关于某些序列中连续元素的互质性

JEAN-MARC DESHOUILLERS AND SUNIL NAIK

献给卡利亚纳 · 查克拉博蒂和斯里尼瓦斯 · 科泰亚达
庆祝他们的六十周年庆典

摘要. 寻找特定算术序列中的素数块是数论中一个经典问题。研究此类序列中成对互质的连续元素块也非常有趣。在此背景下，我们证明如果 f 是在 $,\infty$ 上的二次连续可微实值函数，并且满足 $f''x \to$ 当 $x \to \infty$ 以及 $\limsup_{x\to\infty} f'x \ \ \infty$，那么在序列 $\lfloor fn \rfloor_n$ 中存在任意长度的成对互质连续元素块。这一结果细化了首位作者、Drmota 和 Müllner 近期结果的定性部分。

我们还证明存在一个子集 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$, 其上 Banach 密度为一, 使得对于任意两个不同的整数 $m, n \in \mathcal{A}$，这些整数 $\lfloor fm \rfloor$ 和 $\lfloor fn \rfloor$ 两两互质。进一步地，我们显示在序列 $\lfloor fn \rfloor_n$ 中存在任意长的连续元素块，其中没有两个是两两互质的。

1. 介绍及结果陈述

Segal-Piatetski-Shapiro 序列是形式为 $(\lfloor n^c \rfloor)_n$ 的序列，对于固定的 $c \in (1,\infty) \setminus \mathbb{N}$。在 [9] 中，Piatetski-Shapiro 证明了如果 $c \in \left(1, \frac{12}{11}\right)$，则序列 $(\lfloor n^c \rfloor)_n$ 中存在无限多个素数。本文我们感兴趣的是寻找 $(\lfloor n^c \rfloor)_n$ 中成块的连续元素，这些元素两两互质，当然，最好它们都是不同的素数。在最近的一项工作中 [4]，第一作者 Drmota 和 Müllner 表明如果 $c \in (1,2)$ 和 $0 < \alpha < \min\left(c-1, 1-\frac{c}{2}\right)$，则存在无限多个正整数 n 使得对于任意的正整数 $H \le \alpha \log n$，序列中的所有元素 $\{\lfloor n^c \rfloor, \lfloor (n+1)^c \rfloor, \cdots, \lfloor (n+H)^c \rfloor\}$ 都是两两互素。我们请读者参阅 [1, 2, 3, 5, 8, 11] 了解相关文献。

在这篇文章中，我们将上述结果的定性部分扩展到了一类更大的正规序列。

定理 1. 设 f 为定义在 $[1,\infty)$ 上的二阶连续可微实值函数，使得

(i) $f''(x) \to 0$ 作为 $x \to \infty$,

(ii) $\limsup_{x\to\infty} f'(x) = \infty$.

那么对于任何正整数 H，存在无穷多个正整数 n 使得序列 $\{\lfloor f(n) \rfloor, \lfloor f(n+1) \rfloor, \cdots, \lfloor f(n+H) \rfloor\}$ 中的所有元素两两互质。

备注 1.1. 对于 $c \in (1,2)$，函数 $f(x) = x^c$ 满足定理 1的条件。这意味着在序列 $\left(\lfloor n^c \rfloor\right)_n$ 中存在任意长的连续元素块，这些元素两两互质，从而恢复了主要结果 [4] 的定性部分。

2020 Mathematics Subject Classification. 11B05, 11B50, 11K31, 11N56.

Key words and phrases. Segal-Piatetski-Shapiro 序列，正则序列，两两互质，Banach 密度.

备注 1.2. 我们注意到定理 1中的第二个条件是存在任意长的连续互质元素序列 $(\lfloor f(n)\rfloor)_n$ 所必需的。显然，当 $\limsup_{x\to\infty} f'(x) = -\infty$ 时可以类似地考虑函数 $-f$ 的情形。进一步，可以考虑将定理 1中的第二个条件替换为 $\liminf_{x\to\infty} f'(x) = -\infty$ 的情况。不失一般性，我们可以假设 $\liminf_{x\to\infty} f'(x) > -\infty$。假设 $\limsup_{x\to\infty} f'(x)$ 是有限的，那么 $|f(m+1) - f(m)| = O(1)$ 因此对于任意 $n \in \mathbb{N}$，存在一个长度为 $O(H)$ 的区间 I 包含 $\{\lfloor f(n)\rfloor, \lfloor f(n+1)\rfloor, \cdots, \lfloor f(n+H)\rfloor\}$。如果 $\lfloor f(n)\rfloor$,$\lfloor f(n+1)\rfloor$,$\cdots$, $\lfloor f(n+H)\rfloor$ 两两互素，那么 I 包含一个基数至少为 H 的集合其元素两两互素。但这与 Erdős 和 Selfridge 的结果 [6, p. 5] 对于充分大的 H 是不可能的。这表明 $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 在定理 1中是必要的。

备注 1.3. 我们还注意到定理 1中的第一个条件不能被较弱的条件 $f'(x) = o(x)$ 所替代。对于 $n \geq 2$, 设 a_n 为 $[n^{3/2}-2, n^{3/2}]$ 中的一个偶数整数。观察到 $a_n < a_{n+1}$ 和 $a_{n+1}-a_n = (3/2 + o(1))\, n^{1/2}$。可以构造一个在 $[1, \infty)$ 上二阶连续可微的实值函数 g，使得对于足够大的 x，有 $g(n) = a_n$ 和 $x^{1/2} < g'(x) < 2x^{1/2}$。然后我们有 $g'(x) = o(x)$ 和 $\limsup_{x\to\infty} g'(x) = \infty$，但是对于所有 $n \geq 2$，$g(n)$ 是偶数。

我们也可以考虑

$$g(x) \;=\; \int_1^x t^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi t)dt.$$

然后是 $g'(x) = o(x)$ 和 $\limsup_{x\to\infty} g'(x) = \infty$。注意

$$g(n+1) - g(n) \;=\; \int_n^{n+1} t^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi t)dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left(\frac{y}{2}+n\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{y+1}{2}+n\right)^{\frac{1}{2}}\right)\sin(\pi y)dy.$$

因此

$$|g(n+1) \;-\; g(n)| \;<\; \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

从而对于所有足够大的 n，序列中任意三个连续元素 $(\lfloor g(n)\rfloor)_n$ 不是两两互素。

为了阐述下一个结果，让我们回忆一下密度的以下概念。对于自然数的一个子集 $\mathcal{S}$，$\mathcal{S}$ 的上巴拿赫密度（或上一致密度，参见 [7, 10] 以获取更多详细信息）定义为

$$\lim_{H\to\infty} \limsup_{x\to\infty} \frac{\#\left(\mathcal{S}\cap(x, x+H]\right)}{H}.$$

在此设定下，我们证明了以下结果。

定理 2. 令 f 如定理 1中所述。则存在一个子集 $\mathcal{A}$，其自然数的上 Banach 密度等于 1，使得对于任何包含在 $\mathcal{A}$ 中的不同整数对 m 和 n，整数 $\lfloor f(m)\rfloor$ 和 $\lfloor f(n)\rfloor$ 两两互素。

在定理 1的相反方向，也有可能找到序列 $(\lfloor f(n)\rfloor)_n$ 中任意长的元素块，使得其中没有任何两个元素是互质的。实际上，我们证明了以下定理。

定理 3. 设 f 如定理 1中所述。那么对于任何正整数 H，存在无穷多个正整数 n 使得序列 $\{\lfloor f(n)\rfloor, \lfloor f(n+1)\rfloor, \cdots, \lfloor f(n+H)\rfloor\}$ 中的所有元素都是偶数。

2. 定理的证明

以下命题是我们证明定理 1的核心。

命题 4. 令 $H \geq 2$ 为一个正整数，$\Pi_H = \prod_{p \leq H} p$ 为所有小于或等于 H 的素数的乘积。设 $f \in \mathcal{C}^2([1,\infty))$ 是定义在 $[1,\infty)$ 上的二阶连续可微实值函数，且 n 是满足

$$\{f(n)\} \leq \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{9H} \leq \{f'(n)\} \leq \tfrac{1}{3H} \quad \text{and} \quad |f''(x)| \leq \tfrac{1}{10H^2} \quad \text{for} \quad x \in [n, n+H], \tag{1}$$

$$\lfloor f'(n) \rfloor \equiv 0 \pmod{\Pi_H}, \tag{2}$$

$$\gcd(\lfloor f(n) \rfloor, \lfloor f'(n) \rfloor) = 1. \tag{3}$$

的正整数。则集合 $\{f(n+h) : h \in [H/2, H] \cap \mathbb{N}\}$ 中的整数两两互素。

证明. 根据泰勒定理，对于任何整数 $h \in [H/2, H]$，存在 $\theta_h \in [0,1]$ 使得

$$\begin{aligned} f(n+h) &= f(n) + hf'(n) + \frac{h^2}{2} f''(n+\theta_h h) \\ &= \lfloor f(n) \rfloor + h\lfloor f'(n) \rfloor + \{f(n)\} + h\{f'(n)\} + \frac{h^2}{2} f''(n+\theta_h h). \end{aligned}$$

注意

$$0 \leq f(n+h) - \lfloor f(n) \rfloor - h\lfloor f'(n) \rfloor \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{20} < 1.$$

这意味着对于任何整数 $h \in [H/2, H]$，我们有

$$\lfloor f(n+h) \rfloor = \lfloor f(n) \rfloor + h\lfloor f'(n) \rfloor. \tag{4}$$

观察到对于任何素数 $p \leq H$, 我们有 $p \nmid \lfloor f(n+h) \rfloor$ 对于任何 $H/2 \leq h \leq H$。这是因为, 从 (2), 我们得到 $p \mid \lfloor f'(n) \rfloor$ 和从 (3)，$p \nmid \lfloor f(n) \rfloor$ 因此我们通过 (4) 得到 $p \nmid \lfloor f(n+h) \rfloor$。假设存在一个素数 $p > H$, 使得 $p \mid \gcd(\lfloor f(n+h) \rfloor, \lfloor f(n+k) \rfloor)$ 对于某对整数 h 和 k 成立, 其中 $H/2 \leq k < h \leq H$。那么 $p \mid \lfloor f(n+h) \rfloor - \lfloor f(n+k) \rfloor$。从 (4)，我们有

$$\lfloor f(n+h) \rfloor - \lfloor f(n+k) \rfloor = (h-k)\lfloor f'(n) \rfloor.$$

因此 $p \mid \lfloor f'(n) \rfloor$。从 (4)，我们推断出 $p \mid \lfloor f(n) \rfloor$，这与 (3) 相矛盾。因此，对于任意两个不同的整数 $h, k \in [H/2, H]$，$\lfloor f(n+h) \rfloor$ 和 $\lfloor f(n+k) \rfloor$ 是互质的。 □

我们需要以下这个“常识性”的引理，它给出了一个等价条件，即 $\lfloor x \rfloor$ 是偶数。

引理 5. 令 x 为一个实数。我们有

$$\lfloor x \rfloor \equiv 0 \pmod 2 \iff \left\{\frac{x}{2}\right\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

2.1. **定理 1的证明**. 设 f 如定理 1中所述，且 $H \geq 2$ 是一个较大的正整数。另设 $x_0 > 1$ 是满足以下条件的实数

$$|f''(x)| \leq \frac{1}{(100H\Pi_H)^3} \tag{5}$$

对于 $x \geq x_0$。令 $q > H$ 是一个足够大的素数。则存在一个正整数 $m = m(q) > x_0 + 1$，使得

$$\lfloor f'(m-1) \rfloor < \lfloor f'(m) \rfloor = q\Pi_H. \tag{6}$$

根据中值定理和 (5)，对于任意的 $x \geq x_0$，我们有

$$|f'(x+1) - f'(x)| \leq \frac{1}{(100H\Pi_H)^3} \tag{7}$$

这结合 (6) 中的不等式意味着

$$\{f'(m)\} < \frac{1}{100H}. \tag{8}$$

从 (7)，(8) 以及事实 $\limsup_{x\to\infty} f'(x) = \infty$，存在一个整数 $n_0 \geq m$，使得

$$\lfloor f'(n_0) \rfloor = \lfloor f'(m) \rfloor = q\Pi_H \quad \text{and} \quad \{f'(n_0)\} \in \left(\frac{1}{6H}, \frac{1}{5H}\right). \tag{9}$$

令 $K = 15H\Pi_H$。由泰勒公式，对于任意整数 $k \in [0, K]$，我们有

$$f(n_0 + k) = f(n_0) + kf'(n_0) + \frac{k^2}{2} f''(n_0 + \theta_k k)$$

对于某个 $\theta_k \in [0, 1]$。令 $\epsilon_k = \frac{k^2}{2} f''(n_0 + \theta_k k)$。从 (5)，我们有

$$|\epsilon_k| < \frac{1}{20H}. \tag{10}$$

我们可以写成

$$f(n_0 + k) = f(n_0) + kq\Pi_H + k\{f'(n_0)\} + \epsilon_k.$$

考虑序列 $(a_k)_{0\leq k\leq K}$，其中

$$a_k = f(n_0 + k) - kq\Pi_H = f(n_0) + k\{f'(n_0)\} + \epsilon_k.$$

从 (9) 和 (10)，我们有

$$a_K - a_0 = K\{f'(n_0)\} + \epsilon_K > 15H\Pi_H \cdot \frac{1}{6H} - \frac{1}{20H} > 2\Pi_H.$$

对于任何 $k \in [0, K-1]$，我们得到

$$0 < a_{k+1} - a_k = \{f'(n_0)\} + \epsilon_{k+1} - \epsilon_k < \frac{1}{5H} + \frac{1}{20H} + \frac{1}{20H} < \frac{1}{3H}. \tag{11}$$

因此，存在一个整数 $k_0 \in [0, K]$ 使得

$$\lfloor a_{k_0} \rfloor \equiv 1 \pmod{\Pi_H}, \lfloor a_{k_0} \rfloor \not\equiv 0 \pmod{q} \quad \text{and} \quad \{a_{k_0}\} < \frac{1}{3}.$$

为了看到这一点，设 $b \in [a_0, a_K)$ 是最小的整数，满足

$$b \;\equiv\; 1 \;\;(\bmod \Pi_H) \quad \text{and} \quad b \;\not\equiv\; 0 \;\;(\bmod q).$$

这样的整数存在，因为 $a_K - a_0 > 2\Pi_H$。令 $k_0 \in [0, K]$ 为满足条件的最小整数 $a_{k_0} \geq b$。则由 (11)，我们有 $\lfloor a_{k_0} \rfloor = b$ 和 $\{a_{k_0}\} < \frac{1}{3H}$。设 $n = n_0 + k_0$。容易看出

$$\begin{aligned} &\lfloor f'(n) \rfloor \;=\; q\Pi_H, \quad \gcd(\lfloor f(n) \rfloor,\; q\Pi_H) \;=\; 1, \\ &\{f(n)\} \;\leq\; \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9H} \;\leq\; \{f'(n)\} \;\leq\; \frac{1}{3H}, \quad |f''(n)| \;\leq\; \frac{1}{10H^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

因此存在无限多对正整数 q,$n = n(q)$ 满足 (12)。现在定理 1由命题 4推出。 □

2.2. **定理 2的证明**. 设 f 如定理 1中所述。设 $H_1 \geq 2$ 是一个自然数。那么根据定理 1，存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ 使得整数 $\lfloor f(n_1) \rfloor, \lfloor f(n_1+1) \rfloor, \cdots, \lfloor f(n_1+H_1) \rfloor$ 两两互素。令 H_2 为一个严格大于 $H_1 + \max_{0 \leq h \leq H_1} |f(n_1+h)|$ 的自然数。现在按照定理 1的证明过程，我们可以找到一个素数 $q_2 > H_2$ 和一个自然数 $n_2 > n_1 + H_1$，使得

$$\lfloor f'(n_2) \rfloor \;=\; q_2\Pi_{H_2},\; \gcd(\lfloor f(n_2) \rfloor, q_2\Pi_{H_2}) \;=\; 1 \quad \text{and} \quad \lfloor f(n_2+h) \rfloor \;=\; \lfloor f(n_2) \rfloor + h\lfloor f'(n_2) \rfloor$$

对于 $H_2/2 \leq h \leq H_2$ 成立。然后集合 $\{\lfloor f(n_2+h) \rfloor : h \in [H_2/2, H_2] \cap \mathbb{N}\}$ 中的整数两两互质。另外，如果 p 是一个能整除 $\lfloor f(n_1+h) \rfloor$ 的素数对于某个 $0 \leq h \leq H_1$，那么 p 整除 Π_{H_2}，因为 $H_2 > H_1 + \max_{0 \leq h \leq H_1} |f(n_1+h)|$。因此 p 不能整除 $\lfloor f(n_2+h) \rfloor$ 对于任何整数 $h \in [H_2/2, H_2]$。通过归纳，存在整数 $H_r > H_{r-1} + \max\{|f(n_i+h_j)| : h_j \in [H_i/2, H_i] \cap \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r-1\}$ 和 $n_r > n_{r-1} + H_{r-1}$ 使得集合中的整数 $\{\lfloor f(n_i+h_j) \rfloor : h_j \in [H_i/2, H_i] \cap \mathbb{N},\; 1 \leq i \leq r\}$ 是两两互素的。令

$$\mathcal{A} \;=\; \{n_i + h_j \;:\; h_j \in [H_i/2, H_i] \cap \mathbb{N},\; i \in \mathbb{N}\}.$$

显然，$\mathcal{A}$ 的上 Banach 密度等于 1。这完成了定理 2的证明。 □

2.3. **定理 3的证明**. 参照定理 1的证明进行论证（参见 (5) 和 (9) 对于函数 $f/2$），对于给定的 H，我们可以找到无限多个正整数 n 使得

$$\left\{\frac{f'(n)}{2}\right\} \;\in\; \left(\frac{1}{6H}, \frac{1}{5H}\right) \quad \text{and} \quad |f''(x)| \;\leq\; \frac{1}{1000H^3}$$

对于 $x \geq n$。f 的泰勒展开式导致了

$$\frac{f(n+h)}{2} \;=\; \frac{f(n)}{2} \;+\; h\frac{f'(n)}{2} \;+\; \epsilon_h$$

当 $|\epsilon_h| < \frac{1}{50H}$ 时，对于 $0 \leq h \leq 10H$。我们有

$$\left\{\frac{f(n+h)}{2}\right\} \;=\; \left\{\left\{\frac{f(n)}{2}\right\} \;+\; h\left\{\frac{f'(n)}{2}\right\} \;+\; \epsilon_h\right\}.$$

设 $\xi_h = h\left\{\frac{f'(n)}{2}\right\} + \epsilon_h$。然后我们有

$$\xi_{10H} \ > \ 1 \quad \text{and} \quad 0 \ < \ \xi_{h+1} \ - \ \xi_h \ < \ \frac{1}{4H}$$

对于任意整数 $h \in [0, 10H)$。因此，可以找到至少 H 个连续的 $h \in [0, 10H)$ 值，使得 $\left\{\frac{f(n+h)}{2}\right\} \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right)$，这得益于引理 5，证明了定理 3。 □

3. 致谢

本文得到了联合 FWF-ANR 项目 Arithrand 的支持：FWF: I 4945-N 和 ANR-20-CE91-0006，以及 SPARC 项目 445 的支持。第二作者感谢加拿大皇后大学和印度数学科学研究所 (IMSc) 提供了极好的工作氛围。部分工作是在第二作者访问法国波尔多数学研究所期间完成的，第二作者在此感谢访问期间的热情款待。

References

[1] W. Banks and I. E. Shparlinski, On the greatest common divisor of integer parts of polynomials, arXiv:2205.00253.

[2] V. Bergelson and F. K. Richter, On the density of coprime tuples of the form $(n, \lfloor f_1(n) \rfloor, \cdots, \lfloor f_k(n) \rfloor)$, where $f_1, \cdots, f_k$ are functions from a Hardy field, Number theory - Diophantine problems, uniform distribution and applications, 109–135, Springer, Cham, 2017.

[3] F. Delmer and J.-M. Deshouillers, On the probability that n and $[n^c]$ are coprime, Period. Math. Hungar. 45 (2002), no. 1-2, 15–20.

[4] J.-M. Deshouillers, M. Drmota and C. Müllner, Coprimality of consecutive elements in a Piatetski-Shapiro sequence, Number theory in memory of Eduard Wirsing, 91–98, Springer, Cham (2023).

[5] P. Erdős and G. G. Lorentz, On the probability that n and $g(n)$ are relatively prime, Acta Arith. 5 (1958), 35–44 (1959).

[6] P. Erdős and J. L. Selfridge, Complete prime subsets of consecutive integers, Proceedings of the Manitoba Conference on Numerical Mathematics (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1971), 1–14.

[7] G. Grekos, V. Toma and J. Tomanová, A note on uniform or Banach density, Ann. Math. Blaise Pascal 17 (2010), no. 1, 153–163.

[8] J. Lambek and L. Moser, On integers n relatively prime to $f(n)$, Canadian J. Math. 7 (1955), 155–158.

[9] I. I. Piatetski-Shapiro, On the distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$, (Russian), Mat. Sbornik N.S. 33(75), (1953), 559–566.

[10] P. Ribenboim, Density results on families of Diophantine equations with finitely many solutions, Enseign. Math. (2) 39 (1993), no. 1–2, 3–23.

[11] G. L. Watson, On integers n relatively prime to $[\alpha n]$, Canad. J. Math. 5 (1953), 451–455.

Jean-Marc Deshouillers
Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP 33400, Talence, France
Email address: jean-marc.deshouillers@math.u-bordeaux.fr

Sunil L Naik
Department of Mathematics, Queen's University, Jeffrey Hall, 99 University Avenue, Kingston, ON K7L3N6, Canada
Email address: naik.s@queensu.ca