正则序列中元素的互素性及其多项式增长

JEAN-MARC DESHOUILLERS AND SUNIL NAIK

致 Krishnaswami Alladi，感谢他对数学及其传播的贡献

摘要. 对某些算术序列中的素数进行研究是数论中的一个基本问题，特别是近年来寻找不同素数组成的块受到了广泛关注。在此背景下，我们证明了在某些正则序列中存在长的 k 互质元素块。更准确地说，我们证明对于任意正整数 $H \geq k \geq$ 和一个实值的 k 次连续可微函数 $f \in \mathcal{C}^k\left(,\infty\right)$ 满足 $\lim_{x\to\infty} f^k x$ 和 $\limsup_{x\to\infty} f^{k-} x \ \infty$，存在无穷多个正整数 n 使得对于任何整数 $\leq i < i < \cdots < i_k \leq H$ 成立

$$\gcd\left(\lfloor fn \ i\rfloor, \lfloor fn \ i\rfloor, \cdots, \lfloor fn \ i_k\rfloor\right)$$

。进一步，我们证明存在一个子集 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ 具有上巴拿赫密度一，使得

$$\gcd\left(\lfloor fn\rfloor, \lfloor fn\rfloor, \cdots, \lfloor fn_k\rfloor\right)$$

对于任何不同的整数 $n, n, \cdots, n_k \in \mathcal{A}$。

1. 介绍

G. Lejeune Dirichlet[5] 在 1849 年证明了以下结果

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \#\{(n,m)\colon 1 \leq n, m \leq N, \gcd(n,m) = 1\} = \frac{1}{\zeta(2)}, \tag{1}$$

其中 ζ 表示黎曼 ζ 函数。这个问题是由切比雪夫推广的，他经常询问“给定分数随机 a/b，其中正整数 a 和 b 是不可约的概率是多少?”。我们概述了 F. Mertens[9] 于 1874 年给出的证明，该证明利用莫比乌斯函数检测到 n 和 m 的 gcd 等于 1。我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n,m\leq N\\ \gcd(n,m)=1}} 1 &= \sum_{n,m\leq N} \sum_{d|\gcd(n,m)} \mu(d) \\
&= \sum_{d\leq N} \mu(d) \sum_{\substack{n\leq N\\ n\equiv 0 \pmod d}} 1 \sum_{\substack{m\leq N\\ m\equiv 0 \pmod d}} 1 \\
&= \sum_{d\leq N} \mu(d) \left(\frac{N}{d} + O(1)\right)^2 \sim \frac{N^2}{\zeta(2)}.
\end{aligned}$$

令 $\mathcal{A} = (a_n)_n$ 和 $\mathcal{B} = (b_m)_m$ 为两个正整数序列。从 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中选取的两个元素互质的概率可以通过两种方法来解决。我们可以首先寻找 a_n 和 b_m 互质的渐近频率：Mertens 的方法告诉我们，这

2020 Mathematics Subject Classification. 11B05, 11B25 11B50, 11K31, 11N56, 41A58.

Key words and phrases. 正则序列，k-互素性，巴拿赫密度.

相当于知道 $\mathcal{A}$ 元素以及 $\mathcal{B}$ 在倍数集合中的分布。第二种方法是寻找 a_n 和 b_n 互质的渐近频率：Mertens 的方法告诉我们，这相当于知道多重集合中成对出现的 (a_n, b_n) 的联合分布，更准确地说，我们被归结为研究类似以下的表达式

$$\sum_{\substack{n \le N \\ a_n \equiv b_n \equiv 0 \pmod d}} 1 \tag{2}$$

我们只考虑第二种类型的问题。

G. Watson [11]，回答了 K. F. Roth 的一个问题，证明了在 1953 年对于任何无理实数 α，概率[1] 那么 n 和 $\lfloor \alpha n \rfloor$ 是互素的概率是 $1/\zeta(2)$。J. Lambek 和 L. Moser[8] 在 1955 年考虑了 n 和 $\lfloor f(n) \rfloor$ 的互质性，当 f 是一个平滑缓慢增加的函数时；P. Erdős 和 G. G. Lorentz[6] 在 1958 年对此进行了扩展和完善。在 2002 年，F. Delmer 和第一作者 [2] 证明了对于任何大于 1 的非整数 c，概率即 n 和 $\lfloor n^c \rfloor$ 互素的情况仍然为 $1/\zeta(2)$，解决了在 1999 年布达佩斯举行的 "Paul Erdős 及其数学" 研讨会上提出的问题。在 2017 年，V. Bergelson 和 F. K. Richter[1] 将后者的结果扩展到证明属于 Hardy 场并满足某些增长条件的函数 $f_1, \ldots, f_k$，使得正整数集 n 满足 $\gcd(n, \lfloor f_1(n) \rfloor, \ldots, \lfloor f_k(n) \rfloor) = 1$ 具有概率 $1/\zeta(k+1)$ 。

在前一章的所有情况下，所考虑的序列之一是所有整数的集合。这会对和（2）产生两个影响：首先，所考虑的数字 d 被 N 限制；其次，条件 $a_n \equiv 0 \pmod d$ 容易处理。受此考虑的启发，M. Drmota、C. Müllner 和本文第一作者 [3] 在 2023 年证明了以下定理。

定理 1. 设 c 在 $(1,2)$ 和 $\alpha < (c-1)$ 中。存在无穷多个 n，使得对于任意整数 $H \le \alpha \log n$，序列 $\{\lfloor n^c \rfloor, \lfloor (n+1)^c \rfloor, \ldots, \lfloor (n+H)^c \rfloor\}$ 中的所有元素都是两两互素的。

在 [4] 中，我们扩展了定理 1的定性部分，证明了以下结果。

定理 2. 设 f 是定义在 $[1, \infty)$ 上的二次连续可微实值函数，满足

$$\lim_{x \to \infty} f''(x) \;=\; 0 \tag{3}$$

and

$$\limsup_{x \to \infty} f'(x) = \infty. \tag{4}$$

则对于任何正整数 H，存在无穷多个正整数 n 使得序列中的所有元素 $\{\lfloor f(n+1) \rfloor, \lfloor f(n+2) \rfloor, \cdots, \lfloor f(n+H) \rfloor\}$ 都是两两互素的。

本文的主要结果是将定理 2扩展到增长更快的函数，即具有多项式增长的函数。

[1] 我们说，满足性质 $\mathcal{P}$ 的整数集合具有概率 δ ，如果这个集合有自然渐近密度 δ ，即如果 $\lim_{N\to\infty} \#\{n \le N : \mathcal{P}(n)\}/N = \delta$。

定理 3. 设 $k \geq 2$ 为正整数，f 为定义在 $[1, \infty)$ 上的 k-连续可微实值函数，使得

$$\lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x) \;=\; 0 \tag{5}$$

and

$$\limsup_{x\to\infty} f^{(k-1)}(x) = \infty. \tag{6}$$

那么对于任何正整数 $H \geq k$，存在无穷多个正整数 n 使得

$$\forall\, h_1 < h_2 < \cdots < h_k \in [1, H]\colon\ \gcd\left(\lfloor f(n+h_1)\rfloor, \lfloor f(n+h_2)\rfloor, \cdots, \lfloor f(n+h_k)\rfloor\right) \;=\; 1. \tag{7}$$

备注 1. 条件 (5) 不足以保证结论的有效性。例如，函数 $f(x) = x^{k-1} + 1/x$ 满足 (5)，但是对于任何正数 n，两个数字 $\lfloor f(n+1)\rfloor, \lfloor f(n+2)\rfloor, \lfloor f(n+3)\rfloor, \lfloor f(n+4)\rfloor$ 中有两个是偶数。

备注 2. 通过类似的论证，我们可以证明定理 3，将条件 (6) 替换为较弱的要求

$$f^{(k-1)} \text{ is unbounded.} \tag{8}$$

。需要注意一点：如果 x 是一个非整数的正数，那么 $\lfloor -x\rfloor = -\lfloor x\rfloor - 1$。

问题 3. 在定理 3的假设下，是否存在整数 n，使得这些数 $\lfloor f(n+1)\rfloor, \lfloor f(n+2)\rfloor, \ldots, \lfloor f(n+H)\rfloor$ 两两互素?

我们的方法基于以下方式使用泰勒展开。设 n 和 u 为两个正整数；存在 θ 在 $[0,1]$ 中，使得

$$f(n+u) \;=\; \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u^j}{j!}\lfloor f^{(j)}(n)\rfloor \tag{9}$$

$$+\;\; \{f(n)\} \tag{10}$$

$$+\;\; \sum_{j=1}^{k-1} \frac{u^j}{j!}\{f^{(j)}(n)\} + \frac{u^k}{k!} f^{(k)}(n+\theta u). \tag{11}$$

我们对 (11) 中的项的唯一了解来自于 (5)：它将被视为一个具有很小绝对值的误差项，但我们必须记住我们无法控制它的符号。

主项是 (9) 的右侧：它是一个可以轻易转换为整数的有理数，我们只需要知道其在一个模取决于 k 和 H 的类中的剩余。

当积分项具有期望的算术性质时，我们期望有

$$\lfloor f(n+u)\rfloor = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u^j}{j!}\lfloor f^{(j)}(n)\rfloor. \tag{12}$$

为此，只需要在 (10) 中的正的项足够小以成为误差项，但又足够大以补偿 (11) 中可能为负的另一个误差项。这将在命题 4的证明中进行说明。当积分项需要一些调整时，我们还将使用在 (10) 中的项以及在 (11) 中的第一项来进行该调整。这将在定理 3的证明中说明。

下一个命题是定理 3证明中的一个中间步骤：它给出了 f 在整数 n 处的导数使得 (7) 成立的充分条件。

命题 4. 设 H, k 是正整数，并且 $2 \leq k \leq H$，$\Pi_H = \prod_{p \leq H} p$ 是所有小于或等于 H 的素数的乘积。令 $f \in \mathcal{C}^k([1, \infty))$ 是一个实值函数，n 是一个正整数，使得

$$\frac{1}{4^{4k}} < \{f(n)\} < \frac{1}{4}, \tag{13}$$

$$\{f^{(i)}(n)\} \ < \ \frac{1}{4H^i} \quad \text{for} \quad 1 \leq i < k \quad \text{and} \quad |f^{(k)}(x)| \ < \ \frac{1}{4^{4k} H^k} \quad \text{for } x \in [n, n+H], \tag{14}$$

$$\forall i \in [1, k-1] \colon \lfloor f^{(i)}(n) \rfloor \ \equiv \ 0 \ (\bmod k! \Pi_H), \tag{15}$$

$$\exists \, \ell \in [1, k-1] \colon \ \gcd \Big(\lfloor f(n) \rfloor, \ \lfloor f^{(\ell)}(n) \rfloor \Big) \ = \ 1. \tag{16}$$

那么我们有

$$\gcd \left(\lfloor f(n+h_1) \rfloor, \lfloor f(n+h_2) \rfloor, \cdots, \lfloor f(n+h_k) \rfloor \right) \ = \ 1$$

对于任何整数 $1 \leq h_1 < h_2 < \cdots < h_k \leq H$。

我们将证明命题 4，该证明位于第 2节，并将其应用于在第 3节中证明定理 3。

在第 4 节中，我们将把定理 3扩展到从 $(\lfloor f(n) \rfloor)_n$ 中的无限个 k-互素元素，即

定理 5. 设 f 如定理 3中所述。存在一个无限子集 $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ 具有上 Banach 密度等于 1，使得对于 $\mathcal{A}$ 中任何 k 个不同整数，

$$\gcd \left(\lfloor f(n_1) \rfloor, \lfloor f(n_2) \rfloor, \ldots, \lfloor f(n_k) \rfloor \right) = 1$$

。

我们回忆一下上 Banach 密度（参见。[7] 或 [10]) 的一个子集 $\mathcal{S}$ 的 $\mathbb{N}$ 由

$$\lim_{H \to \infty} \limsup_{x \to \infty} \frac{1}{H} \#(\mathcal{S} \cap (x, x+H]).$$

定义。

2. 命题 4的证明

设 f, n 如命题 4中所述以及 $1 \leq h \leq H$。由泰勒定理，我们有某个 θ_h 在 $[0, 1]$ 内：

$$f(n+h) \ = \ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h^i}{i!} \lfloor f^{(i)}(n) \rfloor \tag{17}$$

$$+ \ \{f(n)\} \tag{18}$$

$$+ \ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{h^i}{i!} \{f^{(i)}(n)\} \ + \ \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(n + \theta_h h). \tag{19}$$

我们有

$$0 \leq \frac{1}{4^{4k}} - \frac{h^k}{k!4^{4k}H^k} \leq \{f(n)\} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{h^i}{i!}\{f^{(i)}(n)\} \ + \ \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(n+\theta_h h) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} \cdot \frac{1}{4H^i} \leq \frac{e}{4} < 1.$$

由 (15)，对于任意的 i 在 0 和 $k-1$ 之间的量 $\lfloor f^{(i)}(n) \rfloor$ 可以被 $i!$ 整除。因此我们有

$$\forall h \in [1, H]\colon \lfloor f(n+h) \rfloor \ = \ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h^i}{i!} \lfloor f^{(i)}(n) \rfloor. \tag{20}$$

令 $1 \leq h_1 < h_2 < \cdots < h_k \leq H$ 为正整数。

注意到对于任意素数 $p \leq H$，我们有

$$p \nmid \lfloor f(n+h_j) \rfloor \quad \forall\, 1 \leq j \leq k.$$

这是因为如果 $p \leq H$，则从 (15)，我们得到 $p \mid \frac{\lfloor f^{(i)}(n) \rfloor}{i!}$ 对于 $1 \leq i \leq k-1$ 和从 (16)，我们有 $p \nmid \lfloor f(n) \rfloor$。假设存在一个素数 $p > H$，使得

$$p \mid \gcd\left(\lfloor f(n+h_1) \rfloor, \lfloor f(n+h_2) \rfloor, \cdots, \lfloor f(n+h_k) \rfloor\right). \tag{21}$$

然后我们将 (20) 重写为矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix} \lfloor f(n+h_1) \rfloor \\ \lfloor f(n+h_2) \rfloor \\ \vdots \\ \lfloor f(n+h_k) \rfloor \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & h_1 & h_1^2 & \cdots & h_1^{k-1} \\ 1 & h_2 & h_2^2 & \cdots & h_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & h_k & h_k^2 & \cdots & h_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lfloor f(n) \rfloor \\ \frac{\lfloor f'(n) \rfloor}{1!} \\ \vdots \\ \frac{\lfloor f^{(k-1)}(n) \rfloor}{(k-1)!} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

令 $V = V(h_1, h_2, \cdots, h_k) = (h_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq k}$ 表示范德蒙德矩阵，并令 $V^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ 表示其逆矩阵。众所周知，

$$\det(V) \ = \ \prod_{1 \leq i < j \leq k} (h_j - h_i).$$

同样我们有 $\det(V) \cdot b_{ij} \in \mathbb{Z}$ 对于每一个 $1 \leq i, j \leq k$。从 (22)，我们得到

$$\frac{\lfloor f^{(r)}(n) \rfloor}{r!} \ = \ \sum_{j=1}^{k} b_{rj} \lfloor f(n+h_j) \rfloor$$

对于任意的 $0 \leq r \leq k-1$。因此我们得到

$$\det(V) \cdot \lfloor f^{(r)}(n) \rfloor \ = \ r! \sum_{j=1}^{k} \det(V) b_{rj} \lfloor f(n+h_j) \rfloor$$

从 (21)，对于任意的 $0 \leq r \leq k-1$，我们得到 $p \mid \det(V) \cdot \lfloor f^{(r)}(n) \rfloor$。由于 $p \nmid \det(V)$，我们得到 $p \mid \lfloor f^{(r)}(n) \rfloor$ 对于任何 $0 \leq r \leq k-1$，这与 (16) 矛盾。这完成了命题 4的证明。 □

3. 定理 3的证明

以下结果是通过归纳法证明定理 3的关键步骤。它表明，如果可以在某个同余中定位 $\lfloor f^{(i)}(n) \rfloor$，并在某个整数 $n = n_0$ 的小区间内定位 $\{f^{(i)}(n)\}$，以及在 $[m, k-1]$ 中定位 i，那么我们也可以对接近 n_0 的 $n = n_1$ 和所有在 $[m-1, k-1]$ 中的 i 做同样的事情。

引理 6. 设 k, m 是正整数，且 $m \leq k-1$，$(A_i)_{i=m}^{k-1}$ 和 $(B_i)_{i=m}^{k}$ 是严格递增的正整数序列。也令 $f \in \mathcal{C}^k([1,\infty))$ 是一个实值函数，$(v_i)_{i=m}^{k-1}$ 和 n_0 是正整数，使得

$$\lfloor f^{(i)}(n_0) \rfloor \equiv v_i \ (\bmod\ k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{f^{(i)}(n_0)\} \in \left(\frac{1}{A_i}, \frac{1}{B_i}\right), \quad m \leq i \leq k-1 \tag{23}$$

和

$$|f^{(k)}(x)| < \frac{1}{B_k} \quad \text{for } x \geq n_0. \tag{24}$$

假设

$$B_i < A_i \quad \text{for } m \leq i \leq k-1, \qquad B_i > B_{i-1}^6 \quad \text{for } m+1 \leq i \leq k, \tag{25}$$

$$A_m < \frac{B_m^2}{16k!\Pi_H} \quad \text{and} \quad B_k > (4k!\Pi_H A_{k-1})^{k+1}. \tag{26}$$

那么对于任意整数 $v_{m-1} \in \mathbb{Z}$ 和满足

$$20\frac{B_{m-1}}{A_{m-1}} < \frac{B_m}{A_m} \quad \text{and} \quad k!\Pi_H A_{m-1} < A_m, \tag{27}$$

的正整数 $B_{m-1} < A_{m-1}$，存在一个正整数 $n_1 \in [n_0, n_0 + 4k!\Pi_H A_m]$ 使得

$$\lfloor f^{(i)}(n_1) \rfloor \equiv v_i \ (\bmod\ k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{f^{(i)}(n_1)\} \in \left(\frac{1}{2A_i}, \frac{2}{B_i}\right)$$

对于 $m-1 \leq i \leq k-1$。

引理 6的证明. 设符号如引理 6所述。根据泰勒定理，对于任意非负整数 h，我们有

$$f^{(m-1)}(n_0+h) = \sum_{i=0}^{k-m} \frac{h^i}{i!} f^{(m+i-1)}(n_0) + \frac{h^{k-m+1}}{(k-m+1)!} f^{(k)}(n_0 + \theta_h h)$$

其中 $\theta_h \in [0,1]$ 为某个值。设

$$\begin{aligned} a_h &= f^{(m-1)}(n_0+h) - \sum_{i=1}^{k-m} \frac{h^i}{i!} \lfloor f^{(m+i-1)}(n_0) \rfloor \\ &= f^{(m-1)}(n_0) + \sum_{i=1}^{k-m} \frac{h^i}{i!} \{f^{(m+i-1)}(n_0)\} + \frac{h^{k-m+1}}{(k-m+1)!} f^{(k)}(n_0 + \theta_h h). \end{aligned} \tag{28}$$

注意

$$
\begin{aligned}
(29)\qquad a_{h+1}-a_h \;&=\; \sum_{i=1}^{k-m}\frac{(h+1)^i-h^i}{i!}\big\{f^{(m+i-1)}(n_0)\big\} \;+\; \frac{(h+1)^{k-m+1}}{(k-m+1)!}f^{(k)}(n_0+\theta_{(h+1)}(h+1)) \\
&\;-\; \frac{h^{k-m+1}}{(k-m+1)!}f^{(k)}(n_0+\theta_h h).
\end{aligned}
$$

从 (23)，(24) 和 (29)，我们得到

$$
(30)\qquad a_{h+1} \;-\; a_h \;<\; \sum_{i=1}^{k-m}\frac{(h+1)^i-h^i}{i!}\frac{1}{B_{m+i-1}} \;+\; 2\frac{(h+1)^{k-m+1}}{(k-m+1)!}\frac{1}{B_k}.
$$

从 (25)，我们有

$$
(31)\qquad B_{m+i-1} \;>\; B_m^{6^{i-1}} \;\geq\; B_m^{2(i-1)+1} \quad \text{and} \quad B_k \;>\; B_m^{6^{k-m}} \;\geq\; B_m^{2(k-m+1)+2}.
$$

设

$$
R \;=\; R(m) \;=\; 2k!\Pi_H A_m.
$$

从 (31)，对于任意的 $0 \leq h \leq 2R$，我们得到

$$
(32)\qquad a_{h+1} \;-\; a_h \;<\; \frac{2}{B_m}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2R}{B_m^2}\right)^{i-1} \;=\; \frac{2}{B_m}\cdot\frac{1}{1-\frac{2R}{B_m^2}} \;<\; \frac{3}{B_m},
$$

因为 $\frac{2R}{B_m^2} < \frac{1}{4}$ 由 R 的选择和 (26)。同样来自 (23) 和 (29)，我们有

$$
(33)\qquad a_{h+1} \;-\; a_h \;>\; \frac{1}{A_m} \;-\; 2\frac{(4R)^{k-m+1}}{(k-m+1)!}\frac{1}{B_k} \;>\; \frac{1}{3A_m},
$$

对于任何 $0 \leq h \leq 2R$。这是因为，从 (26)，我们得到

$$
\frac{(4R)^{k-m+1}}{(k-m+1)!}\frac{1}{B_k} \;<\; 2\frac{(4k!\Pi_H A_m)^k}{(4k!\Pi_H A_{k-1})^{k+1}} \;<\; \frac{1}{2k!\Pi_H A_{k-1}} < \frac{1}{3A_m}.
$$

进一步，从 (23) 和 (24)，我们有

$$
\begin{aligned}
a_R \;-\; a_0 \;&=\; \sum_{i=1}^{k-m}\frac{R^i}{i!}\big\{f^{(m+i-1)}(n_0)\big\} \;+\; \frac{R^{k-m+1}}{(k-m+1)!}f^{(k)}(n_0+\theta_R R) \\
&>\; \frac{R}{A_m}-\frac{R^{k-m+1}}{(k-m+1)!}\cdot\frac{1}{B_k} \;>\; 2k!\Pi_H-1,
\end{aligned}
$$

因为从 (26)，

$$
\frac{R^{k-m+1}}{(k-m+1)!}\cdot\frac{1}{B_k} \;<\; \frac{(2k!\Pi_H A_m)^k}{(4k!\Pi_H A_{k-1})^{k+1}} \;<\; 1.
$$

因此存在一个整数 $b \in (a_0, a_R)$ 使得

$$
b \;\equiv\; v_{m-1} \;(\bmod k!\Pi_H).
$$

设 $r \in (0, R]$ 是最小的整数，使得 $a_r \geq b$。然后从 (32) 和 (33)，我们得到

$$\lfloor a_r \rfloor \;=\; b \;\equiv\; v_{m-1} \;(\bmod\; k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{a_r\} \;<\; \frac{3}{B_m}. \tag{34}$$

集合

$$t \;=\; t(m) \;=\; \left(\left\lfloor \frac{4}{k!\Pi_H}\frac{A_m}{A_{m-1}} \right\rfloor + 1\right) k!\Pi_H \;-\; r_0,$$

其中 $r_0 \in [0, k!\Pi_H)$ 是一个整数，使得 $r \equiv r_0 \;(\bmod\; k!\Pi_H)$。很容易注意到 $0 < t \leq R$。然后从 (34) 和

$$a_{r+t} \;-\; a_r \;=\; \sum_{i=1}^{t}(a_{r+i} - a_{r+i-1}) \;<\; \frac{3t}{B_m} \;<\; \frac{15}{B_m}\frac{A_m}{A_{m-1}} \;<\; \frac{15}{20}\frac{1}{B_{m-1}},$$

我们推导出

$$\lfloor a_{r+t} \rfloor \;=\; \lfloor a_r \rfloor \;\equiv\; v_{m-1} \;(\bmod\; k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{a_{r+t}\} \;<\; \frac{1}{B_{m-1}}. \tag{35}$$

进一步，从 (33)，我们有

$$a_{r+t} \;-\; a_r \;>\; \frac{t}{3A_m} \;>\; \frac{1}{A_{m-1}}$$

从而得到

$$\{a_{r+t}\} \;>\; \frac{1}{A_{m-1}}. \tag{36}$$

设 $s = r + t$ 和 $n_1 = n_0 + s$。注意 $s \equiv 0 \;(\bmod\; k!\Pi_H)$ 和 $n_1 \in [n_0, n_0 + 2R]$。从 (28),(35) 和 (36)，我们推导出

$$\lfloor f^{(m-1)}(n_1) \rfloor \;\equiv\; v_{m-1} \;(\bmod\; k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{f^{(m-1)}(n_1)\} \;\in\; \left(\frac{1}{A_{m-1}}, \frac{1}{B_{m-1}}\right).$$

现在我们将证明

$$\lfloor f^{(i)}(n_1) \rfloor \;\equiv\; v_i \;(\bmod\; k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{f^{(i)}(n_1)\} \;\in\; \left(\frac{1}{2A_i}, \frac{2}{B_i}\right)$$

对于 $m \leq i \leq k-1$。令 $0 \leq j \leq k-m-1$。由泰勒定理，我们有

$$f^{(m+j)}(n_1) \;=\; f^{(m+j)}(n_0 + s) \;=\; \sum_{i=0}^{k-m-j-1} \frac{s^i}{i!} f^{(m+j+i)}(n_0) \;+\; \frac{s^{k-m-j}}{(k-m-j)!} f^{(k)}(n_0 + \theta s) \tag{37}$$

对于某个 $\theta \in [0, 1]$。注意从 (23) 和 (26)，我们得到

$$\sum_{i=0}^{k-m-j-1} \frac{s^i}{i!}\{f^{(m+j+i)}(n_0)\} \;+\; \frac{s^{k-m-j}}{(k-m-j)!} f^{(k)}(n_0 + \theta s) \;>\; \frac{1}{A_{m+j}} - \frac{(2R)^{k-m-j}}{(k-m-j)!}\frac{1}{B_k} \;>\; \frac{1}{2A_{m+j}}, \tag{38}$$

因为

$$\frac{(2R)^{k-m-j}}{(k-m-j)!}\frac{1}{B_k} \;<\; 2\frac{(2k!\Pi_H A_m)^k}{(4k!\Pi_H A_{k-1})^{k+1}} \;<\; \frac{1}{2A_{k-1}} \;<\; \frac{1}{2A_{m+j}}.$$

此外，我们有

$$\sum_{i=0}^{k-m-j-1}\frac{s^i}{i!}\{f^{(m+j+i)}(n_0)\}\ +\ \frac{s^{k-m-j}}{(k-m-j)!}f^{(k)}(n_0+\theta s)\ <\ \sum_{i=0}^{k-m-j-1}\frac{s^i}{i!}\frac{1}{B_{m+j+i}}\ +\ \frac{s^{k-m-j}}{(k-m-j)!}\frac{1}{B_k}$$

且从 (25)，我们得到

$$\sum_{i=0}^{k-m-j-1}\frac{s^i}{i!}\frac{1}{B_{m+j+i}}+\frac{s^{k-m-j}}{(k-m-j)!}\frac{1}{B_k}\ <\ \frac{1}{B_{m+j}}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{s}{B_{m+j}^2}\right)^i\ =\ \frac{1}{B_{m+j}}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{B_{m+j}^2}}\ <\ \frac{2}{B_{m+j}},$$

因为

$$\frac{s}{B_{m+j}^2}\ <\ \frac{2R}{B_m^2}\ <\ \frac{1}{2}.$$

这样我们就得到了

$$\sum_{i=0}^{k-m-j-1}\frac{s^i}{i!}\{f^{(m+j+i)}(n_0)\}\ +\ \frac{s^{k-m-j}}{(k-m-j)!}f^{(k)}(n_0+\theta s)\ <\ \frac{2}{B_{m+j}}. \tag{39}$$

从 (37),(38) 和 (39)，我们推断出

$$\lfloor f^{(m+j)}(n_1)\rfloor\ =\ \sum_{i=0}^{k-m-j-1}\frac{s^i}{i!}\lfloor f^{(m+j+i)}(n_0)\rfloor\ \equiv\ v_{m+j}\ (\bmod k!\Pi_H),$$

因为 $s\equiv 0\ (\bmod k!\Pi_H)$ 和

$$\{f^{(m+j)}(n_1)\}\ \in\ \left(\frac{1}{2A_{m+j}},\frac{2}{B_{m+j}}\right)$$

对于 $0\le j\le k-m-1$。这完成了引理 6的证明。 □

我们现在完成定理 3的证明。只需证明如果一个函数满足条件 (5) 和 (6)，那么它也满足条件 (13)-(16) 与 $\ell=k-1$。

我们考虑一个整数 $k\ge 2$ 和一个 k-连续可微的实值函数 f, 满足关系式 (5) 和 (6)。我们令 H 是一个大于或等于 k 的整数; 我们回忆 Π_H 表示直到 H 的素数的乘积, 并注意到不等式 $\Pi_H\ge H$ 对于 $H\ge 2$ 成立。

集合

$$D_0\ =\ 4\cdot 2^k,\qquad D_1\ =\ 2^{8k}k!\Pi_H,\qquad D_{i+1}\ =\ 2D_i^6\quad\text{for}\quad 1\le i\le k-2, \tag{40}$$

$$C_i\ =\ 2^{5(k-i)}D_i\quad\text{for}\quad 0\le i\le k-1\qquad\text{and}\qquad D_k\ =\ \left(4k!\Pi_H2^kC_{k-1}\right)^{6(k+1)}. \tag{41}$$

从 (5) 可知，存在一个整数 $x_0>1$ 使得

$$|f^{(k)}(x)|\ <\ \frac{1}{D_k}\quad\text{for}\quad x\ge x_0.$$

由 (6) 和 $f^{(k-1)}$ 的连续性，任何足够大的实数都是 $f^{(k-1)}$ 的值，因此可以找到一个正整数 s 和一个实数 $x_1 > x_0$ 使得

$$f^{(k-1)}(x_1) = (k!)^s \Pi_H + \frac{1}{2D_{k-1}}.$$

我们令 $n_{k-1} = \lfloor x_1 \rfloor + 1$。由平均值定理，我们有

$$\frac{1}{C_{k-1}} \leq \frac{1}{2D_{k-1}} - \frac{1}{D_k} < f^{(k-1)}(n_{k-1}) - (k!)^s \Pi_H < \frac{1}{2D_{k-1}} + \frac{1}{D_k} \leq \frac{1}{D_{k-1}}. \tag{42}$$

因此我们有

$$\lfloor f^{(k-1)}(n_{k-1}) \rfloor \;=\; (k!)^s \Pi_H \qquad \text{and} \qquad \{f^{(k-1)}(n_{k-1})\} \;\in\; \left(\frac{1}{C_{k-1}},\; \frac{1}{D_{k-1}} \right). \tag{43}$$

设

$$v_0 \;=\; 1 \qquad \text{and} \qquad v_i \;=\; 0 \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

我们归纳地证明对于每个整数 $1 \leq r \leq k$，存在一个整数 $n_{k-r} \in [n_{k-1}, n_{k-1} + 4k!\Pi_H 2^r C_{k-1}]$ 使得

(44)

$$\lfloor f^{(i)}(n_{k-r}) \rfloor \;\equiv\; v_i \;(\bmod\; k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{f^{(i)}(n_{k-r})\} \;\in\; \left(\frac{1}{2^{r-1}C_i}, \frac{2^{r-1}}{D_i} \right) \quad \text{for } k-r \leq i \leq k-1.$$

从 (43)，当 $r = 1$ 时命题 (44) 为真。现在假设命题 (44) 对于 $r = t \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ 是真的。作为引理 6的结果，我们将证明命题 (44) 对于 $r = t+1$ 是真的。设

$$A_i \;=\; 2^{t-1} C_i \qquad \text{for } k-t-1 \leq i \leq k-1 \quad \text{and} \quad B_i \;=\; \frac{D_i}{2^{t-1}} \quad \text{for } k-t-1 \leq i \leq k. \tag{45}$$

根据归纳假设，存在一个整数 $n_{k-t} \in [n_{k-1}, n_{k-1} + 4k!\Pi_H 2^t C_{k-1}]$ 使得

$$\lfloor f^{(i)}(n_{k-t}) \rfloor \;\equiv\; v_i \;(\bmod\; k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{f^{(i)}(n_{k-t})\} \;\in\; \left(\frac{1}{A_i},\; \frac{1}{B_i} \right) \quad \text{for } k-t \leq i \leq k-1. \tag{46}$$

很容易验证引理 6中的条件 (23)-(27) 用 $m = k-t$ 和 n_{k-t} 替换 n_0 后得到满足。因此，通过应用引理 6，我们推断存在一个整数 $n_{k-t-1} \in [n_{k-t}, n_{k-t} + 4k!\Pi_H A_{k-t}]$ 使得

$$\lfloor f^{(i)}(n_{k-t-1}) \rfloor \;\equiv\; v_i \;(\bmod\; k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{f^{(i)}(n_{k-t-1})\} \;\in\; \left(\frac{1}{2A_i},\; \frac{2}{B_i} \right) \quad \text{for } k-t-1 \leq i \leq k-1.$$

从而我们有

$$\{f^{(i)}(n_{k-t-1})\} \;\in\; \left(\frac{1}{2^t C_i},\; \frac{2^t}{D_i} \right) \quad \text{for } k-t-1 \leq i \leq k-1.$$

很容易看出 $n_{k-t-1} \in [n_{k-1}, n_{k-1} + 4k!\Pi_H 2^{t+1} C_{k-1}]$。因此命题 (44) 对于 $r = t+1$ 是成立的。因此，我们通过归纳得出陈述 (44) 对于每个 $1 \leq r \leq k$ 都是正确的。因此存在一个整数 $n_0 \in [n_{k-1}, n_{k-1} + 4k!\Pi_H 2^k C_{k-1}]$ 使得

$$\lfloor f^{(i)}(n_0) \rfloor \;\equiv\; v_i \;(\bmod\; k!\Pi_H) \quad \text{and} \quad \{f^{(i)}(n_0)\} \;\in\; \left(\frac{1}{2^{k-1}C_i}, \frac{2^{k-1}}{D_i} \right) \quad \text{for } 0 \leq i \leq k-1. \tag{47}$$

然后我们有

$$\{f(n_0)\} \in \left(\frac{1}{4^{4k}}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{and} \quad \{f^{(i)}(n_0)\} < \frac{1}{4H^i},\ 1 \le i \le k-1, \tag{48}$$

由于

$$D_i > D_1^{6^{i-1}} = \left(2^{8k}k!\Pi_H\right)^{6^{i-1}} > 4H^i \quad \text{for} \quad 1 \le i \le k-1.$$

同样我们有

$$|f^{(k)}(x)| < \frac{1}{D_k} < \frac{1}{4^{6k}H^k} \quad \text{for} \quad x \ge n_0. \tag{49}$$

根据中值定理，我们得到

$$|f^{(k-1)}(n_0) - f^{(k-1)}(n_{k-1})| < \frac{n_0 - n_{k-1}}{D_k} \le \frac{4k!\Pi_H 2^k C_{k-1}}{(4k!\Pi_H 2^k C_{k-1})^{6(k+1)}} < \frac{1}{C_{k-1}}. \tag{50}$$

从 (42),(50) 并注意到

$$\frac{1}{D_{k-1}} + \frac{1}{C_{k-1}} < \frac{2}{D_{k-1}} < 1,$$

我们可以推导出

$$\lfloor f^{(k-1)}(n_0) \rfloor = (k!)^s \Pi_H. \tag{51}$$

从 (47) 和 (51)，我们得到

$$\gcd\left(\lfloor f(n_0) \rfloor,\ \lfloor f^{(k-1)}(n_0) \rfloor\right) = 1. \tag{52}$$

因此根据 (47),(48),(49) 和 (52) 可知存在无穷多个正整数 n 满足 (13)-(16)。现在定理 3由命题 4 推出。 □

4. 定理 5的证明

令符号如前所述。设 $H_1 \ge k$ 是一个正整数。根据 3节，存在一个正整数 n_1 满足 (13)-(16) 且 $H = H_1$。因此根据命题 4，我们有

$$\gcd\left(\lfloor f(n_1+i_1) \rfloor, \lfloor f(n_1+i_2) \rfloor, \cdots, \lfloor f(n_1+i_k) \rfloor\right) = 1$$

对于任何整数 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le H_1$。令 H_2 为一个正整数，使得

$$H_2 > H_1 + \sum_{j=1}^{H_1} |f(n_1+j)|.$$

再次根据第 3节，存在一个正整数 $n_2 > n_1 + H_1$ 满足 (13)-(16) 且 $H = H_2$。从第 2节，我们有对于任意素数 $p \le H_2$ 和任意正整数 $h_2 \le H_2$ 的 $p \nmid \lfloor f(n_2+h_2)\rfloor$。因此对于任意正整数 $h_1 \le H_1$ 和 $h_2 \le H_2$ 的 $\gcd(\lfloor f(n_1+h_1)\rfloor, \lfloor f(n_2+h_2)\rfloor) = 1$。归纳地，我们可以证明对于满足

$$H_r \ > \ H_{r-1} + \sum_{j=1}^{H_{r-1}} |f(n_{r-1}+j)|,$$

的正整数 H_r，存在一个正整数 $n_r > n_{r-1} + H_{r-1}$ 满足 (13)-(16) 且 $H = H_r$。集合

$$\mathcal{A} \ = \ \{n_i + h_i \ : \ h_i \in [1, H_i] \cap \mathbb{N}, \ i \in \mathbb{N}\}.$$

容易看出集合 $\mathcal{A}$ 的上 Banach 密度等于 1 和

$$\gcd(\lfloor f(m_1)\rfloor, \lfloor f(m_2)\rfloor, \cdots, \lfloor f(m_k)\rfloor) \ = \ 1$$

对于任何不同的整数 $m_1, m_2, \cdots, m_k \in \mathcal{A}$。这完成了定理 5的证明。 □

5. 致谢

作者们想感谢 SPARC 项目 445。在准备这篇论文时，第一作者受益于联合 FWF-ANR 项目的资助：FWF: I 4945-N 和 ANR-20-CE91-0006。第二作者要感谢加拿大女王大学提供了一个极佳的工作氛围。第二作者还要感谢印度数学科学研究所（IMSc）和法国波尔多数学研究所（IMB），这项工作在那里开始。

References

[1] V. Bergelson and F. K. Richter, On the density of coprime tuples of the form $(n, \lfloor f_1(n)\rfloor, \ldots, \lfloor f_k(n)\rfloor)$, where $f_1, \ldots, f_k$ are functions from a Hardy field, Number theory – Diophantine problems, uniform distribution and applications, 109–135, Springer, Cham, 2017.

[2] F. Delmer and J.-M. Deshouillers, On the probability that n and $[n^c]$ are coprime Period. Math. Hungar. 45 (2002), no. 1–2, 15–20.

[3] J.-M. Deshouillers, M. Drmota, and C. Müllner, Coprimality of consecutive elements in a Piatetski-Shapiro sequence, Number theory in memory of Eduard Wirsing, 91–98, Springer, Cham, 2023.

[4] J.-M. Deshouillers and S. Naik, On coprimality of consecutive elements in certain sequences, submitted.

[5] G. Lejeune Dirichlet, Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie, Abhandlungen der Königlich Preussichen Akademie der Wissenschaften (1849), 69-83.

[6] P. Erdős and G. G. Lorentz, On the probability that n and $g(n)$ are relatively prime, Acta Arith. 5 (1958), 35–44.

[7] G. Grekos, V. Toma and J. Tomanová, A note on uniform or Banach density, Ann. Math. Blaise Pascal 17 (2010), no. 1, 153–163.

[8] J. Lambek amd L. Moser, On integers n relatively prime to $f(n)$, Canadian J. Math. 7 (1955), 155–158.

[9] F. Mertens, Ueber einige asymtotishe Gesetze der Zahlentheorie, J. reine ang. Math. 77 (1874), 289-338.

[10] P. Ribenboim, Density results on families of Diophantine equations with finitely many solutions, Enseign. Math. (2) 39 (1993), no. 1–2, 3–23.

[11] G. L. Watson, On integers n relatively prime to $[\alpha n]$, Canad. J. Math. 5 (1953), 451–455.

Jean-Marc Deshouillers
Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP 33400, Talence, France
Email address: jean-marc.deshouillers@math.u-bordeaux.fr

Sunil Naik
Department of Mathematics, Queen's University, Jeffrey Hall, 99 University Avenue, Kingston, ON K7L3N6, Canada
Email address: naik.s@queensu.ca