运动方程用微分形式表示时，对于任何二维度规看起来都是一样的。

弦在图 1 中终止于 D3-膜的边界条件是对于  $z$  为狄利克雷条件，对于  $x^\mu$  为诺伊曼条件：

$$\dot{z} \stackrel{!}{=} 0, \quad \dot{x}^\mu \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.2)$$

其中点表示  $\tau$  中的导数，撇号表示  $\sigma$  中的导数，而  $\stackrel{!}{=}$  表示弦端点处的等式。可积条件是局部的，因此我们不考虑两端都固定在膜上的弦（图 1A），而是考虑图 1B 中的半无限长弦。同样，这只是出于方便考虑，之后我们会评论有限长度的开弦。

### 2.1 $AdS_5$ 作为陪集

几何上， $AdS_5$  是共形群  $SO(4,2)$  的齐性空间。标准陪集构造 [11] 立即保证了可积性 [12]，考虑到  $AdS_5 = SO(4,2)/SO(4,1)$  是对称空间（参见 [13, 14] 进行回顾）。利用同构  $\mathfrak{so}(4,2) \simeq \mathfrak{su}(2,2)$ ， $\mathfrak{so}(4,2)$  的生成元可以用 5d Dirac 矩阵  $\gamma_a$  及其换位子  $\gamma_{ab}$  表示，所有这些都可以在 [13] 签名的  $(-++++)$  中定义。标准共形生成元被识别为

$$D = \frac{\gamma_4}{2}, \quad P_\mu = \Pi_+ \gamma_\mu, \quad K_\mu = \Pi_- \gamma_\mu, \quad L_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

其中  $\mu, \nu = 0 \dots 3$  是洛伦兹指标，并且

$$\Pi_\pm = \frac{1 \pm \gamma_4}{2} \quad (2.4)$$

是通常的手征投影算子（为了与 5 维指标记账保持一致，我们将  $\gamma^5$  表示为  $\gamma^4$ ）。分母子代数由  $\mathfrak{h} = \langle \gamma^{ab} \rangle$  生成，并与其正交补  $\mathfrak{f} = \langle \gamma^a \rangle$  一起定义了余集的  $\mathbb{Z}_2$  分解： $\mathfrak{so}(4, 2) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{f}$ 。

由标准彭加勒坐标表示的陪集参数化始于群元素  $SO(4, 2)$

$$g = e^{P_\mu x^\mu} z^D. \quad (2.5)$$

规范协变（移动框架）电流定义了陪集分解：

$$J = g^{-1} dg \equiv A + K, \quad A \in \mathfrak{h}, K \in \mathfrak{f}. \quad (2.6)$$

在明确的彭加勒参数化中，

$$A = \frac{1}{2z} dx^\mu \gamma_4 \gamma_\mu, \quad K = \frac{1}{2z} (dz \gamma_4 + dx^\mu \gamma_\mu). \quad (2.7)$$

然后很容易验证陪集 sigma 模型的作用

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{tr} K \wedge *K \quad (2.8)$$

与弦拉格朗日量 (2.1) 一致。

余集的运动方程可以紧凑地写为

$$F + K \wedge K = 0, \quad DK = 0, \quad D * K = 0, \quad (2.9)$$

其中  $D$  是协变导数： $DC = dC + A \wedge C + C \wedge A$ ，而  $F$  是规范连接的曲率： $F = dA + A \wedge A$ 。我们还可以定义规范不变（固定框架）电流

$$j = gKg^{-1} \quad (2.10)$$

并将运动方程重写为规范不变形式：

$$dj - 2j \wedge j = 0, \quad d * j = 0. \quad (2.11)$$

固定框架电流可以从 (2.5) 和 (2.7) 中轻松导出：

$$j = \frac{1}{2z^2} \left[ 2(zdz + xdx)(D - xP) + (z^2 + x^2)Pdx + Kdx + L_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu \right], \quad (2.12)$$

其中  $x^2 = x^\mu x_\mu$ ,  $xdx \equiv x^\mu dx_\mu$  等等。

运动方程可以进一步包装成 Lax 连接的平坦条件：

$$a() = 2 \frac{j - *j}{1 - 2}. \quad (2.13)$$

这样定义的流在谱参数 的任何值下都有零曲率：

$$da + a \wedge a = 0. \quad (2.14)$$

平坦条件等价于运动方程，同时编码了无限多个守恒律。

生成电荷的生成函数是单值矩阵：

$$\mathcal{M}(\tau; \mathbf{x}) = \text{P exp} \left[ \int_0^\infty ds a_\sigma(\tau, s; \mathbf{x}) \right] \quad (2.15)$$

平直连接的单值性在轮廓的光滑变形下不会改变。因此，如果电流满足运动方程，则单值矩阵不依赖于时间。这字面上对于从  $-\infty$  到  $+\infty$  的无限世界片是正确的。闭弦的迹单值也会自动守恒。但是开放弦的一端被固定在 D-膜上，不能移动，因此需要额外步骤来构建守恒量。

## 2.2 双行传输矩阵

开弦守恒荷的生成函数由折叠技巧定义为 [9]：

$$T(\mathbf{x}) = \mathcal{M}^\top(-\mathbf{x}) \mathbb{U}(\mathbf{x}) \mathcal{M}(\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

单值性沿着弦来回运行，在中间插入反射矩阵。转置逆转路径顺序，因此也改变方向。谱参数符号的变化起到了同样的作用<sup>1</sup>。我们允许反射矩阵是谱参数的函数，并且还依赖于动力学变量  $x^\mu(\tau, 0)$  和  $z(\tau, 0)$ <sup>2</sup>。

单值矩阵  $\mathcal{M}$  的时间导数从弦的端点获得贡献：

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = -a_\tau(0; \mathbf{x}) \mathcal{M}(\mathbf{x}). \quad (2.17)$$

<sup>1</sup>谱参数表现为伪标量，因为在 (2.13) 中它乘以  $*j$ ，一个伪矢量。

<sup>2</sup> $z$  坐标沿膜是常数，因此反射矩阵实际上仅依赖于  $x^\mu$ 。除非我们想要比较不同  $z$  值下 D-膜的边界条件。

这适用于半无限弦，有限区间将在后面讨论。在 (2.16) 中定义的传递矩阵因此将是时不变的，前提是反射矩阵满足

$$\dot{\mathbb{U}}() \stackrel{!}{=} a_\tau^\top(-)\mathbb{U}() + \mathbb{U}()a_\tau(). \quad (2.18)$$

如果能够找到  $\mathbb{U}()$  使得该方程变成恒等式，则边界条件将通过构造保持可积性。

到目前为止的讨论完全是通用的，不特定于  $AdS_5$  上的  $\sigma$  模型。后一种情况携带额外的代数结构。转置通常是对称代数的外部自同构，但对于  $\mathfrak{so}(4,2)$  而言，它与内部自同构结合，并带有余集的  $\mathbb{Z}_2$  奇偶性，即存在矩阵  $\mathcal{K}$  [13] 使得

$$\gamma_a^\top = \mathcal{K}^{-1}\gamma_a\mathcal{K}, \quad \gamma_{ab}^\top = -\mathcal{K}^{-1}\gamma_{ab}\mathcal{K}, \quad \mathcal{K}^\top = -\mathcal{K}. \quad (2.19)$$

在 Dirac 矩阵的旋量表示中  $\mathcal{K} = \gamma_{13}$ 。这表明需要定义一个扭曲的反射矩阵

$$\widehat{\mathbb{U}} = \mathcal{K}\mathbb{U} \quad (2.20)$$

和转置括号 [2]:

$$\langle A, B \rangle_\pm \equiv \mathcal{K}A^\top\mathcal{K}^{-1}B \pm BA. \quad (2.21)$$

考虑到 Lax 连接的显式形式 (2.13)，可积条件变为

$$\dot{\widehat{\mathbb{U}}}(x) \stackrel{!}{=} \frac{2}{x^2 - 1} \left[ \langle j_\tau, \widehat{\mathbb{U}}(x) \rangle_+ + x \langle j_\sigma, \widehat{\mathbb{U}}(x) \rangle_- \right]. \quad (2.22)$$

这是我们即将研究的方程。

### 3 D3-膜的反射矩阵

我们求解反射矩阵的策略基于以下观察。可积条件 (2.22) 在导数方面是线性的，时间导数出现在  $\widehat{\mathbb{U}}$  和  $j_\tau$  中，空间导数出现在  $j_\sigma$  中。最后一项在 (2.22) 中是唯一一个可以容纳  $\sigma$ -导数的地方，因此应自行消失：

$$\langle j_\sigma, \widehat{\mathbb{U}}(x) \rangle_- \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.1)$$

幸运的是，当前的  $\sigma$  组件由于狄利克雷-诺伊曼边界条件 (2.2) 而具有非常简单的形式 (2.12)：

$$j_\sigma \stackrel{!}{=} \frac{z'}{z} (D - xP). \quad (3.2)$$

因此可积性约束变成了一个代数条件

$$\langle D - xP, \widehat{\mathbb{U}}(x) \rangle_- = 0. \quad (3.3)$$

我们将首先强制执行此条件，然后调整剩余的自由度以考虑 (2.22) 中的时间依赖性。

首先，我们可以写出一个与问题对称性一致的通用猜测：

$$\widehat{\mathbb{U}} = a\Pi_- + b\Pi_+ + c\Pi_- \gamma_\mu x^\mu + d\Pi_+ \gamma_\mu x^\mu \quad (3.4)$$

其中系数  $a, b, c$  和  $d$  可以依赖于  $x^2$  和  $z^2$ ，后者只是一个常数。

接下来我们将 (3.4) 插入到 (3.3) 中。不同狄拉克矩阵组合之间的换位括号在 [2] 中列出，可以在那里找到，但为了完整性我们在附录 A 中列出了关键公式。使用这些结果，我们发现为了使 (3.3) 成立，(3.4) 的系数必须满足  $d = c$  和  $b = -c$ ，而对  $a$  没有任何约束。也就是说，

$$\widehat{\mathbb{U}} = a\Pi_- + c(\gamma_\mu x^\mu - \Pi_+). \quad (3.5)$$

可积性条件 (2.22) 简化为

$$\dot{\widehat{\mathbb{U}}}(x) \stackrel{!}{=} \frac{2}{x^2 - 1} \langle j_\tau, \widehat{\mathbb{U}}(x) \rangle_+, \quad (3.6)$$

其中

$$j_\tau = \frac{1}{2z^2} \left[ 2x\dot{x} (D - xP) + [z^2 + x^2 [\dot{x}P + \dot{x}K + L_{\mu\nu} x^\mu \dot{x}^\nu] \right]. \quad (3.7)$$

再次利用附录中的结果 A，我们得到三个一致性条件：

$$\begin{aligned} \dot{c} &= 0 \\ c &= \frac{a + c(x^2 - z^2)}{z^2(2 - 1)} \\ \dot{a} &= -2cx\dot{x}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

其解为

$$c = -1, \quad a = x^2 - z^2. \quad (3.9)$$

因此，我们找到了以下反射矩阵：

$$\widehat{\mathbb{U}} = [x^2 - z^2] [\Pi_- - x^\mu \gamma_\mu + \Pi_+]. \quad (3.10)$$

其在字符串端点的插入定义了一个与运动方程无关的时间独立双行传输矩阵，从而生成了无限数量的守恒电荷。这种构造明确展示了  $AdS_5$  中库仑分支膜的整体性。

### 3.1 $AdS_5 \times S^5$

推广到  $AdS_5 \times S^5$  是直接的，因为 D3-膜位于  $S^5$  上，在共形规范下  $AdS_5$  和  $S^5$  的运动方程彼此独立，并且带有狄利克雷边界条件的  $O(6)$  sigma-模型是众所周知可积的 [15]。在这种情况下，反射矩阵只是数值 [16]。将反射矩阵  $AdS_5$  和  $S^5$  组合成超级矩阵

$$\mathbb{U}_{PSU(2,2|4)} = \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{AdS_5} & 0 \\ 0 & \mathbb{U}_{S^5} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

，并使用超集 [7] 的 Lax 连接  $PSU(2,2|4)/SO(4,1) \times SO(5)$ ，我们可以定义完全的 Green-Schwarz sigma 模型上的双行转移矩阵  $AdS_5 \times S^5$ 。

### 3.2 开弦

到目前为止，我们讨论了一端连接到 D3 膜的半无限长弦。一个更有物理意义的情况是弦两端分别固定在两个不同的 D 膜上或终止于同一个 D 膜上。在这种情况下，双行传输矩阵也通过折叠技巧构建，无需新的成分。可积条件是局部的，因此增加另一个端点不会影响我们对第一个端点进行的分析。

整个字符串的单值矩阵具有以下形式

$$T(x) = \text{tr} \mathcal{M}^\top(-x) \mathbb{U}(0; x) \mathcal{M}(x) \mathbb{U}^{-1}(\pi; x) \quad (3.12)$$

其中空间世界表坐标在范围  $\sigma \in [0, \pi]$  内变化，我们明确表示了反射矩阵在其插入端点处的依赖性。

单值矩阵  $\mathcal{M}$  的时间导数现在产生两个边界项：

$$\dot{\mathcal{M}}(x) = \mathcal{M}(x)a_\tau(\pi; x) - a_\tau(0; x)\mathcal{M}(x), \quad (3.13)$$

并且我们找到  $\sigma = \pi$  端点的可积条件为：

$$\mathbb{U}^{-1}()\dot{\mathbb{U}}()\mathbb{U}^{-1}() \stackrel{!}{=} a_\tau()\mathbb{U}^{-1}() + \mathbb{U}^{-1}()a_\tau^\top(-). \quad (3.14)$$

但这等价于 (2.18)，因此由相同的反射矩阵解决。请注意，迹的循环性对于得出这个结论是必要的。

## 4 结论

尽管已经存在很强的可积性指示，我们认为从概念上明确构建负责库仑分支可积性的守恒荷层次结构是非常重要的。就像 Karch-Randall 膜 [2] 一样，反射因子结果依赖于弦的动力学变量和谱参数。这对其库仑分支的量子可积性有何影响是一个有趣且我们目前没有立即答案的开放问题。

一个明显的字符串可积性应用是构造和分类经典弦解决方案 [17]。我们的结果为将可积性工具应用于库仑分支上的旋转弦开辟了一条途径，例如描述大量 W 玻色子氢类型束缚态的弦解。这些众所周知的解 [18] 目前仅以数值形式已知 [18, 19]。

## 致谢

K.Z. 的工作得到了 VR 资助 2021-04578 的支持。

## A 转置括号

转置括号的一般形式由定义 (2.21) 和 Dirac 矩阵的转置性质 (2.19) 得出：

$$\langle \gamma_a, \Gamma \rangle_{\pm} = [\gamma_a, \Gamma]_{\pm}, \quad \langle \gamma_{ab}, \Gamma \rangle = -[\gamma_{ab}, \Gamma]_{\mp}, \quad (\text{A.1})$$

其中  $\Gamma$  代表任何  $4 \times 4$  矩阵。任何转置括号都可以从这里推导出来，但为了方便起见，我们明确列出了在正文中遇到的特殊情况：

$$\begin{aligned} \langle \gamma_4, \Pi_{\pm} \rangle_{-} &= 0 \\ \langle \gamma_4, \Pi_{\pm} \gamma_{\mu} \rangle_{-} &= \pm 2 \Pi_{\pm} \gamma_{\mu} \\ \langle \Pi_{+} \gamma_{\mu}, \Pi_{+} \rangle_{-} &= -\gamma_4 \gamma_{\mu} \\ \langle \Pi_{+} \gamma_{\mu}, \Pi_{-} \rangle_{-} &= 0 \\ \langle \Pi_{+} \gamma_{\mu}, \Pi_{+} \gamma_{\nu} \rangle_{-} &= \Pi_{-} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \\ \langle \Pi_{+} \gamma_{\mu}, \Pi_{-} \gamma_{\nu} \rangle_{-} &= -\Pi_{-} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} \\ \langle \gamma_4, \Pi_{\pm} \rangle_{+} &= \pm 2 \Pi_{\pm} \\ \langle \gamma_4, \gamma_{\mu} \rangle_{+} &= 0 \\ \langle \Pi_{\pm} \gamma_{\mu}, \Pi_{\pm} \rangle_{+} &= \gamma_{\mu} \\ \langle \Pi_{\pm} \gamma_{\mu}, \Pi_{\mp} \rangle_{+} &= 0 \\ \langle \Pi_{\pm} \gamma_{\mu}, \gamma_{\nu} \rangle_{+} &= 2 \eta_{\mu\nu} \Pi_{\mp} \\ \langle \gamma_{\mu\nu}, \Pi_{\pm} \rangle_{+} &= 0 \\ \langle \gamma_{\mu\nu}, \gamma_{\lambda} \rangle_{+} &= 2 \eta_{\mu\lambda} \gamma_{\nu} - 2 \eta_{\nu\lambda} \gamma_{\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

## 参考文献

- [1] A. Dekel and Y. Oz, “Integrability of Green-Schwarz Sigma Models with Boundaries”, JHEP 1108, 004 (2011), 1106.3446.
- [2] G. Linardopoulos and K. Zarembo, “String integrability of defect CFT and dynamical reflection matrices”, JHEP 2105, 203 (2021), 2102.12381.

- [3] L. F. Alday, J. M. Henn, J. Plefka and T. Schuster, “*Scattering into the fifth dimension of  $N=4$  super Yang-Mills*”, JHEP 1001, 077 (2010), 0908.0684.
- [4] S. Caron-Huot and J. M. Henn, “*Solvable Relativistic Hydrogenlike System in Supersymmetric Yang-Mills Theory*”, Phys. Rev. Lett. 113, 161601 (2014), 1408.0296.
- [5] F. Loebbert, J. Miczajka, D. Müller and H. Münkler, “*Massive Conformal Symmetry and Integrability for Feynman Integrals*”, Phys. Rev. Lett. 125, 091602 (2020), 2005.01735. • S. Caron-Huot and F. Coronado, “*Ten dimensional symmetry of  $\mathcal{N} = 4$  SYM correlators*”, JHEP 2203, 151 (2022), 2106.03892. • V. Ivanovskiy, S. Komatsu, V. Mishnyakov, N. Terziev, N. Zagraev and K. Zarembo, “*Vacuum Condensates on the Coulomb Branch*”, 2405.19043.
- [6] F. Coronado, S. Komatsu and K. Zarembo, “*Coulomb Branch and Integrability*”, 2506.07222.
- [7] I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, “*Hidden symmetries of the  $AdS_5 \times S^5$  superstring*”, Phys. Rev. D69, 046002 (2004), hep-th/0305116.
- [8] T. Ishii, R. Kitaku, K. Murata and C.-M. Yoo, “*Turbulence on open string worldsheets under non-integrable boundary conditions*”, JHEP 2402, 149 (2024), 2310.19317.
- [9] E. K. Sklyanin, “*Boundary conditions for integrable equations*”, Funct. Anal. Appl. 21, 164 (1987).
- [10] G. Linardopoulos, “*String theory methods for defect CFTs*”, 2501.11985.
- [11] C. G. Callan, Jr., S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, “*Structure of phenomenological Lagrangians. 2.*”, Phys. Rev. 177, 2247 (1969).
- [12] H. Eichenherr and M. Forger, “*On the Dual Symmetry of the Nonlinear Sigma Models*”, Nucl. Phys. B155, 381 (1979).
- [13] G. Arutyunov and S. Frolov, “*Foundations of the  $AdS_5 \times S^5$  Superstring. Part I*”, J. Phys. A: Math. Theor 42, 1 (2009), 0901.4937.

- [14] K. Zarembo, “*Integrability in Sigma-Models*”,  
Les Houches Lect. Notes 106, 205 (2019), 1712.07725.
- [15] S. Ghoshal, “*Boundary S matrix of the  $O(N)$  symmetric nonlinear sigma model*”, Phys. Lett. B 334, 363 (1994), hep-th/9401008. • M. Moriconi and A. De Martino, “*Quantum integrability of certain boundary conditions*”, Phys. Lett. B 447, 292 (1999), hep-th/9809178.
- [16] I. Aniceto, Z. Bajnok, T. Gombor, M. Kim and L. Palla, “*On integrable boundaries in the 2 dimensional  $O(N)$   $\sigma$ -models*”, J. Phys. A50, 364002 (2017), 1706.05221. • T. Gombor, “*New boundary monodromy matrices for classical sigma models*”, Nucl. Phys. B 953, 114949 (2020), 1805.03034.
- [17] V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan and K. Zarembo, “*Classical/quantum integrability in AdS/CFT*”, JHEP 0405, 024 (2004), hep-th/0402207.
- [18] M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers and D. J. Winters, “*Meson spectroscopy in AdS / CFT with flavor*”, JHEP 0307, 049 (2003), hep-th/0304032.
- [19] C. P. Herzog, S. A. Stricker and A. Vuorinen, “*Remarks on Heavy-Light Mesons from AdS/CFT*”, JHEP 0805, 070 (2008), 0802.2956.