迭代的 Harrow-Hassidim-Lloyd 量子算法用于通过本征向量连续性求解共振问题

Hantao Zhang[a], Dong Bai[b,d], Zhongzhou Ren[a,c,*]

[a]*School of Physics Science and Engineering, Tongji University, Shanghai, 200092, China*
[b]*College of Mechanics and Engineering Science, Hohai University, Nanjing, 211100, China*
[c]*Key Laboratory of Advanced Micro-Structure Materials, Tongji University, Shanghai, 200092, China*
[d]*Shanghai Research Center for Theoretical Nuclear Physics, NSFC and Fudan University, Shanghai, 200438, China*

Abstract

我们提出了一种新型的量子算法来求解核共振问题，该算法基于迭代的 Harrow-Hassidim-Lloyd 算法和复数缩放下的本征向量连续性。为了验证这一方法的有效性，我们计算了 $\alpha-\alpha$ 系统的共振态，并得到了与传统方法一致的结果。我们的研究为非厄米算子特征值的计算提供了新的视角，并为利用量子计算机进一步探索核共振奠定了基础。

Keywords: 量子计算, 本征向量连续性, 复杂缩放

1. 介绍

量子计算，一个位于量子力学和计算机科学交汇处的迅速发展的领域，已经展示了在解决经典系统难以处理的问题方面的巨大潜力。其应用范围涵盖了包括计算化学、高能物理、核物理等多个科研领域。量子计算变革能力的核心在于量子纠缠和量子信息，它们提供了前所未有的计算效率和能力。在核物理中，研究粒子和原子核中的纠缠性质已成为一个关键的兴趣领域 [1–36]，进一步强调了量子计算与基础科学的交叉点。对于核物理学的研究者来说，量子计算强大的并行处理能力为探索复杂的量子力学问题提供了新的途径。具体而言，量子计算在解决大规模多体系统和高维空间中的状态演化方面表现出了优越性，提供了前所未有的机会来探索复杂核系统。在核反应研究的一些基础工作中，量子计算和衍生算法已经越来越成功地得到了应用 [37–43]。

量子计算的增长是由解决超越经典计算挑战的关键算法的发展推动的。例如，像 Harrow-Hassidim-Lloyd (HHL)[44] 这样的算法已被用于求解线性系统，量子相位估计 (QPE)[45, 46]、变分量子本征解算器 (VQE)[47–52]、VQE 的变体 [53–62] 以及量子神经网络 (QNN)[63–67] 在解决量子系统的特征值问题、模拟分子和核结构以及建模化学和核反应方面已经取得了重大进展。

尽管在求解厄米系统方面取得了显著进展，但在使用量子计算处理非厄米问题时仍面临挑战。作为非厄米量子动力学中的一个重要主题，共振态描述了具有有限寿命的亚稳系统，并在研究散射和反应截面、核衰变、核聚变以及核物质的性质等方面发挥关键作用。因此，开发时间复杂度低的有效量子算法以解决核共振态问题仍然是一个关键且未解的挑战。从实验角度来看，在几乎不存在大气的外太空环境中，宇宙射线诱导产生的中微子和缪子通量的显著衰减有利于核反应研究的进步 [68]。此外，利用量子计算模拟宇宙射线诱导粒子对核实验影响的研究领域也值得进一步探索。

在我们之前的工作中，我们对非厄米核共振态进行了研究 [69]。在这项工作中，我们提出了一种新的量子算法来求解共振问题，该算法基于迭代 HHL（IHHL）算法结合复缩放方法（CSM）[70–81] 和本征向量延续（EC）[82–88]。本征向量延续已经在低能核物理中找到了许多应用，并且特别是在构建核散射 [89–96] 的模拟器方面得到了利用。HHL 算法是一种基于 QPE 算法构建的纯量子算法，用于求解线性系统，并已在各种研究领域成功应用。考虑到 CSM 引入的非厄米性质，我们将复本征值问题转化为迭代问题，并引入了一种新颖的迭代 HHL 算法。此外，为了更高效地处理共振态，我们结合了带有复标度的特征向量延续方法，利用控制参数下的已知特征向量的线性组合来逼近目标共振特征态。其优势在于显著降低了计算维度和量子计算所需的量

*Corresponding author
Email address: zren@tongji.edu.cn (Zhongzhou Ren)

子比特数量，从而增强了数值稳定性和计算效率，特别是在处理多体系统、依赖参数的问题等方面。为了验证我们方法的可靠性，我们进行了量子模拟以计算 $\alpha-\alpha$ 系统的共振态。我们的新算法还具有将陷阱法 [97–99] 应用于复域中散射相移处理的潜力。

其余部分组织如下：在第二节中，我们介绍了迭代 Harrow-Hassidim-Lloyd 算法和带复数缩放的本征向量连续性的框架。第三节展示了 $\alpha-\alpha$ 系统共振的数值结果并进行了讨论。第四节对文章进行了总结。一些数值细节列在附录中。

2. 理论形式主义

2.1. 迭代哈罗-哈西迪姆-洛算法

在选择一组合适的正交基函数 $\{\phi_i\}$ 时，参数化哈密顿量 $H(\lambda)$ 可以表示为以下形式，

$$H(\lambda)=\sum_{i,j}^{N}h_{i,j}(\lambda)a_i^\dagger a_j,\quad h_{i,j}(\lambda)=\langle\phi_i|\,|T+V_N(\lambda)+V_C\left|\phi_j\right\rangle. \tag{1}$$

费米子的产生和湮灭算符可以通过约旦-维格纳变换表示为 [100]，

$$\begin{aligned} a_j^\dagger &= \frac{1}{2}(X_j-iY_j)\otimes Z_{j-1}^D,\\ a_j &= \frac{1}{2}(X_j+iY_j)\otimes Z_{j-1}^D, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 X,Y 和 Z 是泡利算符，Z_{j-1}^D 被定义为

$$Z_{j-1}^D=Z_{j-1}\otimes Z_{j-2}\otimes\cdots\otimes Z_0. \tag{3}$$

除了 Jordan-Wigner 变换外，还有其他的量子映射方法。例如，对于 $2^m\times 2^m$ 矩阵，可以选择使用 m 个量子位来表示哈密顿量矩阵，这可以有效地减少所需的量子位数量。

$$H(\lambda)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=0,1,2,3}c_{i_1,i_2,\cdots,i_m}(\lambda)(\sigma_{i_1}\otimes\sigma_{i_2}\otimes\cdots\otimes\sigma_{i_m}), \tag{4}$$

其中

$$c_{i_1,i_2,\cdots,i_m}(\lambda)=\frac{1}{2^m}Tr((\sigma_{i_1}\otimes\sigma_{i_2}\otimes\cdots\otimes\sigma_{i_m})H(\lambda)),\ \ \sigma=\{I,X,Y,Z\}. \tag{5}$$

哈罗-哈西迪姆-洛伊德算法是一种量子算法，设计用于求解线性方程 $Ax=b$，其中 A 是一个厄米算子。如图 1 所示，它利用量子相位估计（QPE）来找到矩阵 A 的本征值，然后使用量子门计算这些本征值的逆。最后，算法以量子形式重构解向量 x。对于厄米矩阵，HHL 算法可以提供比经典方法指数级的速度提升。

根据 ABC 定理 [70, 71]，原始哈密顿量 $H(\lambda)$ 将被转换为一个复数缩放的版本，$H^\theta(\lambda)=e^{-2i\theta}T+V_N(\lambda,re^{i\theta})+e^{-i\theta}V_C$。因此，为了利用 HHL 算法解决共振问题，非厄米复数缩放哈密顿矩阵 H 应扩展成为一个更大的厄米矩阵 A，

$$A=\begin{pmatrix}0 & H\\ H^\dagger & 0\end{pmatrix}. \tag{6}$$

此外，为了处理共振态的本征值问题，我们引入了一种迭代方法，具体来说，我们可以重新表述薛定谔方程，使得最终的本征向量成为该方程的不动点，如下所示，

$$C(E,\beta)\phi=\phi, \tag{7}$$

其中 C 操作符的矩阵元定义为

$$C_{ij}(E,\beta)=(\phi|\frac{e^{-2i\theta}T+V_N(\lambda,re^{i\theta})+e^{-i\theta}V_C-(E-\beta)}{\beta}|\phi),\quad \beta\neq 0. \tag{8}$$

其中括号 ”()” 表示 c-乘积。

如果我们简单地令 β 等于 1，则较大的 Hermite 矩阵 A 可以写为，

$$A=\begin{pmatrix}0 & C(E,1)\\ C^\dagger(E,1) & 0\end{pmatrix}. \tag{9}$$

上述处理后，我们可以利用 HHL 算法迭代求解共振态的本征能。一个更详细的算法流程图如图 1 所示。我们的算法可以主要分为三个部分：输入、自洽迭代 HHL 量子算法和输出。首先，我们定义初始试探波函数 ϕ 来构造向量 b 并将其输入到 HHL 算法中。接下来，非厄米哈密顿量被扩展为厄米算符 A，如方程 (9) 所示，其中 E 是与初始波函数 ϕ 相对应的初始能量，它可以是实数或复数。此外，需要注意的是通常 HHL 算法的输入向量应该是实数。因此，在处理复数波函数时，我们需要将其实部和虚部分开，并分别对每一部分应用 HHL 算法。

HHL 算法求解未知向量 x，即对应新的复数波函数 ϕ^*。然后使用新旧波函数的 c-积来计算如图 1 所示的新复数能量 E^*。通过设定一个误差容限 ε，我们可以确定是否继续使用 HHL 算法迭代直到达到所需的精度，并最终输出复数缩放哈密顿量的收敛本征值和本征向量。

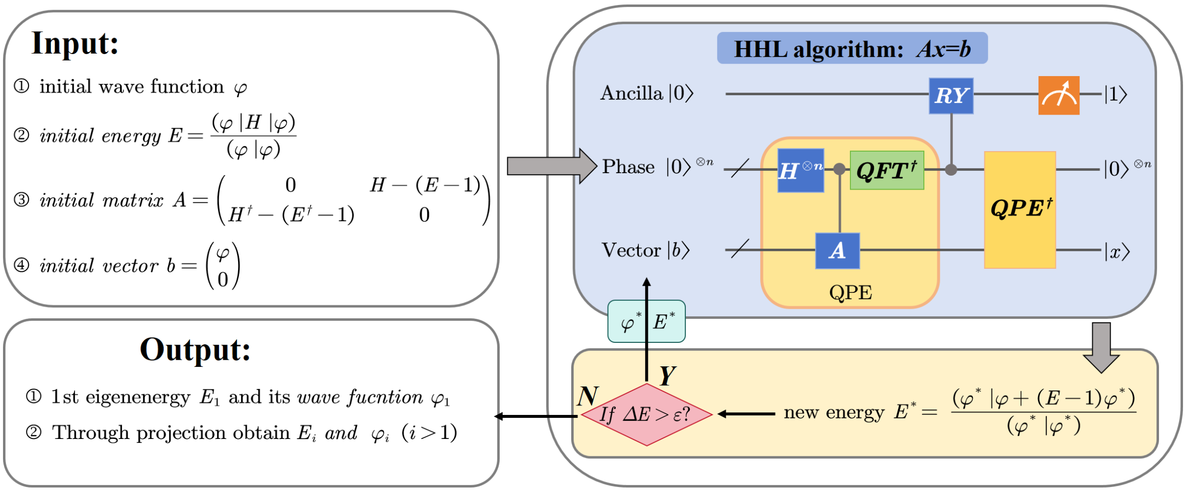

图 1: 基于 HHL 算法的迭代共振态解示意图。输入部分：给定一个初始试探波函数 ϕ 并计算相应的能量期望值 E。然后，将原始非厄米矩阵扩展为厄米矩阵 A，并将初始波函数 ϕ 扩展为向量 b，作为 HHL 算法的初始输入。在使用 HHL 算法求解线性方程 $Ax = b$ 后，从 x 中提取新的波函数 ϕ^* 来计算新的能量期望值 E^*。如果能量不满足指定的精度 ε，则需要利用新的波函数 ϕ^* 和新的能量 E^* 构造一个新的线性方程，并继续使用 HHL 算法求解直到达到指定的精度。最后，输出第一个收敛的本征向量 ϕ_1 和本征能量 E_1。因此，通过使用投影方法，我们可以使波函数与之前已解出的波函数正交，并继续使用迭代 HHL 算法获得剩余的本征向量。

在此阶段，得到了 N 个本征向量之一。为了找到其余的本征向量，可以应用投影方法。具体来说，在 HHL 迭代过程中，目标本征向量被设置为与先前获得的本征向量正交。

2.2. 特征向量连续性

本征向量连续法是一种可以通过获取哈密顿量 $\{H(\lambda_i)\}$ 的本征态 $\phi_T = \{\phi(\lambda_i)\}$ 来提取具有目标参数 $\lambda_\odot$ 的哈密顿量 $H(\lambda_\odot)$ 的本征态 $\phi(\lambda_\odot)$ 的方法。具体来说，参数集 $\{\lambda_i\}$ 作为训练数据使用，并且相应的训练本征向量将被用来形成一个新的基底来求解目标哈密顿量 $H(\lambda_\odot)$ 的本征值和本征向量。因此，本征向量连续可以一般性地将特征值问题的维度从一个大的希尔伯特空间减少到由训练本征向量 ϕ_T 张成的一个更小的子空间。这样每个目标参数的计算成本就可以显著降低。

特征向量连续性的一个基本应用是从束缚态估计束缚态。具体来说，为了提取束缚态应求解广义本征值问题，

$$H^{EC}\,|\phi(\lambda_\odot)\rangle = E(\lambda_\odot)N^{EC}\,|\phi(\lambda_\odot)\rangle\,, \tag{10}$$

其中哈密顿量和重叠矩阵元 $H(\lambda_\odot)^{EC}$,$N(\lambda_\odot)^{EC}$ 分别由束缚态的训练特征向量构建，

$$H^{EC}_{ij} = \langle\phi(\lambda_i)|\,H(\lambda_\odot)\,\big|\phi(\lambda_j)\big\rangle, \quad N^{EC}_{ij} = \big\langle\phi(\lambda_i)\big|\phi(\lambda_j)\big\rangle. \tag{11}$$

此外，通过引入复数缩放 $r \to re^{i\theta}$（或等效的 $k \to ke^{-i\theta}$），EC 也可以扩展以执行从束缚态估计共振态的任务。值得注意的是，内积应替换为 c-积，

$$H^{EC,\theta}_{ij} = (\phi(\lambda_i)|H^{\theta}(\lambda_\odot)|\phi(\lambda_j)), \quad N^{EC}_{ij} = (\phi(\lambda_i)|\phi(\lambda_j)). \tag{12}$$

或者，我们可以使用复数缩放的哈密顿量和实训练本征向量如方程 (12) 所示，或使用复数缩放的训练本征向量和实哈密顿量来提取共振能量。需要指出的是，在量子计算中，通常需要一个标准正交基。因此，在利用本征向量连续性获得束缚态的训练本征向量后，应采用施密特正交化方法。

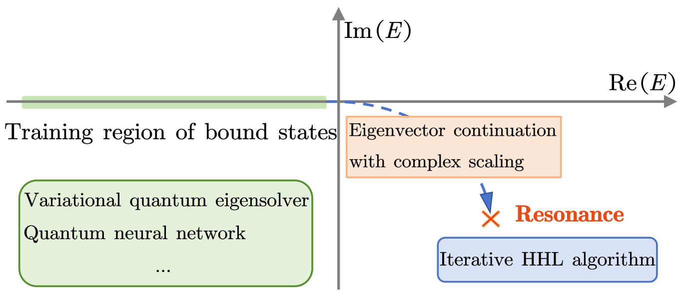

图 2: 本征向量延续与复数缩放的示意图。横轴和纵轴分别代表能量的实部和虚部。沿负实轴的束缚态作为训练数据。获得相应的波函数后，通过本征向量延续复数缩放哈密顿量（或复数缩放波函数）将导致第四象限的共振能量。束缚态可以使用变分量子特征值求解器、量子神经网络等方法计算，而非厄米算子的本征值则通过我们提出的迭代 HHL 算法求解。

如图 2 所示，训练区域中的束缚态解可以通过变分量子本征求解器（VQE）、量子神经网络（QNNs）等量子算法来处理。为了评估共振的复特征值和特征向量，我们使用了图 1 中展示的迭代 HHL 算法。

3. 数值结果

作为一个数值测试，我们考虑计算 $\alpha-\alpha$ 系统的共振态。两个 α 粒子之间的相互作用由一个简单的高斯势能来建模，

$$V_{\alpha-\alpha}(r) = V_0 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \tag{13}$$

其中 V_0 是-122.6225 MeV，a=2.132 fm[101]。λ 总哈密顿量中的参数 $H = T + \lambda V_{\alpha-\alpha}(r) + \frac{4e^2}{r}$ 被视为连续参数，目标参数是 $\lambda_\odot = 1$。$\lambda_\odot = 1$ 支持一个能量为 $11.8079 - 1.8085i$MeV 的 G 波共振态，这是通过使用 R 矩阵方法计算得出的。后续的所有计算都围绕这个共振态进行。首先，对于具有复缩放（EC with CSM）的本征向量连续性，我们选择一个确保系统为束缚态的参数范围，从而可以获得若干基态波函数 $\phi_T = \{\phi_i, i = 1, 2 \cdots i_{max}\}$。由于我们的重点是求解共振态，这里通过传统方法直接获得基态波函数 ϕ_T 而不使用量子计算来简化这一过程。需要注意的是，在构建用于共振态的复对称矩阵之前，必须将波函数 ϕ_T 正交化为 $\phi_T^O = \{\phi_i^O, i = 1, 2 \cdots, i_{max}\}$。复缩放角度设定为 20 度，并且 C 的矩阵元可以表示为，

$$C_{ij}(E, 1) = (\phi_i^O | e^{-2i\theta} T + V_N(re^{i\theta}) + e^{-i\theta} V_C - (E-1) | \phi_j^O). \tag{14}$$

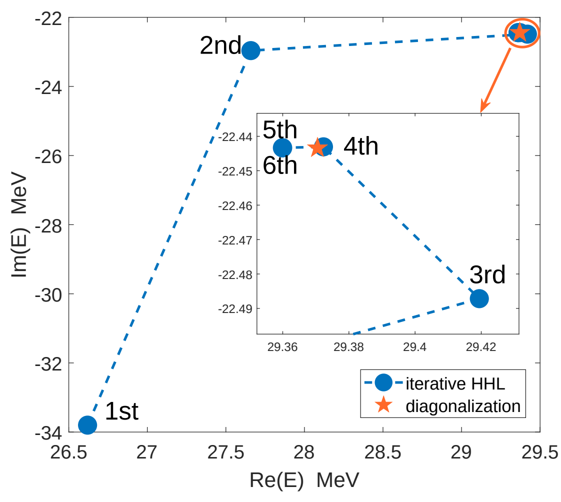

图 3: 使用迭代 HHL 算法获得的第一个本征值。经过 6 次迭代后，结果达到指定精度 $\varepsilon = 10^{-4}$ 兆电子伏特。

这里，我们使用均匀分布在区间 [1.45, 1.75] 内的总共 8 个训练参数来获得对应的基态波函数。在将基矢正交化后，可以得到复缩放哈密顿矩阵 $H^{\theta=20^\circ} = e^{-2i\theta}T + V_N(re^{i\theta}) + e^{-i\theta}V_C$（见附录）。为了分离共振态与连续谱，复缩放角通常需要满足 $2\theta > \arctan\left(\frac{Im(E_{res})}{Re(E_{res})}\right)$。需要注意的是，一般来说，在使用复缩放方法时，需要计算对应不同复缩放角度 θ 的本征能量以通过这样的稳定条件获得最终的共振能量 E_{res}。然而，在数值结果中，我们仅以一个复缩放角 $\theta = 20^\circ$ 为例。此外，考虑到训练数据中的不确定性，如果我们希望得到更详细的结果，则需要分析在训练区域内选择束缚态时产生的误差。

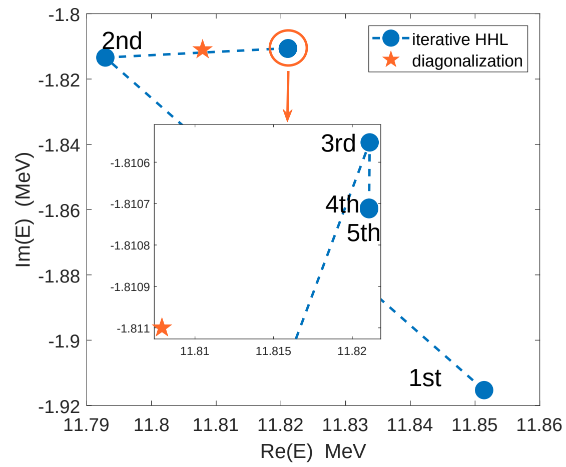

图 4: 使用迭代 HHL 算法和投影获得的第二个特征值。经过 5 次迭代，结果达到指定精度 $\varepsilon = 10^{-4}$ 兆电子伏特。此特征值代表共振能量。

在量子模拟中，我们使用了 Origin 的量子计算 [102] 提供的 HHL 算法接口，允许输入厄米矩阵 A 和实向量 b。该接口提供了不同的精度值，表示小数点后的位数数量。其默认值为 0，这意味着只有整数解可用。精度越高，则量子比特的数量和电路的深度越大，例如，对于 1 位精度需要额外 4 个量子比特，对于 2 位精度需要额外 7 个量子比特，依此类推。在我们的量子模拟中，我们使用了 1 位精度来实现所有计算。

第一次和第二次本征能量分别通过迭代 HHL 算法在图 3 和图 4 中显示。蓝色圆圈代表使用迭代 HHL 得到的结果，而矩阵 $H^{\theta=20^\circ}$ 的本征值用红色星号标记。经过六次和五次迭代后，第一个和第二个本征值收敛到我们给定的精度 $\varepsilon = 10^{-4}$ 兆电子伏特。显然可以看出，通过使用迭代 HHL 算法，在几次迭代之后可以得到收敛的本征能量，这展示了我们的算法具有很高的计算效率。第二次本征能量是利用投影方法求解的，以确保正交性，并避免结果收敛到第一个本征态。然而，应该注

表 1: 通过迭代 HHL 算法和直接对角化获得的 $H^{\theta=20^\circ}(\lambda_\odot=1)$ 本征能量。能量按照其实部从小到大排列。与 $\alpha-\alpha$ G 波共振状态对应的能量用下划线标出。通过 R 矩阵方法确定共振能量为 $11.8079-1.8085i$MeV。

Approach	Real part of eigenenergy(MeV)							
Iterative HHL	1.5968	3.6297	7.6254	<u>11.8211</u>	17.3525	29.3599	48.8163	97.9506
Diagonalization	1.5967	3.6284	7.6260	<u>11.8079</u>	17.3572	29.3705	48.8284	97.9800
Approach	**Imaginary part of eigenenergy(MeV)**							
Iterative HHL	-1.1574	-2.7683	-5.9790	<u>-1.8107</u>	-12.6788	-22.4433	-52.2620	-123.9743
Diagonalization	-1.1574	-2.7683	-5.9790	<u>-1.8110</u>	-12.6788	-22.4434	-52.2619	-123.9785

意的是，如果使用不同的初始波函数，本征值解决方案的顺序可能会改变。我们在这里选择的初始波函数（列在附录中）使得共振状态已经在第二次求解时得到，否则我们需要继续使用迭代 HHL 来完成剩余的本征值直到获得共振态能量。我们使用的投影策略是：给定一个随机初始波函数（实数或复数），当求解第 $i-$ 个（$i>1$）本征值时，然后将其投影为与已经求得的第一个 $i-1$ 个本征向量垂直，并将这个正交化的初始波函数和相应的预期能量输入到迭代 HHL 算法中。最终我们列出从迭代解获得的所有本征值（按照实部升序排列），并给出直接对角化的方法作为比较的结果。通过迭代 HHL 算法得到的结果与用直接对角化方法作为基准得到的结果之间有很好的一致性，这验证了我们的算法在计算非厄米矩阵的本征值时的可靠性。

4. 结论

在这项工作中，我们提出了一种基于迭代 HHL 算法和特征向量延续的求解共振态的新量子算法。通过将特征向量延续与复数缩放方法结合，我们可以从束缚态扩展到共振态。特征向量延续减少解空间的特点有助于我们减少所需的量子比特数量并获得更可靠的量子计算结果。为了解决由复数缩放引入的非厄米性问题，我们将非厄米矩阵扩展为厄米矩阵，并提出了一种基于 HHL 量子算法的迭代算法来确定共振态的波函数和复能量。以 G 波共振为例，在 $\alpha-\alpha$ 系统中，通过量子模拟我们获得了与传统方法一致的共振能。我们证明了这种新颖非厄米量子本征解算器的可行性和可靠性，这为未来在量子计算框架内研究核共振提供了新的算法和视角。

致谢

本工作受到国家自然科学基金（资助号：12035011，11905103，11947211，11761161001，11961141003，12022517，12375122 和 12147101），国家重点研发计划（合同号：2023YFA1606503），澳门科技发展基金（资助号：0048/2020/A1 和 008/2017/AFJ）以及中央高校基本科研业务费专项资金（资助号：22120210138 和 22120200101）的支持。

附录 A.

附录提供了用于量子模拟的复数缩放哈密顿量 $H^{\theta=20^\circ}$ 以及用于计算前两个本征值所采用的初始波函数 ϕ_0^{1st} 和 ϕ_0^{2nd}，

$$Re(H^{\theta=20^\circ}) = \begin{bmatrix} 5.9160 & -1.9968 & -1.4539 & 0.0808 & -0.8477 & 1.0134 & 0.6587 & 0.2180 \\ -1.9968 & 20.9328 & 8.9038 & -2.0352 & 0.5117 & -0.2871 & 0.7430 & 1.2106 \\ -1.4539 & 8.9038 & 20.3077 & -14.6338 & -7.1324 & 2.1843 & 0.1511 & 0.1616 \\ 0.0808 & -2.0352 & -14.6338 & 23.7568 & 18.6313 & -9.6136 & -3.5157 & -0.7455 \\ -0.8477 & 0.5117 & -7.1324 & 18.6313 & 28.2676 & -22.9362 & -12.3736 & -5.0318 \\ 1.0134 & -0.2871 & 2.1843 & -9.6136 & -22.9362 & 33.7226 & 27.6980 & 15.2191 \\ 0.6587 & 0.7430 & 0.1511 & -3.5157 & -12.3736 & 27.6980 & 39.5660 & 32.5994 \\ 0.2180 & 1.2106 & 0.1616 & -0.7455 & -5.0318 & 15.2191 & 32.5994 & 45.7255 \end{bmatrix},$$

$$Im(H^{\theta=20^\circ}) = \begin{bmatrix} -7.1245 & -13.5742 & -10.3647 & 6.9730 & 3.7763 & -1.3817 & -0.0922 & 0.2918 \\ -13.5742 & -21.0051 & -14.8535 & 12.0314 & 9.9754 & -7.3522 & -4.2786 & -1.5986 \\ -10.3647 & -14.8535 & -22.4724 & 18.8352 & 14.0059 & -10.3900 & -7.4947 & -4.8701 \\ 6.9730 & 12.0314 & 18.8352 & -25.0279 & -21.8145 & 15.8726 & 11.4187 & 7.9816 \\ 3.7763 & 9.9754 & 14.0059 & -21.8145 & -29.2031 & 25.8374 & 18.3401 & 12.6511 \\ -1.3817 & -7.3522 & -10.3900 & 15.8726 & 25.8374 & -34.1859 & -30.0201 & -20.7983 \\ -0.0922 & -4.2786 & -7.4947 & 11.4187 & 18.3401 & -30.0201 & -39.3154 & -34.3378 \\ 0.2918 & -1.5986 & -4.8701 & 7.9816 & 12.6511 & -20.7983 & -34.3378 & -44.7440 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

$$\phi_0^{1st} = [-0.50298,\ -0.10005,\ -0.17812,\ -0.4794,\ 0.74079,\ -0.62992,\ -0.96068,\ 0.9065]^T, \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} \phi_0^{2nd} = [&0.0799-0.4118i,\ 0.3987+0.0799i,\ -0.6690-0.0337i,\ -0.0204-0.0322i, \\ &-0.1536+0.0933i,\ -0.0851-0.1819i,\ -0.1936+0.1947i,\ 0.2308+0.0854i]^T. \end{aligned} \tag{A.3}$$

收敛后的本征能量分别为 $29.3599-22.4433i$ 和 $11.8211-1.8107i$，对应的归一化本征向量如下列出，

$$\begin{aligned} \phi^{1st} = [&-0.2610-0.1947i,\ 0.0084-0.5524i,\ 0.0919-0.3528i,\ -0.1403-0.0176i, \\ &-0.1529-0.3527i,\ 0.0848+0.3638i,\ -0.0487+0.0000i,\ -0.1337-0.3581i]^T \\ \phi^{2nd,res} = [&0.1228-0.8607i,\ 0.1846+0.3683i,\ 0.1756+0.1208i,\ 0.0321+0.0417i, \\ &0.1337+0.0011i,\ -0.0351+0.0521i,\ 0.0420-0.0007i,\ -0.0122-0.0499i]^T. \end{aligned} \tag{A.4}$$

直接对哈密顿量 $H^{\theta=20^\circ}$ 进行对角化得到如下本征值，

$$
\begin{aligned}
E_{diag} = [&97.9800 - 123.9785i,\ 48.8284 - 52.2619i,\ 29.3705 - 22.4434i,\ 17.3572 - 12.6788i,\\
&11.8079 - 1.8110i,\ 7.6260 - 5.9790i,\ 3.6284 - 2.7683i,\ 1.5967 - 1.1574i].
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

References

[1] M. J. Savage, Quantum computing for nuclear physics, EPJ Web Conf. 296 (2024) 01025. doi:10.1051/epjconf/202429601025. arXiv:2312.07617.

[2] N. Klco, A. Roggero, M. J. Savage, Standard model physics and the digital quantum revolution: thoughts about the interface, Reports on Progress in Physics 85 (2022) 064301. doi:10.1088/1361-6633/ac58a4.

[3] C. M. Ho, S. D. H. Hsu, Entanglement and fast quantum thermalization in heavy ion collisions, Modern Physics Letters A 31 (2016) 1650110. doi:10.1142/s0217732316501108.

[4] D. E. Kharzeev, E. M. Levin, Deep inelastic scattering as a probe of entanglement, Phys. Rev. D 95 (2017) 114008. doi:10.1103/PhysRevD.95.114008.

[5] O. K. Baker, D. E. Kharzeev, Thermal radiation and entanglement in proton-proton collisions at energies available at the cern large hadron collider, Phys. Rev. D 98 (2018) 054007. doi:10.1103/PhysRevD.98.054007.

[6] S. R. Beane, D. B. Kaplan, N. Klco, M. J. Savage, Entanglement suppression and emergent symmetries of strong interactions, Phys. Rev. Lett. 122 (2019) 102001. doi:10.1103/PhysRevLett.122.102001.

[7] Z. Tu, D. E. Kharzeev, T. Ullrich, Einstein-podolsky-rosen paradox and quantum entanglement at subnucleonic scales, Physical Review Letters 124 (2020). doi:10.1103/physrevlett.124.062001.

[8] S. R. Beane, R. C. Farrell, Geometry and entanglement in the scattering matrix, Annals of Physics 433 (2021) 168581. doi:https://doi.org/10.1016/j.aop.2021.168581.

[9] G. Iskander, J. Pan, M. Tyler, C. Weber, O. Baker, Quantum entanglement and thermal behavior in charged-current weak interactions, Physics Letters B 811 (2020) 135948. doi:https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135948.

[10] A. T. Kruppa, J. Kovács, P. Salamon, Ö. Legeza, Entanglement and correlation in two-nucleon systems, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 48 (2021) 025107. doi:10.1088/1361-6471/abc2dd.

[11] S. R. Beane, R. C. Farrell, M. Varma, Entanglement minimization in hadronic scattering with pions, International Journal of Modern Physics A 36 (2021) 2150205. doi:10.1142/S0217751X21502055. arXiv:https://doi.org/10.1142/S0217751X21502055.

[12] D. E. Kharzeev, E. Levin, Deep inelastic scattering as a probe of entanglement: Confronting experimental data, Phys. Rev. D 104 (2021) L031503. doi:10.1103/PhysRevD.104.L031503.

[13] A. T. Kruppa, J. Kovács, P. Salamon, Ö. Legeza, G. Zaránd, Entanglement and seniority, Phys. Rev. C 106 (2022) 024303. doi:10.1103/PhysRevC.106.024303.

[14] C. Robin, M. J. Savage, N. Pillet, Entanglement rearrangement in self-consistent nuclear structure calculations, Phys. Rev. C 103 (2021) 034325. doi:10.1103/PhysRevC.103.034325.

[15] I. Low, T. Mehen, Symmetry from entanglement suppression, Phys. Rev. D 104 (2021) 074014. doi:10.1103/PhysRevD.104.074014.

[16] W. Gong, G. Parida, Z. Tu, R. Venugopalan, Measurement of bell-type inequalities and quantum entanglement from Λ-hyperon spin correlations at high energy colliders, Phys. Rev. D 106 (2022) L031501. doi:10.1103/PhysRevD.106.L031501.

[17] D. Bai, Z. Ren, Entanglement generation in few-nucleon scattering, Phys. Rev. C 106 (2022) 064005. doi:10.1103/PhysRevC.106.064005.

[18] C. W. Johnson, O. C. Gorton, Proton-neutron entanglement in the nuclear shell model, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 50 (2023) 045110. doi:10.1088/1361-6471/acbece.

[19] P. J. Ehlers, Entanglement between valence and sea quarks in hadrons of 1+1 dimensional qcd, Annals of Physics 452 (2023) 169290. doi:https://doi.org/10.1016/j.aop.2023.169290.

[20] A. Tichai, S. Knecht, A. Kruppa, Ö. Legeza, C. Moca, A. Schwenk, M. Werner, G. Zarand, Combining the in-medium similarity renormalization group with the density matrix renormalization group: Shell structure and information entropy, Physics Letters B 845 (2023) 138139. doi:10.1016/j.physletb.2023.138139.

[21] E. Pazy, Entanglement entropy between short range correlations and the fermi sea in nuclear structure, Physical Review C 107 (2023). doi:10.1103/physrevc.107.054308.

[22] A. Bulgac, Entanglement entropy, single-particle occupation probabilities, and short-range correlations, Physical Review C 107 (2023). doi:10.1103/physrevc.107.l061602.

[23] J. Faba, V. Martín, L. Robledo, Analysis of quantum correlations within the ground state of a three-level lipkin model, Phys. Rev. A 105 (2022) 062449. doi:10.1103/PhysRevA.105.062449.

[24] A. Bulgac, M. Kafker, I. Abdurrahman, Measures of complexity and entanglement in many-fermion systems, Phys. Rev. C 107 (2023) 044318. doi:10.1103/PhysRevC.107.044318.

[25] M. A. Jafarizadeh, M. Ghapanvari, N. Amiri, Entanglement entropy as a signature of a quantum phase transition in nuclei in the framework of the interacting boson model and interacting boson-fermion model, Phys. Rev. C 105 (2022) 014307. doi:10.1103/PhysRevC.105.014307.

[26] D. Bai, Quantum information in nucleon-nucleon scattering, Phys. Rev. C 107 (2023) 044005. doi:10.1103/PhysRevC.107.044005.

[27] C. E. P. Robin, M. J. Savage, Quantum simulations in effective model spaces: Hamiltonian-learning variational quantum eigensolver using digital quantum computers and application to the lipkin-meshkov-glick model, Physical Review C 108 (2023). doi:10.1103/physrevc.108.024313.

[28] C. Gu, Z. H. Sun, G. Hagen, T. Papenbrock, Entanglement entropy of nuclear systems, Physical Review C 108 (2023). doi:10.1103/physrevc.108.054309.

[29] Z. H. Sun, G. Hagen, T. Papenbrock, Coupled-cluster theory for strong entanglement in nuclei, Physical Review C 108 (2023). doi:10.1103/physrevc.108.014307.

[30] D. Bai, Spin entanglement in neutron-proton scattering, Phys. Lett. B 845 (2023) 138162. doi:10.1016/j.physletb.2023.138162.

[31] D. Bai, Toward experimental determination of spin entanglement of nucleon pairs, Phys. Rev. C 109 (2024) 034001. doi:10.1103/PhysRevC.109.034001.

[32] D. Bai, Z. Ren, Spin entanglement of multinucleons: experimental prospects (2024). arXiv:2404.09116.

[33] G. A. Miller, Entanglement maximization in low-energy neutron-proton scattering, 2023. URL: https://arxiv.org/abs/2306.03239. arXiv:2306.03239.

[34] S. M. Hengstenberg, C. E. P. Robin, M. J. Savage, Multi-body entanglement and information rearrangement in nuclear many-body systems: a study of the lipkin − meshkov −

glick model, The European Physical Journal A 59 (2023). URL: http://dx.doi.org/10.1140/epja/s10050-023-01145-x. doi:10.1140/epja/s10050-023-01145-x.

[35] A. Pérez-Obiol, S. Masot-Llima, A. M. Romero, J. Menéndez, A. Rios, A. García-Sáez, B. Juliá-Díaz, Quantum entanglement patterns in the structure of atomic nuclei within the nuclear shell model, The European Physical Journal A 59 (2023). URL: http://dx.doi.org/10.1140/epja/s10050-023-01151-z. doi:10.1140/epja/s10050-023-01151-z.

[36] O. C. Gorton, C. W. Johnson, Weak entanglement approximation for nuclear structure, Physical Review C 110 (2024). URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.110.034305. doi:10.1103/physrevc.110.034305.

[37] A. Roggero, J. Carlson, Dynamic linear response quantum algorithm, Physical Review C 100 (2019). URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.100.034610. doi:10.1103/physrevc.100.034610.

[38] N. Mueller, A. Tarasov, R. Venugopalan, Deeply inelastic scattering structure functions on a hybrid quantum computer, Physical Review D 102 (2020). URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.016007. doi:10.1103/physrevd.102.016007.

[39] F. Turro, T. Chistolini, A. Hashim, Y. Kim, W. Livingston, J. M. Kreikebaum, K. A. Wendt, J. L. Dubois, F. Pederiva, S. Quaglioni, D. I. Santiago, I. Siddiqi, Demonstration of a quantum-classical coprocessing protocol for simulating nuclear reactions, Physical Review A 108 (2023). URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.108.032417. doi:10.1103/physreva.108.032417.

[40] A. Baroni, J. Carlson, R. Gupta, A. C. Li, G. Perdue, A. Roggero, Nuclear two point correlation functions on a quantum computer, Physical Review D 105 (2022). URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.105.074503. doi:10.1103/physrevd.105.074503.

[41] P. F. Bedaque, R. Khadka, G. Rupak, M. Yusf, Radiative processes on a quantum computer, 2022. URL: https://arxiv.org/abs/2209.09962. arXiv:2209.09962.

[42] F. Turro, K. A. Wendt, S. Quaglioni, F. Pederiva, A. Roggero, Evaluation of phase shifts for non-relativistic elastic scattering using quantum computers, 2024. URL: https://arxiv.org/abs/2407.04155. arXiv:2407.04155.

[43] W. Du, J. P. Vary, X. Zhao, W. Zuo, Quantum simulation of nuclear inelastic scattering, Physical Review A 104 (2021). URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.104.012611. doi:10.1103/physreva.104.012611.

[44] A. W. Harrow, A. Hassidim, S. Lloyd, Quantum algorithm for linear systems of equations, Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 150502. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.150502. doi:10.1103/PhysRevLett.103.150502.

[45] A. Y. Kitaev, Quantum measurements and the abelian stabilizer problem (1995). URL: https://arxiv.org/abs/quant-ph/9511026. arXiv:quant-ph/9511026.

[46] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press, 2010.

[47] A. Peruzzo, J. McClean, P. Shadbolt, M.-H. Yung, X.-Q. Zhou, P. J. Love, A. Aspuru-Guzik, J. L. O' Brien, A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor, Nature Communications 5 (2014). doi:10.1038/ncomms5213.

[48] A. Peruzzo, J. McClean, P. Shadbolt, M.-H. Yung, X.-Q. Zhou, P. J. Love, A. Aspuru-Guzik,

J. L. O' Brien, A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor, Nature Communications 5 (2014). doi:10.1038/ncomms5213.

[49] J. R. McClean, J. Romero, R. Babbush, A. Aspuru-Guzik, The theory of variational hybrid quantum-classical algorithms, New Journal of Physics 18 (2016) 023023. doi:10.1088/1367-2630/18/2/023023.

[50] E. F. Dumitrescu, A. J. McCaskey, G. Hagen, G. R. Jansen, T. D. Morris, T. Papenbrock, R. C. Pooser, D. J. Dean, P. Lougovski, Cloud quantum computing of an atomic nucleus, Phys. Rev. Lett. 120 (2018) 210501. doi:10.1103/PhysRevLett.120.210501.

[51] K. Bharti, A. Cervera-Lierta, T. H. Kyaw, T. Haug, S. Alperin-Lea, A. Anand, M. Degroote, H. Heimonen, J. S. Kottmann, T. Menke, W.-K. Mok, S. Sim, L.-C. Kwek, A. Aspuru-Guzik, Noisy intermediate-scale quantum algorithms, Rev. Mod. Phys. 94 (2022) 015004. doi:10.1103/RevModPhys.94.015004.

[52] M. J. Cervia, A. B. Balantekin, S. N. Coppersmith, C. W. Johnson, P. J. Love, C. Poole, K. Robbins, M. Saffman, Lipkin model on a quantum computer, Phys. Rev. C 104 (2021) 024305. doi:10.1103/PhysRevC.104.024305.

[53] O. Higgott, D. Wang, S. Brierley, Variational quantum computation of excited states, Quantum 3 (2019) 156. doi:10.22331/q-2019-07-01-156.

[54] S. McArdle, T. Jones, S. Endo, Y. Li, S. C. Benjamin, X. Yuan, Variational ansatz-based quantum simulation of imaginary time evolution, npj Quantum Information 5 (2019). doi:10.1038/s41534-019-0187-2.

[55] X. Yuan, S. Endo, Q. Zhao, Y. Li, S. C. Benjamin, Theory of variational quantum simulation, Quantum 3 (2019) 191. doi:10.22331/q-2019-10-07-191.

[56] H. R. Grimsley, S. E. Economou, E. Barnes, N. J. Mayhall, An adaptive variational algorithm for exact molecular simulations on a quantum computer, Nature Communications 10 (2019). doi:10.1038/s41467-019-10988-2.

[57] P. J. Ollitrault, A. Kandala, C.-F. Chen, P. K. Barkoutsos, A. Mezzacapo, M. Pistoia, S. Sheldon, S. Woerner, J. M. Gambetta, I. Tavernelli, Quantum equation of motion for computing molecular excitation energies on a noisy quantum processor, Phys. Rev. Res. 2 (2020) 043140. doi:10.1103/PhysRevResearch.2.043140.

[58] J. Stokes, J. Izaac, N. Killoran, G. Carleo, Quantum natural gradient, Quantum 4 (2020) 269. doi:10.22331/q-2020-05-25-269.

[59] N. Gomes, A. Mukherjee, F. Zhang, T. Iadecola, C. Wang, K. Ho, P. P. Orth, Y. Yao, Adaptive variational quantum imaginary time evolution approach for ground state preparation, Advanced Quantum Technologies 4 (2021). doi:10.1002/qute.202100114.

[60] H. L. Tang, V. Shkolnikov, G. S. Barron, H. R. Grimsley, N. J. Mayhall, E. Barnes, S. E. Economou, Qubit-adapt-vqe: An adaptive algorithm for constructing hardware-efficient ansätze on a quantum processor, PRX Quantum 2 (2021) 020310. doi:10.1103/PRXQuantum.2.020310.

[61] A. M. Romero, J. Engel, H. L. Tang, S. E. Economou, Solving nuclear structure problems with the adaptive variational quantum algorithm, Phys. Rev. C 105 (2022) 064317. doi:10.1103/PhysRevC.105.064317.

[62] B. Koczor, S. C. Benjamin, Quantum natural gradient generalized to noisy and nonunitary circuits, Physical Review A 106 (2022). doi:10.1103/physreva.106.062416.

[63] I. Cong, S. Choi, M. D. Lukin, Quantum convolutional neural networks, Nature

Physics 15 (2019) 1273 – 1278. URL: http://dx.doi.org/10.1038/s41567-019-0648-8. doi:10.1038/s41567-019-0648-8.

[64] K. Beer, D. Bondarenko, T. Farrelly, T. J. Osborne, R. Salzmann, D. Scheiermann, R. Wolf, Training deep quantum neural networks, Nature Communications 11 (2020). URL: http://dx.doi.org/10.1038/s41467-020-14454-2. doi:10.1038/s41467-020-14454-2.

[65] A. Abbas, D. Sutter, C. Zoufal, A. Lucchi, A. Figalli, S. Woerner, The power of quantum neural networks, Nature Computational Science 1 (2021) 403 – 409. URL: http://dx.doi.org/10.1038/s43588-021-00084-1. doi:10.1038/s43588-021-00084-1.

[66] X. Pan, Z. Lu, W. Wang, Z. Hua, Y. Xu, W. Li, W. Cai, X. Li, H. Wang, Y.-P. Song, C.-L. Zou, D.-L. Deng, L. Sun, Deep quantum neural networks on a superconducting processor, Nature Communications 14 (2023). URL: http://dx.doi.org/10.1038/s41467-023-39785-8. doi:10.1038/s41467-023-39785-8.

[67] Y.-X. Jin, H.-Z. Xu, Z.-A. Wang, W.-F. Zhuang, K.-X. Huang, Y.-H. Shi, W.-G. Ma, T.-M. Li, C.-T. Chen, K. Xu, Y.-L. Feng, P. Liu, M. Chen, S.-S. Li, Z.-P. Yang, C. Qian, Y.-H. Ma, X. Xiao, P. Qian, Y. Gu, X.-D. Chai, Y.-N. Pu, Y.-P. Zhang, S.-J. Wei, J.-F. Zeng, H. Li, G.-L. Long, Y. Jin, H. Yu, H. Fan, D. E. Liu, M.-J. Hu, Quafu-rl: The cloud quantum computers based quantum reinforcement learning, Chinese Physics B 33 (2024) 050301. URL: https://dx.doi.org/10.1088/1674-1056/ad3061. doi:10.1088/1674-1056/ad3061.

[68] X. Zhang, J. Detwiler, C. Wiseman, The lowest-radiation environments in the Solar System: new opportunities for underground rare-event searches (2024). arXiv:2411.09634.

[69] H. Zhang, D. Bai, Z. Ren, Quantum computing for extracting nuclear resonances, Phys. Lett. B 860 (2025) 139187. doi:10.1016/j.physletb.2024.139187. arXiv:2409.06340.

[70] J. Aguilar, J. M. Combes, A class of analytic perturbations for one-body schrödinger hamiltonians, Commun. Math. Phys. 22 (1971) 269–279.

[71] E. Balslev, J. M. Combes, Spectral properties of many-body schrödinger operators with dilatation-analytic interactions, Commun. Math. Phys. 22 (1971) 280–294.

[72] S. Aoyama, T. Myo, K. Katō, K. Ikeda, The Complex Scaling Method for Many-Body Resonances and Its Applications to Three-Body Resonances, Prog. Theor. Phys. 116 (2006) 1–35. doi:10.1143/PTP.116.1.

[73] T. Myo, Y. Kikuchi, H. Masui, K. Katō, Recent development of complex scaling method for many-body resonances and continua in light nuclei, Prog. Part. Nucl. Phys. 79 (2014) 1–56. doi:10.1016/j.ppnp.2014.08.001.

[74] M. Odsuren, K. Katō, M. Aikawa, T. Myo, Decomposition of scattering phase shifts and reaction cross sections using the complex scaling method, Phys. Rev. C 89 (2014) 034322. doi:10.1103/PhysRevC.89.034322.

[75] H. Zhang, D. Bai, Z. Wang, Z. Ren, Complex scaled nonlocalized cluster model for Be8, Phys. Rev. C 105 (2022) 054317. doi:10.1103/PhysRevC.105.054317.

[76] H. Zhang, D. Bai, Z. Wang, Z. Ren, Complex scaled nonlocalized cluster model with continuum level density, Phys. Rev. C 107 (2023) 064304. doi:10.1103/PhysRevC.107.064304.

[77] T. Myo, H. Takemoto, Resonances and scattering in microscopic cluster models with the complex-scaled generator coordinate method, Phys. Rev.

C 107 (2023) 064308. doi:10.1103/PhysRevC.107.064308.

[78] X. Zhang, A non-Hermitian quantum mechanics approach for extracting and emulating continuum physics based on bound-state-like calculations (2024). arXiv:2408.03309.

[79] X. Zhang, A non-Hermitian quantum mechanics approach for extracting and emulating continuum physics based on bound-state-like calculations: technical details (2024). arXiv:2411.06712.

[80] H. Zhang, D. Bai, Z.-Z. Ren, Analytic continuation in the coupling constant for resonances in $^{9}_{\Lambda}$be, Chinese Physics C (2024). URL: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1137/ad88fa.

[81] H. Zhang, C. Chen, Z.-Z. Ren, X.-R. Zhou, Resonance of hypernuclei with complex momentum representation, Chinese Physics C (2024). URL: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1137/ad9a8c.

[82] D. Frame, R. He, I. Ipsen, D. Lee, D. Lee, E. Rrapaj, Eigenvector continuation with subspace learning, Phys. Rev. Lett. 121 (2018) 032501. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.032501. doi:10.1103/PhysRevLett.121.032501.

[83] N. Yapa, K. Fossez, S. König, Eigenvector continuation for emulating and extrapolating two-body resonances, Phys. Rev. C 107 (2023) 064316. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.064316. doi:10.1103/PhysRevC.107.064316.

[84] P. Demol, T. Duguet, A. Ekström, M. Frosini, K. Hebeler, S. König, D. Lee, A. Schwenk, V. Somà, A. Tichai, Improved many-body expansions from eigenvector continuation, Phys. Rev. C 101 (2020) 041302. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.101.041302. doi:10.1103/PhysRevC.101.041302.

[85] S. König, A. Ekström, K. Hebeler, D. Lee, A. Schwenk, Eigenvector continuation as an efficient and accurate emulator for uncertainty quantification, Physics Letters B 810 (2020) 135814. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269320306171. doi:https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135814.

[86] M. Companys Franzke, A. Tichai, K. Hebeler, A. Schwenk, Excited states from eigenvector continuation: The anharmonic oscillator, Physics Letters B 830 (2022) 137101. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269322002350. doi:https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137101.

[87] S. Yoshida, N. Shimizu, Constructing approximate shell-model wavefunctions by eigenvector continuation, Progress of Theoretical and Experimental Physics 2022 (2022) 053D02. URL: https://doi.org/10.1093/ptep/ptac057. doi:10.1093/ptep/ptac057. arXiv:https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2022/5/053D02/43860928/ptac057.pdf.

[88] A. Sarkar, D. Lee, Convergence of eigenvector continuation, Phys. Rev. Lett. 126 (2021) 032501. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.032501. doi:10.1103/PhysRevLett.126.032501.

[89] J. A. Melendez, C. Drischler, R. J. Furnstahl, A. J. Garcia, X. Zhang, Model reduction methods for nuclear emulators, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 49 (2022) 102001. URL: https://dx.doi.org/10.1088/1361-6471/ac83dd. doi:10.1088/1361-6471/ac83dd.

[90] E. Bonilla, P. Giuliani, K. Godbey, D. Lee, Training and projecting: A reduced basis method emulator for many-body physics, Phys. Rev. C 106 (2022) 054322. URL: https://link.

aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.106.054322. doi:10.1103/PhysRevC.106.054322.

[91] C. Drischler, J. A. Melendez, R. J. Furnstahl, A. J. Garcia, X. Zhang, Buqeye guide to projection-based emulators in nuclear physics, Frontiers in Physics 10 (2023). URL: https://www.frontiersin.org/journals/physics/articles/10.3389/fphy.2022.1092931. doi:10.3389/fphy.2022.1092931.

[92] R. Furnstahl, A. Garcia, P. Millican, X. Zhang, Efficient emulators for scattering using eigenvector continuation, Physics Letters B 809 (2020) 135719. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269320305220. doi:https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135719.

[93] C. Drischler, M. Quinonez, P. Giuliani, A. Lovell, F. Nunes, Toward emulating nuclear reactions using eigenvector continuation, Physics Letters B 823 (2021) 136777. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269321007176. doi:https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136777.

[94] D. Bai, Z. Ren, Generalizing the calculable r-matrix theory and eigenvector continuation to the incoming-wave boundary condition, Phys. Rev. C 103 (2021) 014612. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.103.014612. doi:10.1103/PhysRevC.103.014612.

[95] D. Bai, New extensions of eigenvector continuation r-matrix theory based on analyticity in momentum and angular momentum, Phys. Rev. C 106 (2022) 024611. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.106.024611. doi:10.1103/PhysRevC.106.024611.

[96] A. J. Garcia, C. Drischler, R. J. Furnstahl, J. A. Melendez, X. Zhang, Wave-function-based emulation for nucleon-nucleon scattering in momentum space, Phys. Rev. C 107 (2023) 054001. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.054001. doi:10.1103/PhysRevC.107.054001.

[97] H. Zhang, D. Bai, Z. Wang, Z. Ren, Microscopic cluster model in harmonic oscillator traps, Phys. Rev. C 109 (2024) 034307. doi:10.1103/PhysRevC.109.034307.

[98] H. Zhang, D. Bai, Z. Wang, Z. Ren, Charged particle scattering in harmonic traps, Phys. Lett. B 850 (2024) 138490. doi:10.1016/j.physletb.2024.138490.

[99] H. Zhang, D. Bai, Z. Ren, Harmonic trap method for complex short-range potentials, Phys. Lett. B 855 (2024) 138861. doi:10.1016/j.physletb.2024.138861.

[100] P. Jordan, E. Wigner, Über das paulische äquivalenzverbot, Zeitschrift für Physik 47 (1928) 631–651.

[101] Local potential models for the scattering of complex nuclei, Nuclear Physics A 275 (1977) 246–268. doi:https://doi.org/10.1016/0375-9474(77)90287-1.

[102] https://qcloud.originqc.com.cn/zh, 2024.