

立方差因子吸收理想的交换环

FARANAK FARSHADIFAR

摘要. 令 R 是一个带有 $1 \neq 0$ 的交换环。本文的目的是介绍并研究 R 的立方差因子吸收理想作为素理想的推广。我们说, 如果对于所有 $0 \neq a, b \in R$, 当 $a^3 - b^3 \in I$ 时, 则 $a - b \in I$ 或 $a^2 + ab + b^2 \in I$, 则 R 的真理想 I 是 R 的立方差因子吸收理想 (cdf -吸收理想)。

1. 介绍

在本文中, R 表示一个含单位元的交换环, 并且 $\mathbb{Z}$ 表示整数环。此外, $\mathbb{Z}_n$ 将表示模 n 的整数环, 其中 n 是一个正整数。

一个 R 的真理想 P 被称为一个素理想如果 $ab \in P$ 对于某些 $a, b \in R$, 那么要么 $a \in P$ 要么 $b \in P$ [7]。素理想理论是经典代数几何中的一个重要工具。在代数几何的发展过程中, 为了某些例子 (参见 [1, 3, 4, 5, 8, 10]), 关于素理想的概念出现了一些推广。在 [3] 中, 作者介绍并研究了交换环的平方差因子吸收理想的概念。一个适当的理想 I 的 R 被称为平方差因子吸收理想 (sdf -吸收理想) 的 R 如果对于 $0 \neq a, b \in R$, 每当 $a^2 - b^2 \in I$, 那么 $a + b \in I$ 或 $a - b \in I$ [3]。

受 sdf -吸收理想启发, 本文旨在介绍 R 的立方差因子吸收理想 (cdf -吸收理想) 的概念作为素理想的推广, 并获得一些类似于在交换环 [3] 中关于 sdf -吸收理想的结果。我们说, 如果对于任意的 $a^3 - b^3 \in I$, 当 $0 \neq a, b \in R$ 成立时, 则有 $a - b \in I$ 或者 $a^2 + ab + b^2 \in I$, 那么 R 的一个真理想 I 是一个立方差因子吸收理想 (cdf -吸收理想) 的 R 。

2. 主要结果

我们从定义开始。

定义 2.1. 我们说, 如果对于任意的 $0 \neq a, b \in R$, 当 $a^3 - b^3 \in I$ 成立时, 则有 $a - b \in I$ 或 $a^2 + ab + b^2 \in I$, 那么 R 的一个适当理想 I 是 R 的一个立方差因子吸收理想 (cdf -吸收理想)。

Date: 2025 年 6 月 28 日.

2010 Mathematics Subject Classification. 13A15, 13A99.

Key words and phrases. 素理想, 平方差因子吸收理想, 立方差因子吸收理想.

命题 2.2. R 的理想 I 是 R 的立方差因子吸收理想, 当且仅当每当 $a^3 + b^3 \in I$ 对于 $0 \neq a, b \in R$ 成立时, 则有 $a + b \in I$ 或 $a^2 - ab + b^2 \in I$ 。

证明. 这是通过使用事实 $a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3$ 得出的。□

备注 2.3. 显然, R 的每个素理想都是 R 的 cdf-吸收理想。但是示例 2.14 (a) 表明反过来通常不成立。

定理 2.4. 设 I 是 R 的一个非零 cdf-吸收理想。那么对于每个 $a \in R$, 我们有 $a^3 \in I$ 蕴含要么 $a^2 \in I$ 或者 $a \in I$ 。

证明. 令 $a^3 \in I$ 。如果 $a = 0$, 我们就完成了。因此, 设 $a \neq 0$ 。由于 I 是 R 的一个非零理想, 存在一个 $0 \neq i \in I$ 。从而 $a^3 - i^3 \in I$ 。这表明 $a - i \in I$ 或 $a^2 + ai + i^2 \in I$, 因为 I 是 R 的一个 cdf-吸收理想。因此 $a \in I$ 或 $a^2 \in I$ 。□

备注 2.5. (a) “非零”假设在定理 2.4 中是需要的。很容易验证, $\{0\}$ 是 $\mathbb{Z}_8$ 的一个 cdf-吸收理想, 但是 $a^3 \in \{0\}$ 不蕴含 $a^2 \in \{0\}$ 或 $a \in \{0\}$ (考虑 $a = 2$)。

(b) 定理 2.4 还表明, 在理想非零时, cdf-吸收理想的定义中不需要 “ $a, b \neq 0$ ” 假设。

一个理想的 I , 具有这样的性质: 对于每个 $a \in R$, $a^3 \in I$ 蕴含要么是 $a^2 \in I$ 或 $a \in I$ 的理想不一定是 cdf-吸收的理想, 参见示例 2.14(a)。然而, 当 $\text{char}(R) = 3$ 时, 定理 2.4 的逆命题也成立, 并且不需要 “非零理想” 假设。

定理 2.6. 令 I 是 R 的一个理想, 具有如下性质: 对于每个 $a \in R$, $a^3 \in I$ 意味着要么 $a^2 \in I$ 要么 $a \in I$, 并且 $\text{char}(R) = 3$ 。然后 I 是 R 的一个 cdf-吸收理想。

证明. 令 $a^3 - b^3 \in I$ 对于 $0 \neq a, b \in R$ 。由于特征值 $(R) = 3$, 我们有 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 \in I$, 因此根据假设, 要么是 $a - b \in I$ 要么是 $(a - b)^2 \in I$ 。由于特征为 $(R) = 3$, 我们有 $a^2 - 2ab = a^2 + ab$ 。因此 $a^2 + ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \in I$ 。因此, I 是 R 的一个 cdf-吸收理想。□

推论 2.7. 设 R 是一个具有特征 $\text{char}(R) = 3$ 的交换冯·诺伊曼正则环。那么 R 的每个真理想都是 R 的 cdf-吸收理想。

证明. 每个适当的理想 I 都是交换冯·诺伊曼正则环的根理想, 因此对于每一个 $a \in R$ 我们都有 $a^3 \in I$ 意味着要么 $a^2 \in I$ 要么 $a \in I$ 。现在, 结果由定理 2.6 得出。□

示例 2.8. (a) $\mathbb{Z}_8$ 的所有真理想都是 cdf-吸收理想, 且 $\mathbb{Z}_{125}$ 的所有非零真理想都是 cdf-吸收理想。

(b) 对于 $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$ 的 $a = (4, 0)$ 和 $b = (1, 0)$ 我们有 $a^3 - b^3 = (63, 0) = (0, 0) \in \{0\} \times \mathbb{Z}_9$ 。但是 $a - b = (3, 0) \notin \{0\} \times \mathbb{Z}_9$ 和 $a^2 + ab + b^2 = (21, 0) \notin \{0\} \times \mathbb{Z}_9$ 。因此理想 $\{0\} \times \mathbb{Z}_9$ 不是 $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$ 的 cdf-吸收理想。此外, 对于这个 a 和 b , 我们得到 $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$ 的零理想不是一个 cdf-吸收理想。

(c) 设 $R = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$ 。则理想 $I = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{Z}_9$ 不是 R 的 cdf-吸收理想 (为了看到这一点, 设 $a = (2, 1, 0), b = (-1, 1, 0) \in R$)。

(d) 考虑环 $\mathbb{Z}$ 的理想 $9\mathbb{Z}$ 。然后对于 $\mathbb{Z}$ 的 $a = 1$ 和 $b = -2$, 我们有 $a^3 - b^3 = 9 \in 9\mathbb{Z}$ 。但 $a - b = 3 \notin 9\mathbb{Z}$ 和 $a^2 + ab + b^2 = 3 \notin 9\mathbb{Z}$ 。因此, $9\mathbb{Z}$ 不是 $\mathbb{Z}$ 的 cdf-吸收理想。

定理 2.9. 令 I 为交换环 R 的一个 cdf-吸收理想。则下列陈述是等价的:

- (a) 如果 $a^3 - b^3 \in I$ 对于 $0 \neq a, b \in R$ 成立, 则 $(a-b)^2 \in I$ 和 $a^2 + ab + b^2 \in I$ 。
- (b) $3 \in I$;
- (c) 字符 $(R/I) = 3$ 。

证明. (a) $\Rightarrow$ (b) 设 $a = b = 1$ 。那么 $a^3 - b^3 = 0 \in I$, 因此由假设得 $3 = 1 + 1(1) + 1 = a^2 + ab + b^2 \in I$ 。(b) $\Rightarrow$ (a) 假设对于 $0 \neq a, b \in R$ 有 $a^3 - b^3 \in I$ 。则 $a - b \in I$ 或 $a^2 + ab + b^2 \in I$, 因为 I 是 R 的 cdf-吸收理想。如果 $a - b \in I$, 则 $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab \in I$ 。如果 $a^2 + ab + b^2 \in I$, 则 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + ab + b^2 - 3ab \in I$ 。因此, $(a - b)^2, a^2 + ab + b^2 \in I$ 。

(b) $\Leftrightarrow$ (c) 这是清楚的。 $\square$

定义 2.10. 我们说 R 的一个真理想 I 是一个 $*$ -素理想, 如果每当 $b(a^2 + ab + b^2) \in I$ 对于 $a, b \in R$ 成立, 那么 $b \in I$ 或 $a^2 + ab + b^2 \in I$ 。

示例 2.11. 考虑环 $\mathbb{Z}$ 的理想 $39\mathbb{Z}$ 。然后对于 $\mathbb{Z}$ 中的 $a = 1$ 和 $b = 3$, 我们有 $b(a^2 + ab + b^2) = 3(13) = 39 \in 39\mathbb{Z}$ 。但 $b = 3 \notin 39\mathbb{Z}$ 和 $a^2 + ab + b^2 = 13 \notin 39\mathbb{Z}$ 。因此 $39\mathbb{Z}$ 不是环 $\mathbb{Z}$ 的 $*$ -素理想。由示例 2.14(a) 可知, $39\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一个 cdf-吸收理想。

定理 2.12. 令 I 是 R 和 $3 \in U(R)$ 的非零理想。然后, I 是 R 的一个 cdf-吸收理想当且仅当 I 是 R 的一个 $*$ -素理想。

证明. 首先假设 I 是 R 和 $b(a^2 + ab + b^2) \in I$ 的 cdf-吸收理想对于 $a, b \in R$ 。我们可以假设 $a, b \neq 0$ 。首先, 假设 $b \neq a$ 和 $b \neq -a$ 。令 $x := (a + 2b)/3 \in R$ 和 $y := (a - b)/3 \in R$ 。由于 $b \neq a$ 和 $b \neq -a$, 我们有 $x^3 - y^3 = b(a^2 + ab + b^2)/3 \in I$ 和 $x, y \neq 0$ 。因此, $b \in I$ 或 $a^2 + ab + b^2 \in I$, 因为 I 是 R 的一个 cdf-吸收理想。

想。接下来, 假设 $b = a$ 或 $b = -a$ 。然后 $b^3 \in I$, 因此由定理 2.4 可知 $b \in I$ 或 $b^2 \in I$ 。

反之, 设 I 是 R 的一个 $*$ -素理想, 并且 $a^3 - b^3 \in I$ 对某个 $a, b \in R$ 成立。令 $x := (a + 2b)/3 \in R$ 和 $y := (a - b)/3 \in R$ 。然后我们得到 $b = x - y$ 和 $a = 2y + x$ 。因此

$$9y(y^2 + xy + x^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3) \in I.$$

现在, 由于 $3 \in U(R)$, 我们有 $y(y^2 + xy + x^2) \in I$ 故由假设, $(a - b)/3 = y \in I$ 或 $(a^2 + ab + b^2)/3 = (y^2 + xy + x^2) \in I$ 。因此, 我们得到 $(a - b) \in I$ 或 $(a^2 + ab + b^2) \in I$, 如所需。□

定理 2.13. 令 I 为 R 的一个真理想。则下列语句是等价的:

- (a) I 是 R 的一个 cdf -吸收理想。
- (b) 若 $b(a^2 + ab + b^2) \in I$ 对于 $a, b \in R \setminus I$, 则线性方程组 $b = Y - X, a = Y + 2X$ 在 R 中没有非零解 (即不存在满足这两个方程的 $0 \neq x, y \in R$)

证明. (a) $\Rightarrow$ (b) 假设 I 是 R 和 $b(a^2 + ab + b^2) \in I$ 的 cdf 吸收理想, 针对 $a, b \in R \setminus I$, 且线性方程组 $b = Y - X$ 和 $a = Y + 2X$ 在 R 中存在解, 对于某个 $0 \neq x, y \in R$ 。然后 $x^3 - y^3 = b(a^2 + ab + b^2) \in I$, 但是 $a = 2x + y = a^2 + ab + b^2 \notin I$ 和 $y - x = b \notin I$, 矛盾。(b) $\Rightarrow$ (a) 假设 $x^3 - y^3 \in I$ 对于 $0 \neq x, y \in R$ 。令 $a = 2x + y$ 和 $b = y - x$ 。然后 $b(a^2 + ab + b^2) = x^3 - y^3 \in I$, 线性方程组 $2X + Y = a, Y - X = b$ 在 R 中有解对于 $0 \neq x, y \in R$ 。因此, $2x + y = a^2 + ab + b^2 \in I$ 或 $y - x = b \in I$, 从而 I 是 R 的一个 cdf -吸收理想。□

我们接下来给出几个累积分布函数吸收理想的示例。

- 示例 2.14.** (a) 利用定理 2.13, 可以很容易验证, $\mathbb{Z}$ 的一个恰当理想 I 是 $\mathbb{Z}$ 的 cdf -吸收理想当且仅当 I 是 $\mathbb{Z}$ 或 $I = 3w\mathbb{Z}$ 的素理想对于某个不是 3 倍数的整数 w 。
- (b) 设 R 是一个布尔环。那么 R 的每一个真理想都是 R 的一个 cdf -吸收理想, 因为对于每一个 $x \in R$ 都有 $x^3 = x$ 。
- (c) 令 $R = \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ 和 $I = I_1 \times \cdots \times I_n \times J$ 为 R 的理想。使用定理 2.13 再次, 可以很容易验证 I 是 R 的 cdf -吸收理想当且仅当 J 是 $\mathbb{Z}$ 的素理想或 J 是 $*$ -素理想 $\mathbb{Z}$ 或 $J = 3w\mathbb{Z}$ 对于某个不是 3 倍数的整数 w 。
- (d) 令 $R = K[X]$, 其中 K 是一个域, 并且 $I = (X^2 + X + 1)(X - 1)R$ 。然后, 由于 $X^3 - 1^3 = (X - 1)(X^2 + X + 1) \in I$ 但 $(X - 1) \notin I$ 和 $(X^2 + X + 1) \notin I$, 我们有 I 不是 R 的 cdf -吸收理想。

接下来的两个定理和推论直接来自于定义和备注 2.5(b); 因此省略其证明。

定理 2.15. 令 I 是 R 的一个 cdf -吸收理想, 并且令 S 是 R 的一个乘法闭集, 具有 $I \cap S = \emptyset$ 。然后 I_S 是 R_S 的一个 cdf -吸收理想。

定理 2.16. 设 $f: R \rightarrow T$ 为交换环的同态。那么我们有以下内容。

- (a) 如果 J 是 T 的非零 cdf -吸收理想, 则 $f^{-1}(J)$ 是 R 的 cdf -吸收理想。
- (b) 如果 f 是单射且 J 是 T 的 cdf -吸收理想, 则 $f^{-1}(J)$ 是 R 的 cdf -吸收理想。
- (c) 如果 f 是满射且 I 是包含 $\ker(f)$ 的 R 的一个 cdf -吸收理想, 则 $f(I)$ 是 T 的一个 cdf -吸收理想。

推论 2.17. (a) 设 $R \subseteq T$ 是交换环的扩张, 且 J 是 T 的一个 cdf -吸收理想。则 $J \cap R$ 是 R 的一个 cdf -吸收理想。
 (b) 设 $J \subseteq I$ 是 R 的理想。如果 I 是 R 的一个 cdf -吸收理想, 那么 I/J 是 R/J 的一个 cdf -吸收理想。
 (c) 如果 $J \subsetneq I$, 则 I/J 是 R/J 的 cdf -吸收理想当且仅当 I 是 R 的 cdf -吸收理想。

以下示例表明, 在定理 2.16(a) 中需要“非零”假设, 而在定理 2.16(c) 中需要“ $\ker(f) \subseteq I$ ”假设。

示例 2.18. (a) 设 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_8$ 是自然满同态。由备注 2.5(a), $\{0\}$ 是 $\mathbb{Z}_8$ 的 cdf -吸收理想, 但 $f^{-1}(\{0\}) = 8\mathbb{Z}$ 不是 $\mathbb{Z}$ 的 cdf -吸收理想, 见示例 2.14(a)。因此在定理 2.16(a) 中需要“非零”的假设。
 (b) 设 $f: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$ 是由 $f(g(X)) = g(0)$ 给出的满射。然后 $I = (X + 4)$ 是一个素理想, 因此是 $\mathbb{Z}[X]$ 的一个 cdf -吸收理想, 但是 $f((X + 4)) = 4\mathbb{Z}$ 不是 $\mathbb{Z}$ 的一个 cdf -吸收理想, 参见示例 2.14(a)。注意 $\ker(f) = (X) \not\subseteq (X + 4) = I$; 因此在定理 2.16(c) 中需要“ $\ker(f) \subseteq I$ ”假设。

定理 2.19. 设 I_1, I_2 为交换环 R_1, R_2 的非零真理想。

- (a) 如果 $I_1 \times I_2$ 是 $R_1 \times R_2$ 的一个 cdf -吸收理想, 则 I_1, I_2 分别是 R_1, R_2 的 cdf -吸收理想。另外, 如果对于某个 $0 \neq i \in I_1$ 有 $3 \notin I_2$ 和 $\sqrt[3]{i+1} \in R_1$, 则 $\sqrt[3]{i+1} - 1 \in I_1$ 。
- (b) 如果 I_1, I_2 分别是 R_1, R_2 的 cdf -吸收理想, 并且 $3 \in I_2$, 那么对于每个 $(0, 0) \neq a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in R$ 满足 $a^3 - b^3 \in I$, 我们有 $a^2 + ab + b^2 \in I$ 或 $(a - b)^2 \in I$ 。

证明. (a) $\Rightarrow$ (b) 设 $I = I_1 \times I_2$ 是 $R = R_1 \times R_2$ 的一个 cdf -吸收理想。那么可以看出 I_1, I_2 分别是 R_1 和 R_2 的 cdf -吸收理想。接下来, 假设对于某些 $0 \neq i \in I_1$

和 $3 \notin I_2$ 成立 $\sqrt[3]{i+1} \in R_1$ 。设 $a = (\sqrt[3]{i+1}, 1), b = (1, 1) \in R$ 。那么 $a^3 - b^3 = (i, 0) \in I$ ；因此 $(\sqrt[3]{i+1} - 1, 0) = a - b \in I$ 或 $(\sqrt[3]{(i+1)^2} + \sqrt[3]{i+1} + 1, 3) = a^2 + ab + b^2 \in I$ 。由于 $3 \notin I_2$ 。我们得到 $\sqrt[3]{i+1} - 1 \in I_1$ 。(b) $\Rightarrow$ (a) 假设 $3 \in I_2$ 。令 $(0, 0) \neq a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in R$ ，其中 $a^3 - b^3 \in I$ 。然后 $a_2^3 - b_2^3 \in I_2$ ，因此 $a_2 - b_2 \in I_2$ 或 $a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2 \in I_2$ ，因为 I_2 是 R_2 的非零 cdf-吸收理想。由于 $3 \in I_2$ ，我们有 $a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2, (a_2 - b_2)^2 \in I_2$ 由定理 2.9 得出。此外， $a_1^3 - b_1^3 \in I_1$ ；因此 $a_1 + b_1 \in I_1$ 或 $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 \in I_1$ ，因为 I_1 是非零 cdf 吸收理想的 R_1 。如果 $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 \in I_1$ ，则 $a^2 + ab + b^2 \in I$ 。如果 $a_1 - b_1 \in I_1$ ，则 $(a_1 - b_1)^2 \in I_1$ 。因此， $(a - b)^2 \in I$ 。□

在以下结果中，我们确定了理想化环中的 cdf-吸收理想。回忆一下，对于一个交换环 R 和 R -模 M ，是 R 和 M 的理想化。是在加法由 $(r, m) + (s, n) = (r + s, m + n)$ 定义和乘法由 $(r, m)(s, n) = (rs, rn + sm)$ 定义的情况下具有单位元 $(1, 0)$ 的交换环 $R(+)M = R \times M$ 。关于理想化的内容，请参阅 [6, 11]。 $R(+)M$ 的每个理想都具有形式 $I(+)N$ ，其中 I 是 R 的一个理想，而 N 是 M 的一个子模（见 [11, Theorem 25.1(1)]）。

定理 2.20. 设 I 是 R 的非零真理想， M 是一个 R -模， N 是 M 的子模。那么我们有以下结论。

- (a) 如果 $I(+)N$ 是 $R(+)M$ 的一个 cdf-吸收理想，则 I 是 R 和 $\{im : i \in I \text{ and } m \in M \setminus N\} \subseteq N$ 的一个 cdf-吸收理想。
- (b) 如果 I 是 R 的一个 cdf-吸收理想，那么 $I(+)M$ 是 $R(+)M$ 的一个 cdf-吸收理想。

证明. (a) 设 $I(+)N$ 是 $R(+)M$ 的一个 cdf-吸收理想。那么很容易验证 I 是 R 的一个 cdf-吸收理想。设 $m \in M \setminus N$ ， $0 \neq i \in I$ 和 $a := (i, 0), b := (0, m) \in R(+)M$ 。然后 $a^3 - b^3 = (i^3, 0) \in I(+)N$ 表明 $a^2 + ab + b^2 = (i^2, im) \in I(+)N$ 或 $a - b = (i, -m) \in I(+)N$ 。由于 $m \in M \setminus N$ ，我们有 $a - b = (i, -m) \notin I(+)N$ 。因此 $a^2 + ab + b^2 = (i^2, im) \in I(+)N$ 。故 $im \in N$ 。因此， $\{im : i \in I \text{ and } m \in M \setminus N\} \subseteq N$ 。

(b) 设 I 是 R 的一个 cdf-吸收理想。假设 $a^3 - b^3 \in I(+)M$ 对于 $(0, 0) \neq a, b \in R(+)M$ 成立，其中 $x = (a, m_1)$ 和 $y = (b, m_2)$ 。由于 I 是 R 和 $a^3 - b^3 \in I$ 的非零 cdf-吸收理想，我们有 $a^2 + ab + b^2 \in I$ 或 $a - b \in I$ 。如果 $a^2 + ab + b^2 \in I$ ，则 $x^2 + xy + y^2 \in I(+)M$ 。如果 $a - b \in I$ ，则 $x - y \in I(+)M$ 。因此， $I(+)M$ 是 $R(+)M$ 的一个 cdf-吸收理想。□

以下示例表明，在定理 2.20 中， I 为非零理想是至关重要的。

示例 2.21. 设 $R = \mathbb{Z}_8$, $M = N = \mathbb{Z}_8$ 和 $I = \{0\}$ 。然后 $\{0\}$ 是 $\mathbb{Z}_8$ 的一个 cdf-吸收理想, 但 $\{0\}(+) \mathbb{Z}_8$ 不是 $\mathbb{Z}_8(+) \mathbb{Z}_8$ 的一个 cdf-吸收理想。为了看到这一点, 请考虑 $x = (2, 0), y = (0, 2)$ 。然后 $a^3 - b^3 = (8, 0) = (0, 0) \in \{0\}(+) \mathbb{Z}_8$ 但是 $a - b = (2, -2) \notin \{0\}(+) \mathbb{Z}_8$ 和 $a^2 + ab + b^2 = (4, 4) \notin \{0\}(+) \mathbb{Z}_8$ 。

回忆一下, 如果对于任意的 $x \in R$ [2], $x^{n+1} \in I$ 导致 $x^n \in I$, 那么 R 的适当理想 I 被称为正整数 n 的 n -半吸收。

接下来, 我们考虑当 $\{0\}(+)M$ 是 $R(+)M$ 的一个 cdf-吸收理想时的情况。

命题 2.22. 让 M 是一个非零的 R -模。然后, $\{0\}(+)M$ 是 $R(+)M$ 的一个 cdf-吸收理想当且仅当 $\{0\}$ 是 R 的一个 2-半吸收理想并且 $\{0\}$ 是 R 的一个 cdf-吸收理想。

证明. 首先假设 $\{0\}(+)M$ 是 $R(+)M$ 的一个 cdf-吸收理想。假设 $\{0\}$ 不是 R 的一个 2-半吸收理想。那么存在 $a \in R$, 使得 $a^3 = 0$ 但是 $a^2 \neq 0$ 。令 $x = (a, 0)$ 和 $y = (0, m)$ 对于某个 $m \in M$ 成立。那么 $x^3 - y^3 = (a^3, 0) = (0, 0) \in \{0\}(+)M$ 。因此, 根据假设, $x - y = (a, -m) \in \{0\}(+)M$ 或 $x^2 + xy + y^2 = (a^2, am) \in \{0\}(+)M$, 这是矛盾的。因此, $\{0\}$ 是 R 的 2-半吸收理想。现在, 设 $a^3 - b^3 \in \{0\}$ 。然后通过考虑 $x = (a, 0)$ 和 $y = (b, 0)$ 可以看出 $\{0\}$ 是 R 的 cdf-吸收理想。反之, 假设 $\{0\}$ 是 R 的一个 cdf-吸收理想。令 $x^3 - y^3 \in \{0\}(+)M$, 其中 $x, y \in R(+)M$, $x = (a, m_1)$ 和 $y = (b, m_2)$ 。由于 $\{0\}$ 是 R 和 $a^3 - b^3 \in \{0\}$ 的一个 cdf-吸收理想, 我们有 $a^2 + ab + b^2 \in \{0\}$ 或 $a - b \in \{0\}$ 。如果 $a^2 + ab + b^2 \in \{0\}$, 则 $x^2 + xy + y^2 \in \{0\}(+)M$ 。如果 $a - b \in \{0\}$, 则 $x - y \in \{0\}(+)M$ 。因此, $\{0\}(+)M$ 是 $R(+)M$ 的一个 cdf-吸收理想。□

在下一个结果中, 我们研究并合环中的 cdf-吸收理想。设 A, B 是交换环, $f: A \rightarrow B$ 是同态, J 是 B 的一个理想。回忆一下, 是 A 和 B 关于 f 沿着 J 的结合。是子环 $A \bowtie_J B = \{(a, f(a) + j) \mid a \in A, j \in J\}$ 的一部分, 属于 $A \times B$ [9]。

定理 2.23. 设 A 和 B 是交换环, $f: A \rightarrow B$ 是同态, J 是 B 的理想, I 是 A 的非零真理想。然后, $I \bowtie_J B$ 是 $A \bowtie_J B$ 的 cdf-吸收理想当且仅当 I 是 A 的 cdf-吸收理想。

证明. 如果 $I \bowtie_J B$ 是 $A \bowtie_J B$ 的一个 cdf-吸收理想, 则很容易看出 I 是 A 的一个 cdf-吸收理想。

反之, 假设 I 是 A 的一个非零 cdf-吸收理想。令 $x = (a, f(a) + j_1), y = (b, f(b) + j_2) \in A \bowtie_J B$ 满足 $x^3 - y^3 \in I \bowtie_J B$ 。由于 $a^3 - b^3 \in I$ 和 I 是 A 的非

零 cdf-吸收理想, 我们有 $a^2 + ab + b^2 \in I$ 或 $a - b \in I$ 。如果 $a^2 + ab + b^2 \in I$, 则

$$x^2 + xy + y^2 =$$

$$(a^2 + ab + b^2, f(a^2 + ab + b^2) + j_1(2f(a) + j_1 + f(b)) + j_2(2f(b) + j_2 + f(a))) \in I \bowtie_J B.$$

类似地, 如果 $a - b \in I$, 则

$$x - y = (a - b, f(a - b) + j_1 - j_2) \in I \bowtie_J B.$$

因此 $I \bowtie_J B$ 是 $A \bowtie_J B$ 的一个 cdf-吸收理想。 $\square$

以下示例表明, 在定理 2.23 中, I 是一个非零理想这一点再次至关重要。

示例 2.24. 设 $A = B = J = \mathbb{Z}_8$, $f = 1_A : A \rightarrow A$ 和 $I = \{0\}$ 。则 $\{0\}$ 是 $\mathbb{Z}_8$ 的一个 cdf-吸收理想。但 $\{0\} \bowtie_{\mathbb{Z}_8} \mathbb{Z}_8$ 不是 $\mathbb{Z}_8 \bowtie_{\mathbb{Z}_8} \mathbb{Z}_8$ 的 cdf-吸收理想。为了证明这一点, 考虑 $x = (2, 0), y = (0, 2)$ 。那么 $a^3 - b^3 = (8, 8) = (0, 0) \in \{0\} \bowtie_{\mathbb{Z}_8} \mathbb{Z}_8$, 但是 $a - b = (2, -2) \notin \{0\} \bowtie_{\mathbb{Z}_8} \mathbb{Z}_8$ 和 $a^2 + ab + b^2 = (4, 4) \notin \{0\} \bowtie_{\mathbb{Z}_8} \mathbb{Z}_8$ 。

REFERENCES

- [1] H. Ahmed and M. Achraf, *S-prime ideals of a commutative ring*, Beitr. Algebra Geom., **61** (3) (2020), 533-542.
- [2] D. F. Anderson and A. Badawi, *On n-closed ideals of commutative rings*, Journal of Algebra and Its Application **16** (1) (2017), 21 pages.
- [3] D. F. Anderson, A. Badawi, J. Coykendall, *Square-difference factor absorbing ideals of a commutative ring*, Journal of Algebra and Its Applications, <https://doi.org/10.1142/S0219498826501987>.
- [4] D. F. Anderson and A. Badawi, *On n-absorbing ideals in commutative rings*, Comm. Algebra, **39** (2011), 1646-1672.
- [5] D. D. Anderson and M. Bataineh, *Generalizations of prime ideals*, Comm. Algebra, **36** (2008), 686-696.
- [6] D. D. Anderson and M. Winders, *Idealization of a module*, J. Commut. Algebra, **1** (2009), 3-56.
- [7] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Westview Press, Boulder, CO, (2016).
- [8] A. Badawi, *On 2-absorbing ideals of commutative rings*, Bull. Austral. Math. Soc., **75** (2007), 417-429.
- [9] M. D Anna and M. Fontana, *An amalgamated duplication of a ring along an ideal: the basic properties*, J. Algebra Appl. **6** (2007), 443-459.
- [10] F. Farshadifar, *Nil-prime ideals of a commutative ring*, <https://arxiv.org/abs/2409.19950v4>.
- [11] J. Huckaba, *Rings with Zero Divisors*, Marcel Dekker, New York/Basel, 1988.