具有霍普夫结构的精确真空解在广义相对论中的应用

Junpei Harada*
Health Sciences University of Hokkaido, 1757 Kanazawa,
Tobetsu-cho, Ishikari-gun, Hokkaido 061-0293, Japan

(10Dated: 2025 年 6 月 25 日)

给出一个精确的真空爱因斯坦方程解，其结构基于霍普夫纤维化。该解使用了一个测地线零矢量场，它定义了一种扭结共轭，并以克尔-施尔德形式出现在度规中。这个解属于佩特罗类型 D，并涉及两个参数。值得注意的是，由此产生的时空是正则的，没有曲率奇点。克雷奇曼标量和陈-庞加莱标量均不为零且在整个时空中保持有限。此外，纽曼-彭罗斯韦尔标量 Ψ_2 具有非零的实部和虚部，反映了引力场的拓扑非平凡性质。该时空还允许两个 Killing 矢量场和一个 Killing-Yano 张量，它诱导了一个关联的 Killing 张量，揭示了其隐藏对称性。推导过程简单且自包含，提供了一种透明且几何引导的方法来寻找广义相对论中的新精确解。

I. 介绍

霍普纤维丛 [1]，将 3-球面 S^3 映射到 S^2 上，具有联接的圆形纤维，展示了一种优雅的拓扑结构，其影响范围涵盖了物理学的不同领域 [2]。例如，在电磁学中，被称为 hopfion 的联结和打结线场配置作为真空麦克斯韦方程的精确解出现 [3, 4]。这些配置也在材料中被实验观察到。在重力理论中，这些结构已经在线性化引力和电磁学中使用统一的形式主义 [5] 构建，并且最近，反自对偶时空被证明与 hopfions [6] 相关。这样的发展自然提出了一个问题：广义相对论能否尽管其内在的非线性，仍然允许反映 Hopf 纤维化拓扑丰富性的精确解？

这项工作提出了真空爱因斯坦方程的一个精确解，该解使用了由霍普夫纤维化构建的零矢量场的 Kerr-Schild 度规。所得的度规为 Petrov 类型 D，并包含两个实参数。它没有曲率奇点，在整个时空中克雷施曼标量和陈-庞特里亚金标量都是有限且非零的。该解还允许两个杀矢量和一个非平凡的 Killing-Yano 张量，这生成了一个相应的 Killiing 张量，并揭示了隐藏对称性的存在。

构造简单且自包含，暗示在广义相对论中，拓扑非平凡的几何结构可能比之前预期的更容易获得。这里采用的方法可能会提供一条实用途径来发现更多的精确解。

本文组织如下。第 II 节介绍了与构造相关的 Kerr-Schild 度量的基本性质。第 III 节从 Hopf 纤维化导出一个测地线零矢量场。第 IV 节给出了所得的精确解。第 V 节总结了该解的主要特征。

II. 克尔-沙尔德度量

Kerr–Schild 度量 [7] 具有如下形式

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = (\eta_{\mu\nu} + H k_\mu k_\nu)\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \quad (1)$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 是 Minkowski 度量，H 是一个实函数，并且 k_μ 对于 $g_{\mu\nu}$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 来说都是零向量，

$$g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0, \quad k^\mu = g^{\mu\nu} k_\nu = \eta^{\mu\nu} k_\nu. \quad (2)$$

度规张量的逆线性依赖于 H

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - H k^\mu k^\nu, \quad (3)$$

这是一个精确方程。克尔-斯奇德度量的行列式满足 $\det(g_{\mu\nu}) = \det(\eta_{\mu\nu})$。因此，一旦确定了零向量 k_μ 和一个实函数 H，克尔-斯奇德度量就被唯一地确定。

若干真空爱因斯坦方程的精确解可以表示为克尔-施尔德形式。在坐标 (t, x, y, z) 中，带有 $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$，史瓦西度规取如下形式：

$$k_\mu = \left(1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right), \qquad H = \frac{2M}{r}, \quad (4)$$

而克尔度规 [8] 给出为：

$$k_\mu = \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r}\right), \; H = \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2}, \quad (5)$$

* jharada@hoku-iryo-u.ac.jp

其中参数 r 不是坐标，而是由空条件 $k_\mu k^\mu = 0$ 在史瓦西和克尔度规中隐式确定的。

在光锥坐标下，$x^0 = v = (t+z)/\sqrt{2}$,$x^1 = u = (t-z)/\sqrt{2}$,$x^2 = x$,$x^3 = y$ 与 $\eta_{01} = \eta_{10} = -1$ 和 $\eta_{22} = \eta_{33} = 1$，pp 波时空中具有以下形式：

$$k_\mu = (0,1,0,0), \qquad H_{,xx} + H_{,yy} = 0, \tag{6}$$

其中 $H = H(u,x,y)$ 和 $H_{,xx} = \partial^2 H/\partial x^2$。

在所有这些例子中—Schwarzschild，Kerr 和 pp 波—零向量 k_μ 是（仿射参数化的）测地线，相对于 $g_{\mu\nu}$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 都是如此，满足

$$k^\nu \nabla_\nu k_\mu = k^\nu \partial_\nu k_\mu = 0, \tag{7}$$

其中 ∇_μ 是协变导数。

III. 基于霍普夫的零向量

Hopf 纤维化 [1] 被用于构造零向量 k_μ 如下。两个复数 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 满足 $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ 可以参数化为

$$z_1 = \frac{2(x+iy)}{r^2 - t^2 + 1 + 2it}, \quad z_2 = \frac{r^2 - t^2 - 1 - 2iz}{r^2 - t^2 + 1 + 2it}, \tag{8}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$。一对复数 (z_1, z_2) 定义了 3-球面 S^3 上的坐标。在 S^3 上的每一点，考虑以下映射：

$$(z_1, z_2) \to \frac{z_1}{z_2} = \frac{2(x+iy)}{r^2 - t^2 - 1 - 2iz} =: \phi(t,x,y,z), \tag{9}$$

其中 ϕ 是一个复标量。由于 $z_1/z_2 = e^{i\alpha} z_1/(e^{i\alpha} z_2)$ 对于 $\alpha = [0, 2\pi)$，圆 $e^{i\alpha}(z_1, z_2)$ 上的每一点在 S^3 中映射到单个点 $z_1/z_2 = \phi$。因此，从 z_1/z_2 到 S^3 上的点的逆映射形成了一个 S^1 纤维 [1]。

一个切向量 k^μ 可以通过定义此纤维 S^1 来确定

$$F_{\mu\nu} k^\nu = 0, \tag{10}$$

其中

$$F_{\mu\nu} := \frac{1}{i}(\partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi - \partial_\nu \phi^* \partial_\mu \phi). \tag{11}$$

引入虚单位 i 使得 $F_{\mu\nu}$ 是实数。向量 k_μ 还需要满足零条件 $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$ 和测地线条件 $k^\nu \partial_\nu k_\mu = 0$。发现以下的 k_μ 满足这些条件：

$$k_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(1+(t-z)^2)} \begin{pmatrix} 1+(t-z)^2+x^2+y^2 \\ -2(t-z)x - 2y \\ -2(t-z)y + 2x \\ 1+(t-z)^2 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中选择了 $t-z$ 方向而不是 $t+z$，并引入了因子 $1/\sqrt{2}$ 以方便后来的光锥坐标计算。一形式 $k_\mu \mathrm{d}x^\mu$ 在 xy 平面下的旋转是不变的。

由于 k_μ 依赖于 $t-z$，采用光锥坐标是方便的。对于 $x^0 = v = (t+z)/\sqrt{2}$,$x^1 = u = (t-z)/\sqrt{2}$,$x^2 = x$,$x^3 = y$，零向量 k_μ 给出为

$$k_\mu = \left(1, \frac{x^2+y^2}{2u^2+1}, -\frac{2ux + \sqrt{2}y}{2u^2+1}, -\frac{2uy - \sqrt{2}x}{2u^2+1}\right). \tag{13}$$

图 1 比较了 $\boldsymbol{k} = (k_u, k_x, k_y)$ 与常数向量 $\boldsymbol{k} = (1,0,0)$ 表示的 pp 波。在图中，竖直轴对应于 u-轴。很明显，方程 (13) 中的零向量展现出一种与 pp 波定性不同的扭曲结构。

IV. 常规的 PETROV D 时空

来自方程 (13) 的 k_μ 用于 Kerr-Schild 度规

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + H k_\mu k_\nu \,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu. \tag{14}$$

如果 H 是 u,$H = H(u)$ 的函数，那么 Ricci 张量的两个分量仅包含一阶导数

$$R^2{}_2 = R^3{}_3 = \frac{2}{2u^2+1}\left(uH'(u) + \frac{2u^2-1}{2u^2+1}H(u)\right), \tag{15}$$

其中 $H'(u) = \mathrm{d}H(u)/\mathrm{d}u$。求解 $R^2{}_2 = 0$，得到

$$H(u) = \frac{Nu}{2u^2+1} \tag{16}$$

其中 N 是一个积分常数。如果 $H(u)$ 由这个函数给出，则里奇张量的所有分量都为零。因此，方程 (14) 中的度规，连同方程 (13) 和 (16)，表示真空爱因斯坦方程的一个精确解。

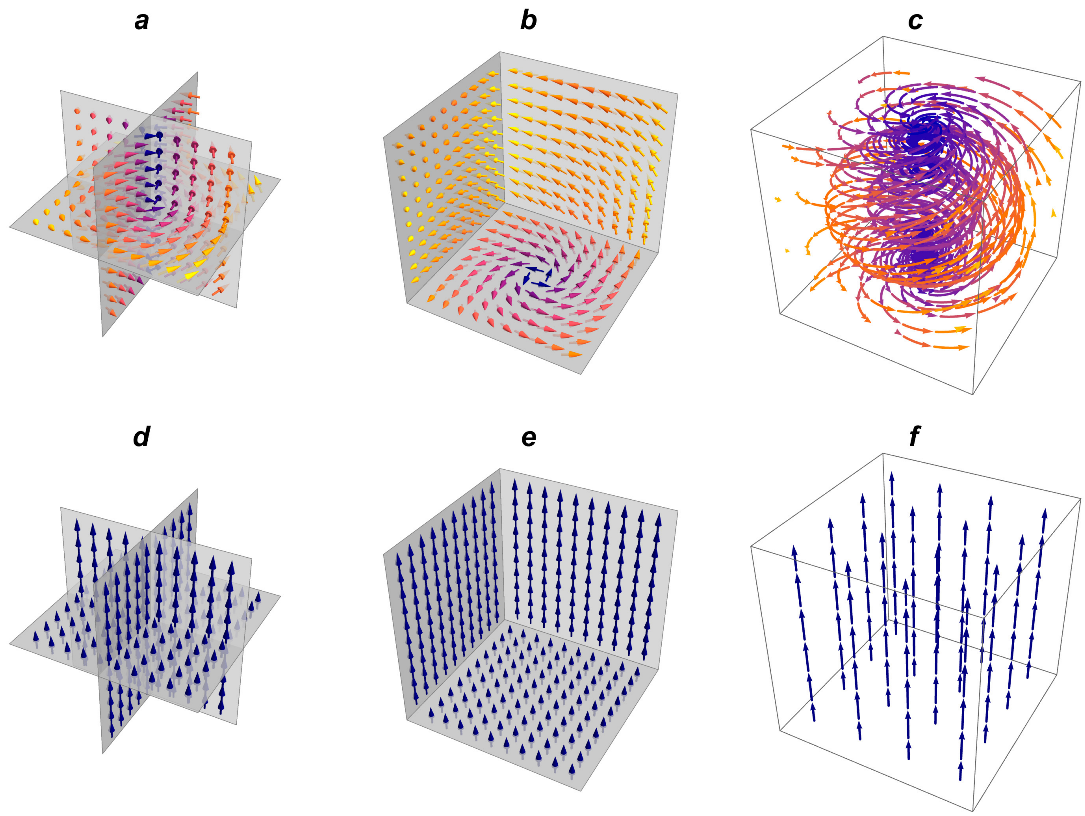

图 1. **共轭零向量场（a, b, d, e）及其积分曲线（c, f）**。面板（a）–（c）对应当前解 [方程 (13)]，而面板（d）–（f）对应 pp-波。垂直轴表示 u 轴。颜色指示欧几里得 (u,x,y) 空间中向量的大小（较亮的颜色表示较大的数值）。

通过恢复一个维度参数，得到

$$k_\mu = \left(1, \frac{x^2+y^2}{2(u^2+b^2)}, -\frac{ux+by}{u^2+b^2}, -\frac{uy-bx}{u^2+b^2}\right), \tag{17}$$

和

$$H(u) = \frac{Nu}{u^2+b^2}, \tag{18}$$

其中 $b>0$ 是一个具有长度维度的参数。注意，通过重新定义 x 和 y，可以将 $b<0$ 吸收掉，因此不失去一般性地假设 $b>0$，并通过构造排除 $b=0$。积分常数 N 据此重新定义。还值得注意的是规范场 $A_\mu := H(u)k_\mu$ 满足平坦时空中真空的麦克斯韦方程，$\eta^{\mu\rho}\partial_\rho(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0$。

最终的解的形式为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 =& -2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \frac{Nu}{u^2+b^2} \\ &\times \left[\mathrm{d}v + \frac{x^2+y^2}{2(u^2+b^2)}\mathrm{d}u - \frac{ux+by}{u^2+b^2}\mathrm{d}x - \frac{uy-bx}{u^2+b^2}\mathrm{d}y\right]^2. \end{aligned} \tag{19}$$

在极限 $N\to 0$ 或 $u\to\pm\infty$ 下，该解渐近地接近闵可夫斯基度量。

该解允许两个 Killing 向量场 ξ^μ，在坐标 (v,u,x,y) 中给出为

$$\xi^\mu = (1,0,0,0),\ (0,0,y,-x) \tag{20}$$

和一个反对称的 Killing–Yano 张量 $f_{\mu\nu}$，

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ -b & 0 & y & -x \\ 0 & -y & 0 & u \\ 0 & x & -u & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

满足 $\nabla_\mu f_{\nu\rho} + \nabla_\nu f_{\mu\rho} = 0$。从这个 Killing–Yano 张量出发，可以构造出 Killing 张量 $K_{\mu\nu}$，

$$K_{\mu\nu} := f_{\mu\rho} f_{\nu\sigma} g^{\rho\sigma}. \tag{22}$$

该张量 $K_{\mu\nu}$ 满足 $\nabla_\rho K_{\mu\nu} + \nabla_\mu K_{\nu\rho} + \nabla_\nu K_{\rho\mu} = 0$，并且它是不可约的，也就是说它不能写成 $\xi_{(\mu}\xi_{\nu)}$ 和度规 $g_{\mu\nu}$ 的线性组合。

由于 $R_{\mu\nu}=0$，Kretschmann 标量 $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ 等于 Weyl 张量的平方，

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12N^2(u^6-15b^2u^4+15b^4u^2-b^6)}{(u^2+b^2)^6}, \tag{23}$$

而 Chern–Pontryagin 标量 ${}^\star R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ 为

$${}^\star R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = {}^\star C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{24N^2bu(3u^4-10b^2u^2+3b^4)}{(u^2+b^2)^6}, \tag{24}$$

其中 ${}^\star R_{\mu\nu\rho\sigma}=(1/2)\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}$。

纽曼–彭罗斯韦尔标量是

$$\Psi_2 = -\frac{N}{2(u+ib)^3}, \quad \Psi_0=\Psi_1=\Psi_3=\Psi_4=0. \tag{25}$$

这表明解属于 Petrov D 型，如同史瓦西和克尔度规。无论是实部还是虚部，Ψ_2 都不为零，就像在克尔情况下一样。

使用 Newman–Penrose 标量，曲率不变量可以表示为特别简单的形式

$$I_1 = C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = +48\,\mathrm{Re}\,\Psi_2^2 = +\,\mathrm{Re}\,\frac{12N^2}{(u+ib)^6}, \tag{26}$$

$$I_2 = {}^\star C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = -48\,\mathrm{Im}\,\Psi_2^2 = -\,\mathrm{Im}\,\frac{12N^2}{(u+ib)^6}, \tag{27}$$

这可以从恒等式 [9] 推导出

$$I_1 - iI_2 = 16\big(3\Psi_2^2+\Psi_0\Psi_4-4\Psi_0\Psi_3\big). \tag{28}$$

大小 $|I_1-iI_2|$ 是

$$\sqrt{(I_1)^2+(I_2)^2} = 48|\Psi_2|^2 = \frac{12N^2}{(u^2+b^2)^3}. \tag{29}$$

这个表达式处处有界且非零，没有曲率奇点，因为 $b>0$。它仅取决于 u 并且与 v,x,y 无关，表明一个沿 $+z$ 方向以光速传播并具有平面波前的波动。由于对 u^{-6} 的依赖性，曲率集中在 u 轴的原点附近，并且远离该点迅速减小。

表 I 总结了几种克尔—施-child 形式的解。

接下来，考虑 $H=H(u,x,y)$ 的情况。当 H 取决于 u、x 和 y 时，爱因斯坦方程变得更加复杂，尽管它们仍然是关于 $H(u,x,y)$ 的线性方程，因此仍然可能可以解决。此外，三个 Newman–Penrose 里奇标量—实数标量 Φ_{22} 和复数 Φ_{02} 及 Φ_{12}—为零。

$$\Phi_{22}=\Phi_{02}=\Phi_{12}=0. \tag{30}$$

剩下的里奇标量—两个实数（Φ_{00},Φ_{11}）、一个复数（Φ_{01}）和里奇标量 R—不为零。

其中，Φ_{00} 产生拉普 lace 方程

$$H_{,xx}+H_{,yy}=0. \tag{31}$$

这意味着 H 必须是调和函数。剩余的量 Φ_{11}，Φ_{01} 和里奇标量 R 很复杂，本文中不再进一步分析。至于纽曼–彭罗斯威尔标量，$\Psi_0=\Psi_1=0$ 而其他的一般不为零。因此，在这种设置下可能存在佩特罗类型 II 的引力波解，尽管此类解的存在仍然是一个开放问题。

最后，以下度量，在 $-z$ 方向上传播曲率，显然是一个精确解，

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\frac{Nv}{v^2+b^2} \times\left[\frac{x^2+y^2}{2(v^2+b^2)}\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}u-\frac{vx+by}{v^2+b^2}\,\mathrm{d}x-\frac{vy-bx}{v^2+b^2}\,\mathrm{d}y\right]^2. \tag{32}$$

如果能找到结合方程 (19) 和 (32) 的解，则可以研究它们的相互作用和稳定性。尽管由于爱因斯坦方程的非线性，构建这样的解是非平凡的，但这一提议可能会激发进一步的研究。

V. 结论

本工作提出了爱因斯坦场方程在 Kerr–Schild 形式下的一个精确真空解，该解是使用从 Hopf 纤维化导出的测地线零矢量场构建的。矢量场定义了一个具有非平凡拓扑的扭曲零线汇。该解涉及两个参数，并且属于 Petrov 类型 D，具有一个不为零的韦尔标量 Ψ_2，其既包含实部也包含虚部。所得到的时空处处正则，没有曲率奇点。克雷施曼标量和陈–庞特里亚金标量都是有限且非零的，表明存在一个真正非线性和拓扑上非平凡的引力场。该时空还允许两个 Killing 矢量场和一

表 I. 一组精确解的列表，这些解为真空爱因斯坦方程的 Kerr-Schild 形式，$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + Hk_\mu k_\nu)\,dx^\mu dx^\nu$，其中 $\eta_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基度规，H 是一个实标量函数，而 k_μ 是一个测地线零向量。(1) 解的名称。(2) 一形式 $k_\mu dx^\mu$。对于 Schwarzschild 和 Kerr 解使用了笛卡尔坐标，而对于 pp 波以及当前的工作则使用光锥坐标，$u = 2^{-1/2}(t-z), v = 2^{-1/2}(t+z)$。(3) 标量函数 H，或它满足的条件。(4) 非零的新曼–彭罗斯赖尔标量分量（所有其他均为零）。(5) 是否存在标量 $I_1 = C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$ 和 $I_2 = {}^\star C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$。(6) 彼得罗夫分类。(7) 是否存在曲率奇点。

Name (1)	$k_\mu dx^\mu$ (2)	H (3)	Weyl (4)	I_1, I_2 (5)	Type (6)	Regularity (7)
Schwarzschild	$dt + \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz$ [a]	$2M/r$	Ψ_2	$I_1 \neq 0,\ I_2 = 0$	D	Singular
Kerr	$dt + \frac{rx+ay}{r^2+a^2}dx + \frac{ry-ax}{r^2+a^2}dy + \frac{z}{r}dz$ [a]	$\frac{2Mr^3}{r^4+a^2z^2}$	Ψ_2	$I_1 \neq 0,\ I_2 \neq 0$	D	Singular
pp-wave	du	$H_{,xx} + H_{,yy} = 0$ [b]	Ψ_4	$I_1 = I_2 = 0$	N	Regular
Present work	$dv + \frac{x^2+y^2}{2(u^2+b^2)}du - \frac{ux+by}{u^2+b^2}dx - \frac{uy-bx}{u^2+b^2}dy$ [c]	$\frac{Nu}{u^2+b^2}$	Ψ_2	$I_1 \neq 0,\ I_2 \neq 0$	D	Regular

[a] In both the Schwarzschild and Kerr solutions, the parameter r is implicitly determined by the null condition $g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = \eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$.
[b] 函数 H 取决于 u,x 和 y，即 $H = H(u, x, y)$。
[c] 参数 b 具有长度的量纲并满足 $b > 0$。

个非平凡的 Killing-Yano 张量，这表明存在隐藏的几何对称性。

据目前所知，这似乎是第一个由 Hopf 结构的零向量场构造出来的无奇性真空精确解，并且属于 Petrov 类型 D。值得注意的是，该度量未被列入标准参考文献 [10] 中，此处给出的推导过程非常简单且完全自洽。这一构建展示了由几何动机驱动的零结构——特别是那些具有非平凡拓扑结构如 Hopf 纤维化——可以作为在广义相对论中发现精确解的强大工具。这表明进一步探索此类结构可能会揭示出超出已知目录的新类别物理相关时空。

ACKNOWLEDGMENTS

本工作受到日本学术振兴会科研费资助，项目编号：JP22K03599。

[1] H. Hopf, Über die abbildungen der dreidimensionalen sphäre auf die kugelfläche, Math. Ann. **104**, 637 (1931) .

[2] H. Urbantke, The Hopf fibration—seven times in physics, J. Geom. Phys. **46**, 125 (2003) .

[3] A. F. Rañada, A topological theory of the electromagnetic field, Lett. Math. Phys. **18**, 97 (1989) .

[4] H. Kedia, I. Bialynicki-Birula, D. Peralta-Salas, and W. T. M. Irvine, Tying knots in light fields, Phys. Rev. Lett. **111**, 150404 (2013), arXiv:1302.0342 [math-ph] .

[5] T. Smołka and J. Jezierski, Simple description of generalized electromagnetic and gravitational hopfions, Class. Quant. Grav. **35**, 245010 (2018), arXiv:1802.01467 [gr-qc] .

[6] S. Sabharwal and J. W. Dalhuisen, Anti-self-dual spacetimes, gravitational instantons and knotted zeros of the Weyl tensor, JHEP **07**, 004 (2019), arXiv:1904.06030 [hep-th] .

[7] R. P. Kerr and A. Schild, Republication of: A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations, Gen. Rel. Grav. **41**, 2485 (2009) .

[8] R. P. Kerr, Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963) .

[9] C. Cherubini, D. Bini, S. Capozziello, and R. Ruffini, Second order scalar invariants of the Riemann tensor: Applications to black hole space-times, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 827 (2002), arXiv:gr-qc/0302095 .

[10] H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cam-

bridge, England, 2003) .