

跨音速等离子体在磁喷嘴中加速的全局性质和稳定性

N. Sheth,¹ A. Smolyakov,¹ J. Deguire,¹ S. Pande,² and P.N. Yushmanov³

¹*Department of Physics and Engineering Physics, University of Saskatchewan, Saskatoon SK S7N 5E2, Canada.*

²*Indian Institute of Technology (BHU), Varanasi, India*

³*TAE Technologies Inc., 19631 Pauling, Foothill Ranch, California 92610, USA*

(10*Electronic mail: nishka.sheth@usask.ca.)

(10Dated: 2025 年 6 月 28 日)

研究表明，在收敛-发散磁场（磁喷嘴）中，等离子体的跨音速加速遵循完全由磁场定义的独特全局解。这种在傍轴近似下先前通过解析方法获得的解在这里与轴对称二维（ $r-z$ ）磁流体力学（MHD）模拟结果进行了比较。研究表明，解析解很好地描述了靠近轴线区域的情况，并且也可以应用于任意磁表面。不同长度喷嘴和等离子体速度边界条件下的模拟表明，等离子体流动通过速度和压力剖面中的激波样过渡切换到独特的跨音速加速轮廓。具有任意（非真空）初始磁场的模拟展示了磁场的整体调整，使得跨音速加速速度轮廓遵循经过修改磁场的解析预测。

arxiv:2506.20880v1 中译本

扩展磁场（磁喷嘴）和收敛-发散（磁镜）配置对于电推进¹⁻³、材料加工及先进制造⁴以及聚变^{5,6}应用具有研究价值。磁镜，采用收敛-发散磁场配置用于在聚变装置中约束等离子体。

等离子体在磁喷嘴中的加速在早期实验^{7,8}中得到了证明。由磁场引导的跨音速等离子体加速是无电极等离子体推进器空间推进的基础^{2,9}，也被认为是在先进材料加工中的等离子体源⁴。在发散磁场中等离子体的膨胀是开放镜像系统^{5,10}中的偏滤器中的关键过程，这些系统用于接受并将大量能量通量导向到材料壁上。由磁场引导和控制的等离子体流是在所有这些应用中的核心问题。

稳态流动的一般平衡方程在单流体和两流体磁流体力学（MHD）^{11,12}中被建立，特别是为了应用到聚变等离子体的平衡与稳定性问题^{13,14}上。类似的问题也涉及空间中的等离子体流动¹⁵、太阳风加速¹⁶以及天体物理风和喷流¹⁷。总的来说，这些模型推广了 Grad-Shafranov 平衡问题，将惯性力包含到平衡中。

惯性力与电场（或压力）力的平衡是磁喷嘴中加速和平衡的主要因素。在推进应用的背景下，可以制定一个跨音速等离子体加速的简单模型，在准二维（傍轴）近似下，该模型可以有效简化为一维问题¹⁸⁻²¹。对于冷离子和等温电子，当 $T_e = const$ 成立时，归一化的离子速度 $M = V_{\parallel}/C_s$ 可以简化为方程，

$$\frac{M^2}{2} = \ln \left(\exp(c_m) M \frac{B_m}{B(z)} \right), \quad (1)$$

其中， C_s 是离子声速， $B = B(z)$ 是沿喷嘴（接近轴线 $r/a \ll 1$ ）的距离上的磁场函数，而 B_m 是磁场的最大值。常数 c_m 的值定义了特解。图 1 展示了本文中使用的收敛-发散磁场解决方案的一个示例图。方

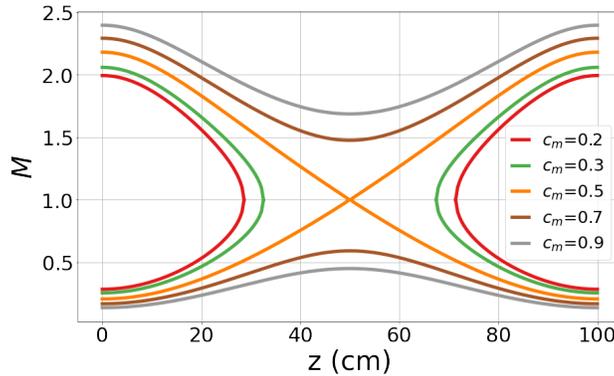


图 1: 等离子体流在收敛-发散磁喷嘴中的解的典型示意图由方程 (1) 给出。 $c_m < 0.5$ 曲线定义了亚音速轮廓， $c_m > 0.5$ 定义了超音速轮廓。加速跨音速轮廓由与 $c_m = 0.5$ 的分离线给出。

程 (1) 的精确解可以用兰贝特函数 $W(y)$ 表示为²¹，该函数定义为方程 $W \exp(W) = y$ 的解。

$$M(z) = \left[-W \left[-b^2(z) \exp(-2c_m) \right] \right]^{1/2} \quad (2)$$

其中， $b(z) = B(z)/B^m$ 。沿着带有 $c_m = 0.5$ 的跨音速解的等离子体速度完全由磁场喉部的正则化条件定义，并遵循方程 (2) 所表达的磁场分布。这是一条单一独特的加速跨音速解，用图 1 中的分离曲线表示。另一条代表减速解的分离曲线可能对天体物理学中的吸积物体或直接将等离子体动能转化为电能有兴趣，但在这里不予考虑。亚音速部分， $M < 1$ ，超音速加速解由拉姆伯特函数的 $M = [-W_0(-b^2(z)/e)]^{1/2}$ 支描述，而超音速部分则由另一支 $M = [-W_{-1}(-b^2(z)/e)]^{1/2}$ 给出。完整的加速解决方案由两个分支 $W_0(y)$ 和 $W_{-1}(y)$ 组成，它们在对应于最大磁场 B_m 的点 $M = 1$ 处平滑地匹配^{22,23}。

对于在喉部具有最大磁场 B_m 的收敛-发散磁喷嘴, 图 1 中所有可能的解可以分为几组, 并可以根据喷嘴入口处的速度值 $z=0$ 进行分类。在喷嘴入口处, 跨音速解具有 $M(0) = [-W_0(-(B(0)/B_m)^2/e)]^{1/2}$, 而在喷嘴末端为 $M(L) = [-W_{-1}(-(B(L)/B_m)^2/e)]^{1/2}$ 。具有 $V_{\parallel}/C_s < M(0)$ 的解保持纯亚音速, 并且对于 $V_{\parallel}/C_s > [-W_{-1}(-(B(0)/B_m)^2/e)]^{1/2}$ 在整个区域内保持纯超音速。具有边界值 (在 $z=0$ 处) 介于两条分离曲面 $[-W_0(-(B(0)/B_m)^2/e)]^{1/2} < V_{\parallel}/C_s < [-W_{-1}(-(B(0)/B_m)^2/e)]^{1/2}$ 之间的解是多值的且不物理。方程 (2) 中的解析解是在简化的情况下获得的, 这相当于傍轴极限的有效一维情况。发现这些解是鲁棒的, 因为在相似的一维傍轴模型中通过漂移动力学和流体模拟实现了它们, 即, 等离子体流动收敛到相当宽范围初始条件²⁴⁻²⁶下的解析跨音速解。从理论上证明参考文献 21 中的模型可以重新表述为沿任意磁场表面的一维问题相对直接。本文的目标是研究在完整二维轴对称 ($r-z$) 几何中等离子体加速, 并将其与解析预测进行比较。在这里, 我们展示方程 (2) 中的理论解沿磁面应用时仍然有效。参考文献显示了 2D MHD 模型中跨音速加速的鲁棒行为。²⁷

我们在这里采用标准的理想单流体 MHD 模型。可以证明, 在稳态下, 单流体 MHD 中的轴对称等离子体流动精确地沿着磁面^{11,13}。这一条件与参考文献中近轴模型的近似完全匹配。²¹ 值得注意的是, 早期大多数关于磁场喷嘴内等离子体流动的模型都基于这样一个假设: 即基础磁场 (来自外部线圈) 是固定的且不会发生变化。在这里, 我们放松这一假设, 并允许磁场所做的全面修改最终饱和状态由 MHD 演化方程自洽决定。

理想单流体 MHD 的守恒形式的标准方程如下,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} - \mathbf{B} \mathbf{B} + p_T \mathbf{I}) = 0, \quad (3b)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_T}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{V}(\varepsilon_T + p_T) - \mathbf{B}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})] = 0, \quad (3c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{V}) = 0. \quad (3d)$$

这里, 总等离子压 $p_T = p + \frac{B^2}{2}$, 以及总内能密度 $\varepsilon_T = \frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 + \rho \varepsilon + \frac{B^2}{2}$ 。文中使用的标准符号表示物理变量: 质量密度、等离子流速、磁场、动能压力和内能分别为 $\rho, \mathbf{V}, \mathbf{B}, p$ 和 $\varepsilon = p/\rho(\gamma-1)$ 。

在我们的基本情况下, 我们从由环面磁通函数 ψ 定义的真空无源磁场 \mathbf{B}_0 初始化模拟, 形式为²⁸,

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad (4)$$

其中,

$$\psi = \frac{r^2 B_*}{2} \left(1 - \frac{\alpha L}{\pi r} \cos \left(\frac{2\pi z}{L} \right) I_1 \left(\frac{2\pi r}{L} \right) \right), \quad (5)$$

给出磁场的形式,

$$B_r = -B_* \alpha \sin \left(\frac{2\pi z}{L} \right) I_1 \left(\frac{2\pi r}{L} \right), \quad (6)$$

$$B_z = B_* \left(1 - \alpha \cos \left(\frac{2\pi z}{L} \right) I_0 \left(\frac{2\pi r}{L} \right) \right). \quad (7)$$

对于对称喷嘴, $0 < z < L$, 得到的镜像比 R 和膨胀比 K 相等 $R = K = (1+\alpha)/(1-\alpha)$, 其中 $R = B_m/B(0)$ 和 $K = B_m/B(L)$, 以及 $B_m = B_*(1+\alpha)$ 。我们在这里取值 $\alpha = 0.5$ 。

理想的 MHD 方程 (3) 在二维圆柱形 $r-z$ 几何中使用 Godunov 型开源 MHD 代码冥王星 v4.3²⁹ 求解。半径为 $a = 20$ 厘米和轴向长度为 $L = 100$ 厘米的圆柱喷嘴区域被均匀地划分为 156×256 个网格

点。我们选择了 van Leer 斜率限制器，HLLRiemann 求解器，抛物线重构方案，以及 RK3 时间步进，Courant 数为 0.5。

一般来说，磁场是随时间演化的。对于基本情况，初始力自由场的总磁场 \mathbf{B} 分解为一个不依赖于时间的背景分量 \mathbf{B}_0 ，由方程 (4) 给出和一个扰动 \mathbf{B}_1 ，使得 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ 。磁场以方程 (4) 的形式固有地满足螺线管条件并且无旋。背景磁场 \mathbf{B}_0 在所有边界上保持恒定，而 \mathbf{B}_1 的扰动则自由演化。这使得在 PLUTO 代码中启用背景分割选项成为可能。通过应用约束传输算法来维持 \mathbf{B}_1 的无散度条件。

我们从具有 $\mathbf{V} = 0$ 和均匀密度 ρ_0 的稳态等离子体状态初始化计算。在对称轴 $r = 0$ 处，强制执行轴对称条件；外径向边界 $r = a$ 将 ρ 和 \mathbf{V} 固定为其初始值。在喷嘴入口， $z = 0$ ，等离子体密度和轴向速度 (V_z) 的值保持为边界条件：

$$\rho = 4m_H n_0 \operatorname{sech}^2 \left(\kappa^2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) + \rho_0, \quad (8)$$

$$V_z = v_0 C_s \operatorname{sech}^2 \left(\kappa^2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right), \quad (9)$$

提供具有特征半径 a/κ 的局部等离子体注入，其中我们取 $\kappa = 2.6$ 。在喷嘴出口， $z = L$ ，施加外流条件。

这里，声速为 $C_s = \gamma p / \rho$ 。对于密度我们使用 $\rho_0 = 0.2 m_H n_0 \text{ g/cm}^3$ ，其中 $n_0 = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ， m_H 是氢的质量。一般来说，在各种聚变和推进场景中，等离子体压力可能是各向异性的。它通常由某个有效值 γ 来表征。不同 γ 对加速度的影响在参考文献 21 中进行了研究。由于这对本文的结果并非至关重要，为了简单起见，我们使用了 $\gamma = 1$ ，使得在选定的温度 $T = 300 \text{ eV}$ 下，有 $C_s = \sqrt{k_B T / m_H}$ 。在这篇论文中，我们将时间表示为阿尔芬时单位，记作 $\tau_A = L / V_A$ 。这里， V_A 指的是阿尔芬速度，定义为 $V_A = B_m / \sqrt{4\pi m_H n_0}$ 。此外，在下面的内容中，密度被归一化至 $\rho_m = 4m_H n_0 + \rho_0$ 。

稳态流动平衡是在特征离子声时间 $\tau_s = L / C_s$ 建立的，这个时间比阿尔芬时间长得多，这是由于我们的参数下的等离子体压力 $\beta = \tau_s^2 / \tau_A^2 \ll 1$ 较低。轴向等离子体密度随时间演化到平衡状态的过程如图 2a 所示，在经历数百个 τ_A 之后最终建立了稳态。径向密度分布基本上遵循边界条件轮廓，这在图 2b 中得到证明，该图显示了不同 z 位置处的径向密度分布。稳态下的等离子体速度和密度的二维剖面如图 3a 和 3b 展示了超音速加速，声速点 $V_{\parallel} = C_s$ 位于最大磁场位置（喷嘴喉部）。这些轮廓的时间演化，突出了向稳态的动态过渡，在补充视频中展示。

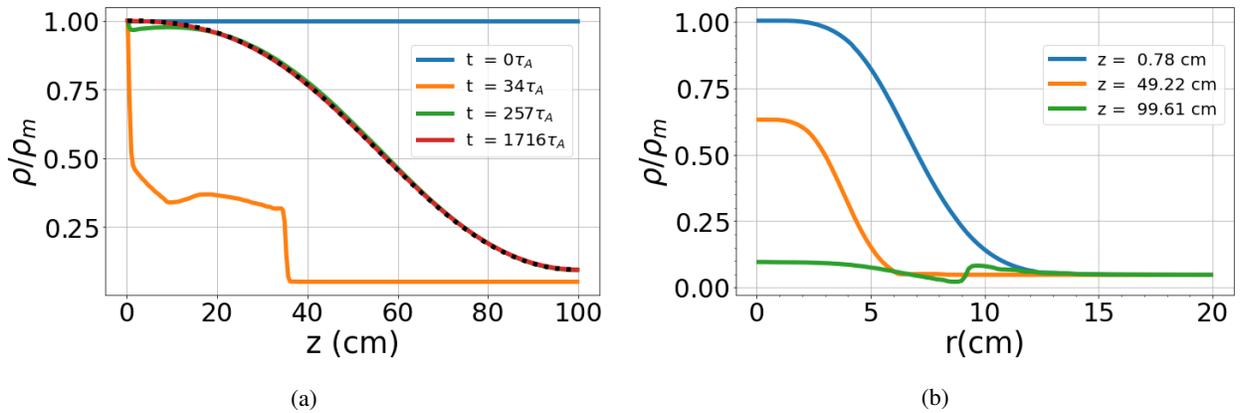


图 2: (a) 等离子体密度向稳态演化的时程。如标签所示，展示了不同时间的轴向密度分布。从方程 (2) 和质量守恒理论得到的分布由虚线表示。(b) 在稳态下，不同位置处的径向密度分布如标签所示在 z 中展示。

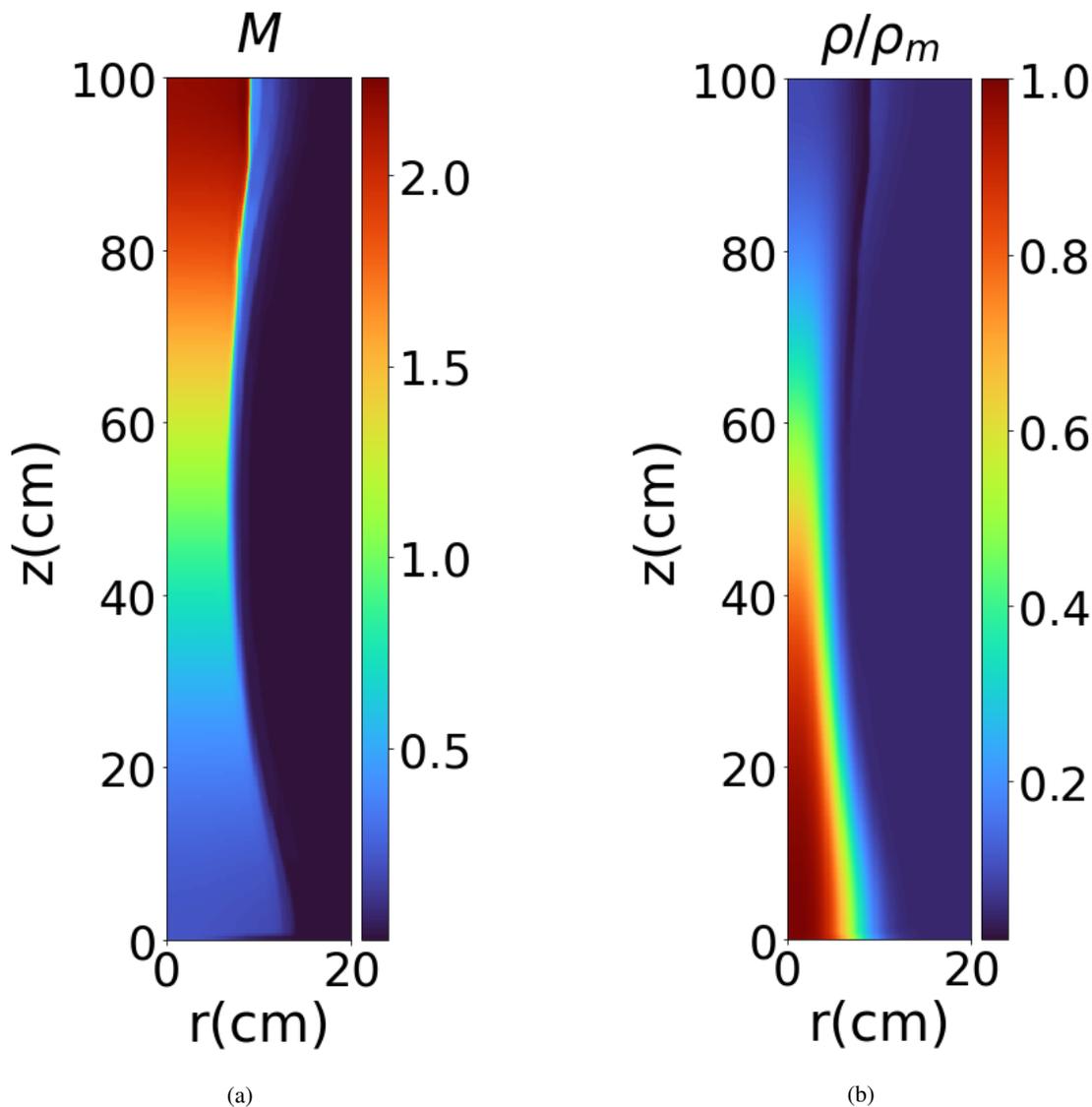


图 3: (a) 等离子体速度和 (b) 密度的二维剖面展示了跨音速加速。音速点转换发生在位于 $z = 50$ 厘米处的磁喉（最大磁场）位置，记为 $M = 1$ 。

我们发现模拟中获得的实际速度分布（作为轴附近 z 的函数 $r = 0$ ）与方程 (2) 的解析结果有很好的—致性，如图 4 所示。在此比较中，我们使用了由方程 (4)-(7) 确定的磁场。

我们的模拟展示了跨音速加速轮廓相对于边界条件变化的显著稳定性。这一点在图 5 的插图中得到了体现，稳定的解迅速过渡到由方程 (2) 定义的独特跨音速轮廓，即使入口处轴向速度的边界值 $z = 0$ 从其由方程 (2) 给出的独特值 $V_z = 0.21C_s$ 任意改变。

此性质进一步由图 6a 中的结果说明，该结果显示了不同长度喷嘴和轴向速度不同边界值的注入示例。因此，在两个分离面之间禁区内，以速度边界值进行等离子体注入，如图 1 所示，并且图 5 中也显示了 $V_z = 0.4C_s$ ，结果导致超音速加速。我们回忆一下，在超音速（和亚音速）区域存在多个具有不同边界值的超音速（和亚音速）解。然而，以亚音速区内的速度进行注入并不能给出完全的亚音速流。这样的边界条件也会导致跨音速加速，如图 5 所示，在喷嘴 0-100 厘米处和在 $z = 0$ 的 $V_z = 0.01C_s$ ，以及图

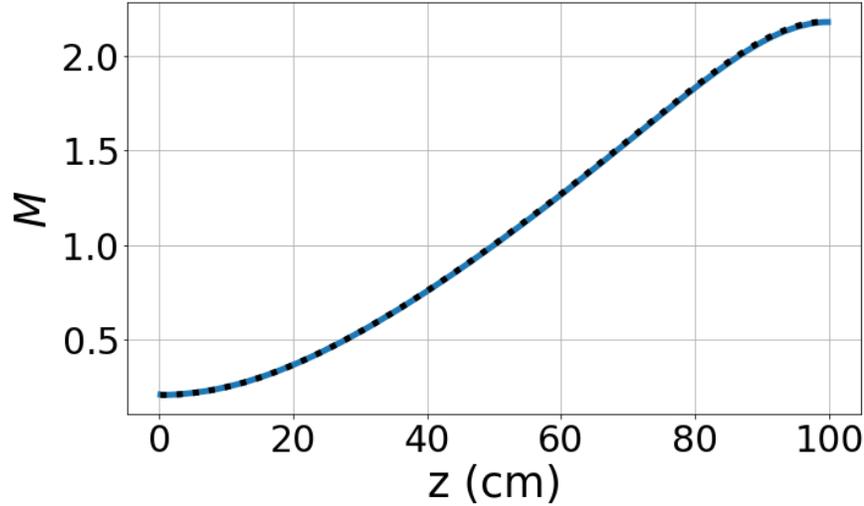


图 4: 在模拟中获得的稳态速度分布与函数 z 的关系, 对于 $r=0$ 和 $t=1716\tau_A$, 由实线表示, 与方程 (2) 给出的解析解, 用虚线表示进行比较。

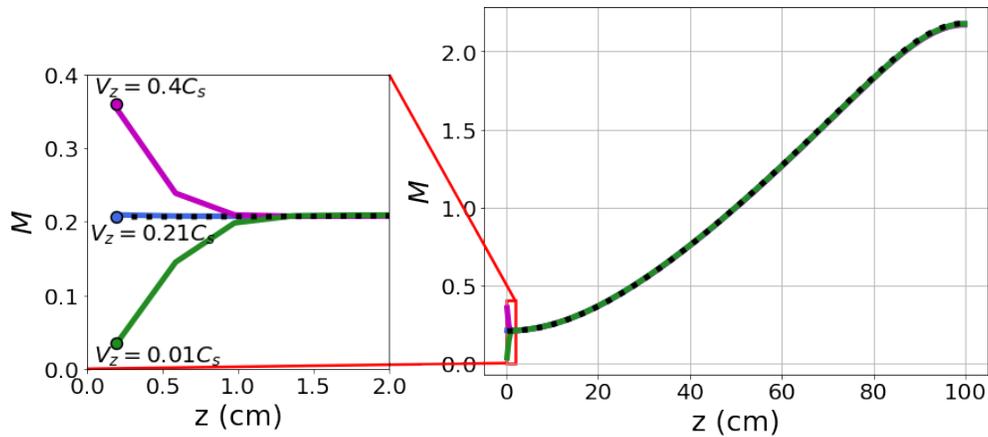


图 5: 跨音速加速速度剖面, $M = V_{\parallel}/C_s$, 对于不同边界值的 V_z 在 $z=0$ 处; 作为 z 的函数; 模拟——实线, 方程 (2)——虚线。速度 $V_z = 0.21C_s$ 的唯一值由方程 (2) 在 $z=0$ 处预测。插入的部分展示了接近 $z=0$ 时的行为, 过渡到唯一的轮廓发生在几个网格单元内。

6a 所示, 在喷嘴 50-100 厘米处并在 $z=50$ 厘米的 $V_z = 0.5C_s$ 。这表明亚音速解是不稳定的。相反, 超音速解是稳定的, 如图 6a 所示的两个示例: 对于 20-100 厘米喷嘴, 在 $z=20$ 厘米处边界值为 $V_z = 2.3C_s$ 的情况; 以及对于 50-100 厘米扩张喷嘴, 在 $z=50$ 厘米处注入值为 $V_z = 4C_s$ 的情况。图 6b 显示了压力分布的行为, 这些行为与图 6a 中的相应情况一致。

上述示例表明, 由解析解给出的独特跨音速轮廓在近轴 $r=0$ 处是稳健有效的, 即在傍轴近似下有效, 正如最初在文献 [21] 中导出的那样。在这篇论文中, 我们进一步表明当沿任意磁面应用时, 独特跨音速解仍然有效。因此, 图 7 显示了在 $z=0$, $z=50$ 厘米和 $z=100$ 厘米三个不同位置处速度作为半径的函数的驻波轮廓。虚线显示了通过公式 (2) 计算的每个位置的理论等离子体速度值, 与远离轴线时有限值 r 在仿真中获得的速度 (实线) 有很好的—致性。

上述示例使用了方程 (5) 中的初始磁场, 这是一个真空力自由场。在这些初始值模拟中, 磁场自

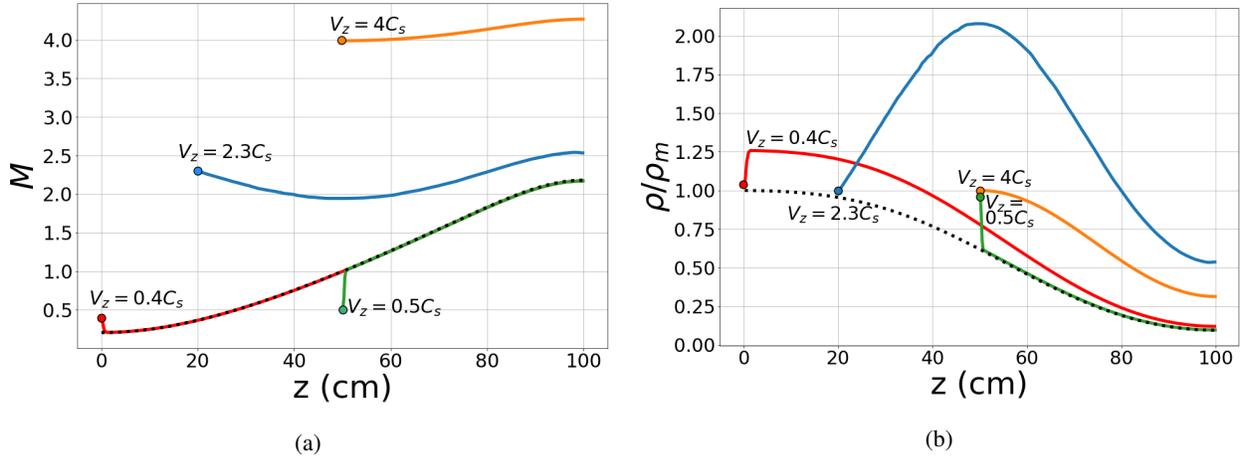


图 6: 理论和数值结果的比较, 对于 (a) 等离子体速度和 (b) 不同喷嘴长度和不同注入速度下的密度。黑色虚线是从方程 (2) 得到的理论解, 在 0–100 厘米区域内。实线是数值结果: 红色代表 0–100 厘米区域; 蓝色代表 20–100 厘米区域; 绿色和橙色代表 50–100 厘米区域。左侧的注入速度边界值如标签所示; 所有情况下压力的边界值相同。

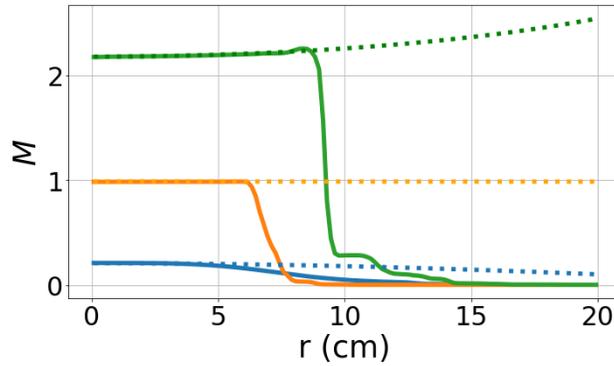


图 7: M 作为在 $z = 0, 50,$ 和 100 厘米处的半径的函数, 分别用蓝色、橙色和绿色线条表示。实线代表模拟结果, 虚线对应于方程 (2) 的理论计算。

沿演化, 因此根据完整的 MHD 方程系统允许磁场的变化。(3)。我们发现, 在初始真空场的情况下, 磁场的修改虽然很小但不能被忽略于动量平衡中。为了进一步探索独特的跨音速加速特性, 我们也进行了从以下模型给出的不同磁场开始的初始值模拟,

$$\psi = \frac{r^2}{2} \frac{B_m}{[1 + (R-1)((z-z_0)/L)^2]^{3/2}}. \quad (10)$$

该模型通量函数对应于傍轴极限, 并满足径向小参数 $r/a \ll 1$ 的一阶条件 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。然而, 来自方程 (10) 的场并不是无电流真空场, $J_\phi \neq 0$ 。

在这种情况下, 无法使用 PLUTO 的背景场选项, 但其他模拟参数和设置, 包括初始和边界条件, 与方程 (5) 中的基本情况保持相同。径向边界 $r = a$ 处的磁场边界条件是通过将守卫单元格的值固定为初始磁场的值来施加的。

与前面的情况类似, 我们观察到了静止跨音速加速的形成。该解由图 8 中的实橙线表示。然而, 数值解与方程 (2) 中的解析解以及使用方程 (10) 中原始磁场的结果不符, 后者用绿色虚线表示并标记为

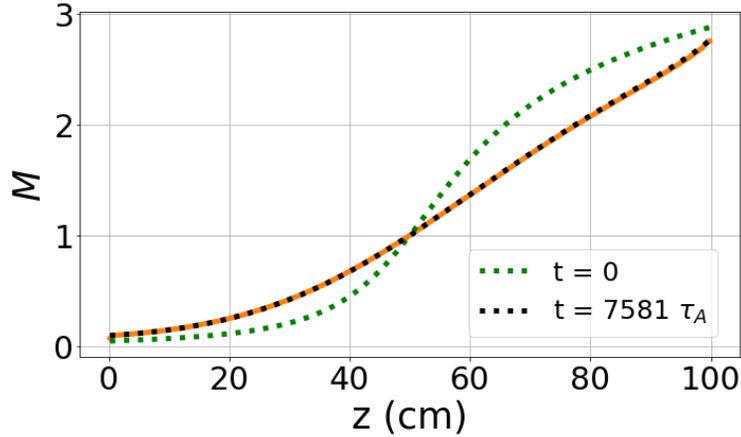


图 8: 沿轴的等离子体轴向速度, $r = 0$ 。实橙线——来自模拟; 虚绿线——使用方程 (2) 通过原始磁场 (源自方程 (10)) 计算得出, 虚黑线——使用方程 (2) 通过模拟中的修改后的磁场计算得出。

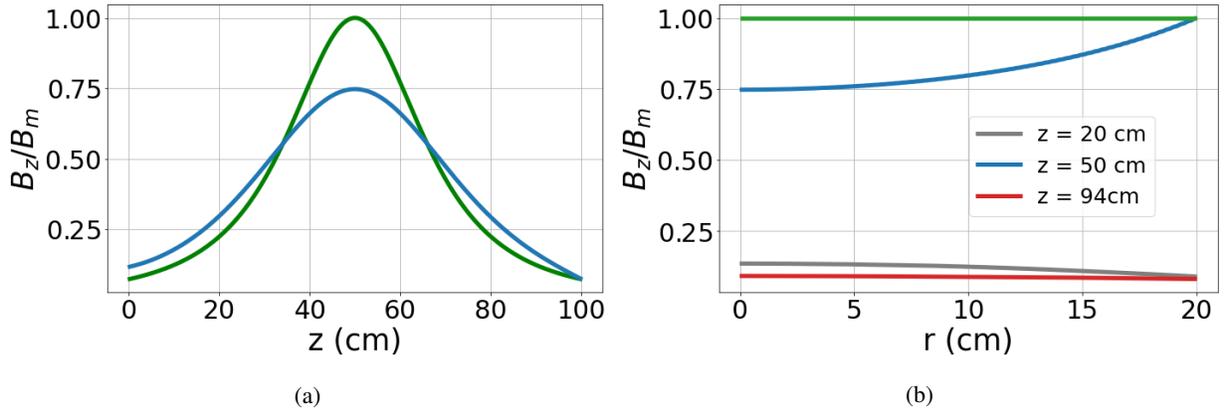


图 9: (a) 轴向磁场 B_z 的分布: 绿色线表示来自方程 (10) 的原始磁场, 蓝色线表示稳态仿真中的修改后磁场。(b) 不同 z 位置处 B_z 的径向分布。绿色线表示在 $z = 50\text{cm}$ 处的原始磁力线, 蓝色线表示在 $z = 50\text{cm}$ 处的修改后磁力线。红色和灰色线显示了标记位置处的修改后的 B_z 磁场。

$t = 0$ 。这种差异的发生是因为初始磁场在演化过程中发生了修改。这些修改显示在图 9a 和 9b 中。图 9a 显示, 与初始场相比, 在 $t = 7581\tau_A$ 的稳态下, B_z 轴向剖面的峰值减小且最大值处振幅降低。原始磁场在径向上具有均匀分布, 但修改后的磁场在径向朝中心方向有所下降; 如图 9b 所示, 边界处 B_z 的值保持不变。径向磁场也发生了变化。数值跨音速轮廓, 由图 8 中的实橙线所示, 在修改后的场附近 $r = 0$ 与解析解表现出很好的一致性, 如虚线在 $t = 7581\tau_A$ 处所示。在稳态下, 磁场被调整以满足力的平衡, 如图 10a 和图 10b 所示。径向, 主导项是径向压力梯度与洛伦兹力达到平衡, 见图 10a。在轴向上, 轴向压力梯度力由加速度的惯性力来平衡, 见图 10b。

在本研究中, 我们通过执行完整的单流体理想 MHD 模拟, 将之前一维傍轴模型的分析结果扩展到了磁喷嘴的完整 2D ($r-z$) 几何结构。这里显示, 在应用到任意磁场表面时, 参考文献 21 中获得的解析解仍然有效, 等离子体沿磁场表面按照方程 2 中的解析预测进行跨音速加速。此外, 我们还展示了在完整的 MHD 模型中, 指导等离子体的基本磁场自洽地进行了修改以满足动量平衡。在径向方向上, 主要的平衡是径向压力梯度与洛伦兹力之间的平衡。在轴向方向上, 主要的平衡描述了轴向压力梯度

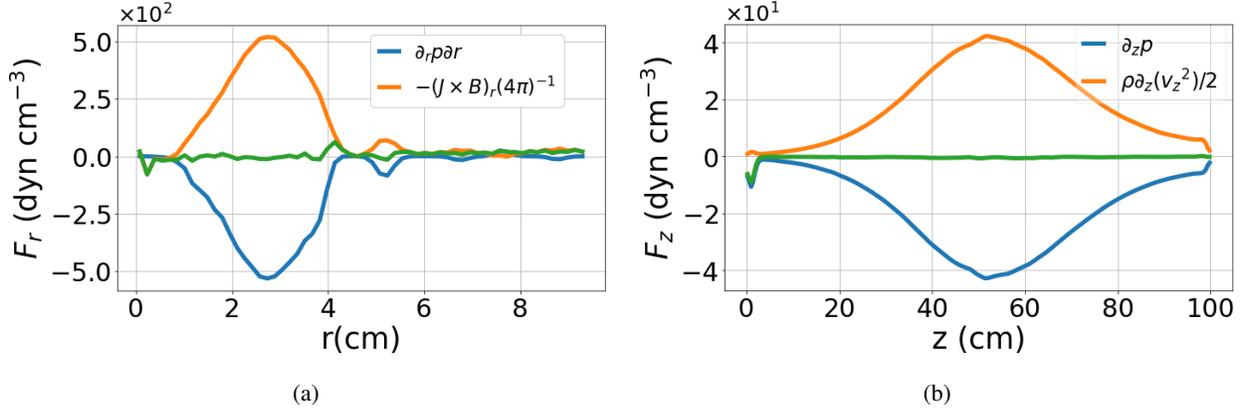


图 10: 主成分在轴向 (a) 和径向 (b) 方向的动量平衡。(a) 压力梯度和洛伦兹力之和由绿线表示。(b) 压力梯度和轴向惯性力之和由绿线表示。对于 (a) 和 (b), 动量平衡中的其他项至少小一个数量级。

力引起的轴向等离子体加速。在这两个方向上, 对于我们的参数来说, 来自径流的额外贡献都很小。

需要注意的是, 在一个相当任意的磁场情况下观察到的磁场显著变化并不是有限等离子体压力的效果。对于我们所选的参数, 等离子体压力参数相对较小 $\beta < 1\%$ 。在某种意义上, “自愈” 磁场是初始状态中任意磁场造成的伪影, 该磁场并非无电流, 因此不能代表真空场。在存在等离子体的情况下, MHD 演化 (磁场所、流动和等离子体压力) 引导系统朝向一个新的平衡点, 该平衡点 (a) 提供由径向收敛-发散的磁场条件下的磁喷嘴中的热轴向等离子体加速; (b) 满足径向动量平衡, 主要是径向压力梯度与洛伦兹力之间的平衡; (c) 沿磁面的等离子体加速度遵循早期的分析预测。我们注意到最近的结果³⁰ 显示, 在电子回旋推力器磁喷嘴羽流中测量到的等离子体流速确实符合参考文献²¹ 的理论预测。需要注意的是, 等离子体旋转、轴向电流以及双流体 (霍尔效应) 的效果并未包含在这些模拟或理论模型²¹ 中。参考文献³¹ 考虑了一个流体 MHD 模型中等离子体旋转和由轴向电流引起的环形磁场对等离子体加速的影响。

补充材料

我们展示了模拟中的总能量演化及其在最终状态的饱和。这些模拟也在更高的分辨率下重复进行以确认良好的收敛性。虽然本文研究的静止解显示出全局稳定性和鲁棒性, 即相当任意的初始状态都趋同于唯一的跨音速剖面, 但在小尺度上我们观察到了沿喷嘴传播的离子声波类型的小幅度波动。当全球解决方案包括喷嘴入口处的激波过渡时, 这种波动的幅度会更大, 如图中某些情况下所示。⁵ 和 ⁶。提供了一个等离子体速度和密度演化的动态可视化, 在附加的媒体中展示了向跨音速区域的过渡。这补充了图中的静态分布情况。^{3a} 和 ^{3b}。

ACKNOWLEDGMENTS

这项工作部分得到了加拿大科学与工程研究委员会 (NSERC) 的支持。计算资源由加拿大数字研究联盟提供。

数据可用性

支持本研究发现的数据可在合理请求下从通讯作者处获得。

REFERENCES

- ¹A. V. Arefiev and B. N. Breizman. Theoretical components of the VASIMR plasma propulsion concept. *Physics of Plasmas*, 11(5):2942–2949, 2004.
- ²K. Wu, Z. Chen, J. Ren, Y. Wang, G. Zhang, W. Wang, and H. Tang. A review of plasma acceleration and detachment mechanisms in propulsive magnetic nozzles. *Physics of Plasmas*, 32(4), 2025.
- ³M. Merino and E. Ahedo. Fully magnetized plasma flow in a magnetic nozzle. *Physics of Plasmas*, 23(2):023506, 2016.
- ⁴K. F. Schoenberg, R. A. Gerwin, R. W. Moses, J. T. Scheuer, and H. P. Wagner. Magnetohydrodynamic flow physics of magnetically nozzled plasma accelerators with applications to advanced manufacturing. *Physics of Plasmas*, 5(5):2090–2104, 1998.
- ⁵D. D. Ryutov, P. N. Yushmanov, D. C. Barnes, and S. V. Putvinski. *Divertor for a linear fusion device*, volume 1721 of *AIP Conference Proceedings*, page 060003. 2016.
- ⁶D. Endrizzi, J. K. Anderson, M. Brown, J. Egedal, B. Geiger, R. W. Harvey, M. Ialovega, J. Kirch, E. Peterson, Yu V. Petrov, J. Pizzo, T. Qian, K. Sanwalka, O. Schmitz, J. Wallace, D. Yakovlev, M. Yu, and C. B. Forest. Physics basis for the wisconsin HTS axisymmetric mirror (WHAM). *Journal of Plasma Physics*, 89(5):975890501, 2023.
- ⁷S. A. Andersen. Continuous supersonic plasma wind tunnel. *Physics of Fluids*, 12(3):557, 1969.
- ⁸K. Kuriki and O. Okada. Experimental study of a plasma flow in a magnetic nozzle. *Physics of Fluids*, 13(9):2262, 1970.
- ⁹S. N. Bathgate, M. M. Bilek, and D. R. McKenzie. Electrodeless plasma thrusters for spacecraft: a review. *Plasma Science & Technology*, 19(8):083001, 2017.
- ¹⁰M. Onofri, P. Yushmanov, S. Dettrick, D. Barnes, K. Hubbard, and T. Tajima. Magnetohydrodynamic transport characterization of a field reversed configuration. *Physics of Plasmas*, 24(9):092518, 2017.
- ¹¹A.I. Morozov and L.S. Solovév. *Steady-State Plasma Flow in a Magnetic Field*, volume 8 of *Reviews of Plasma Physics*, edited by M.A. Leontovich. Springer US, New York, 1980.
- ¹²L. C. Steinhauer. Formalism for multi-fluid equilibria with flow. *Physics of Plasmas*, 6(7):2734–2741, 1999.
- ¹³E. Hameiri. The equilibrium and stability of rotating plasmas. *Physics of Fluids*, 26(1):230, 1983.
- ¹⁴L. Guazzotto and R. Betti. Magnetohydrodynamics equilibria with toroidal and poloidal flow. *Physics of Plasmas*, 12(5):056107, 2005.
- ¹⁵J. P. Goedbloed. Transonic magnetohydrodynamic flows in laboratory and astrophysical plasmas. *Physica Scripta*, T98:43–47, 2002.
- ¹⁶M. Velli. Hydrodynamics of the solar wind expansion - why is the solar wind supersonic? *Astrophysics and Space Science*, 277(1-2):157–167, 2001.
- ¹⁷K. Tsinganos. *Theory of MHD Jets and Outflows*, volume 723 of *Lecture Notes in Physics*, pages 117–159. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

- ¹⁸A. Fruchtman, K. Takahashi, C. Charles, and R. W. Boswell. A magnetic nozzle calculation of the force on a plasma. *Physics of Plasmas*, 19(3):033507, 2012.
- ¹⁹T. Lafleur. Helicon plasma thruster discharge model. *Physics of Plasmas*, 21(4):043507, 2014.
- ²⁰W. M. Manheimer and R. F. Fernsler. Plasma acceleration by area expansion. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 29(1):75–84, 2001.
- ²¹A. I. Smolyakov, A. Sabo, P. Yushmanov, and S. Putvinskii. On quasineutral plasma flow in the magnetic nozzle. *Physics of Plasmas*, 28(6):060701, 2021.
- ²²A. E. Dubinov and I. D. Dubinova. How can one solve exactly some problems in plasma theory. *Journal of Plasma Physics*, 71(05):715, 2005.
- ²³R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the LambertW function. *Advances in Computational Mathematics*, 5(1):329–359, 1996.
- ²⁴M. Jimenez, A. I. Smolyakov, O. Chapurin, and P. Yushmanov. Ion kinetic effects and instabilities in the plasma flow in the magnetic mirror. *Physics of Plasmas*, 29(11):112117, 2022.
- ²⁵A. Sabo, A. I. Smolyakov, P. Yushmanov, and S. Putvinski. Ion temperature effects on plasma flow in the magnetic mirror configuration. *Physics of Plasmas*, 29(5):052507, 2022.
- ²⁶M. Tyushev, A. Smolyakov, A. Sabo, R. Groenewald, A. Necas, and P. Yushmanov. Drift-kinetic pic simulations of plasma flow and energy transport in the magnetic mirror configuration. *Physics of Plasmas*, 32(3), 2025.
- ²⁷J. Deguire. *Plasma flow and acceleration in the magnetic mirror and nozzle geometries*, University of Saskatchewan, <https://hdl.handle.net/10388/16446>. M.Sc. thesis, 2024.
- ²⁸R. F. Post. The magnetic mirror approach to fusion. *Nuclear Fusion*, 27(10):1579–1739, 1987.
- ²⁹A. Mignone, G. Bodo, S. Massaglia, T. Matsakos, O. Tesileanu, C. Zanni, and A. Ferrari. PLUTO: a numerical code for computational astrophysics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(1):228–242, 2007.
- ³⁰R. Pioch. *Ion dynamics in the magnetic nozzle of an Electron Cyclotron Resonance Thruster- Dynamiques ioniques dans la tuyère magnétique d’un propulseur ECR*, Institut Polytechnique de Paris, <https://theses.hal.science/tel-04861648>. Thesis, 2025.
- ³¹A. I. Smolyakov, A. Sabo, S. Krasheninnikov, and P. Yushmanov. Electromagnetic and centrifugal effects on plasma acceleration in the magnetic nozzle. *Plasma Physics Reports*, 2025.