定常湍流的拓扑熵

Ankan Biswas, Amal Manoharan and Ashwin Joy*
Department of Physics, Indian Institute of Technology - Madras, Chennai - 600036, India.

(10Dated: 2025 年 6 月 28 日)

拓扑熵作为量化高度混沌系统混合和复杂性的可行候选者。特别是在湍流中，这被确定为流体材料线的指数拉伸率，通常需要拉格朗日描述。我们扩展了最近的工作 [A. Manoharan, S. Subramanian, and A. Joy, arXiv:2412.08996] 到三维，并提出了一个适用于定常湍流流动中拓扑熵的精确欧拉框架，该框架没有自由参数。唯一的要求是局部应变率张量的本征值及其去相关时间的分布。这可以从固定位置的单个探针线轻松获得，从而消除了对拉格朗日粒子追踪的需求，由于流动的混沌性质，这种需求仍然非常艰巨。我们相信我们的结果在旨在理解许多工业和自然流动中传输和混合的实验中具有很大的实用性。

Keywords: 湍流，混合，混沌，拓扑熵，欧拉量

I. 引言

湍流无处不在—，从小到一杯咖啡的小尺度，大至恒星、超新星和黑洞周围吸积盘的宇宙尺度 [1–4]。尽管它普遍存在，并且上个世纪进行了大量研究，湍流仍然是经典物理学中最具挑战性的问题之一，吸引了许多人的注意 [5–7]。在经典湍流中存在几个未解问题，从三维（3D）控制方程中的存在性和平滑性问题 [8]，通过科莫哥罗夫能量级串理论的偏差 [9]，到传输的异常缩放定律 [10]。现代湍流研究的主要挑战之一是量化材料流动线出现的复杂性。这很重要，因为它从根本上与许多工业和自然流体中的运输和耗散有关。在实践中，这是通过 Lyapunov 指数 [11–13]、分形维度和拓扑熵 [14–19] 实现的。其中，拓扑熵作为一个特别方便的度量而脱颖而出，因为它被定义为任意时间内材料线指数拉伸率。它提供了一个关于初始条件信息丢失速度的概念，并且提供了量化动力系统中可区分轨道指数发散程度的见解。与测量附近轨迹发散速率的 Lyapunov 指数不同，拓扑熵通过考虑大尺度结构对流场进行了全局特征化，使其成为分析海洋学和大气流动的大尺度混合动态的一种优选度量。然而，描述拓扑熵涉及拉格朗日追踪大量粒子，在湍流 [20–22] 流中这构成了一个严峻的挑战。最近，我们通过提出一个仅需二维（2D）平稳且遍历流任意位置处应变率张量特征值分布的确切欧拉框架来消除了这种拉格朗日追踪的需求 [23]。这对于处理高度混沌流动中的实验人员来说是一个显著的优势，在这些流动中，粒子轨迹交织并且通常解析度较低。在这篇论文中，我们将 [23] 的工作扩展到三维流中，从而将多种不同类型的流动纳入我们的欧拉框架的范畴内。这一扩展至关重要，因为现实世界中的湍流本质上是三维的，并且需要超越二维分析的限制才能获得正确的理解。我们相信我们的研究应该大大增强对许多自然 [24–28] 和工业流动 [29–31] 中粒子传输和混合的理解。接下来，我们将按章节为读者展示本论文的大纲。

在第二节中，我们提供了拓扑熵欧拉框架的理论。第三节描述了我们在模拟中使用数值方法并讨论了结果。最后，在第四节中，我们总结了我们的观察结果，并讨论了我们的发现的意义，并提出了未来研究的方向。

II. 理论

拓扑熵被确定为由被动地由湍流传输的示踪粒子组成的一条材料曲线的指数拉伸率，[16]—这一概念已被用于理解许多开放流动中的传输动力学 [23, 27, 32]。具体来说，拓扑熵 $\mathcal{S}$ 通过一条材料曲线的指数增长

$$l_{\mathcal{T}} \sim e^{\mathcal{S}\mathcal{T}} \tag{1}$$

来表征，在时间 $\mathcal{T} \gg 1/\mathcal{S}$ 处渐近地建立。这个想法从根本上植根于混沌系统中不稳定周期数量的指数增长，并直接决定了拓扑熵为

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\mathcal{T}} \ln\left(\frac{l_{\mathcal{T}}}{l_0}\right) \tag{2}$$

为了进一步进行，我们认识到材料线的时间演化（见图 1）表现为两个独立贡献的总和，即局部变形和刚体

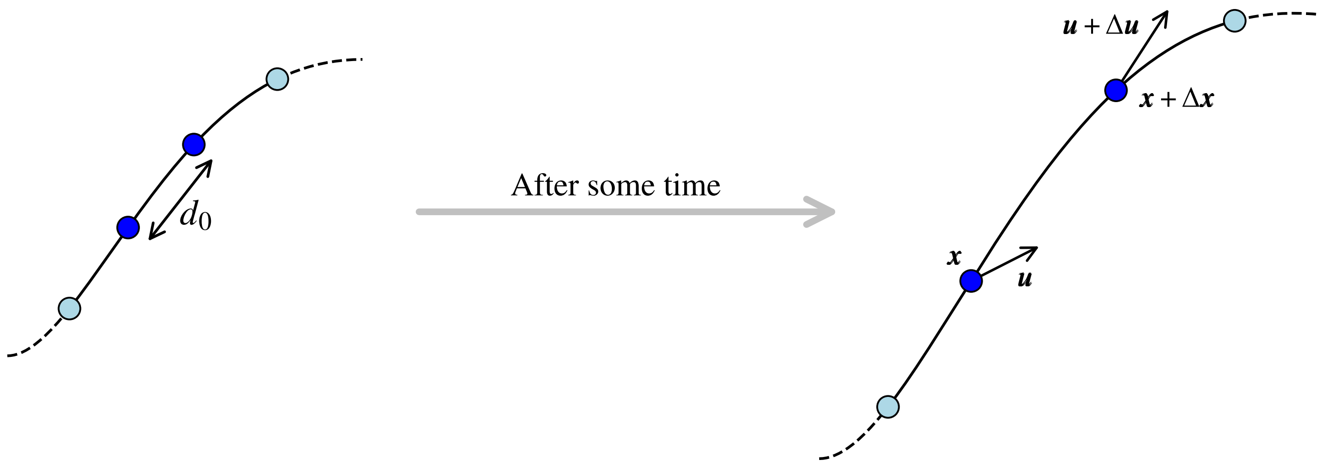


图 1. 由 n 对组成的材料线最初每对之间相距 d_0，在一段时间 $\mathcal{T}$ 内发生变形。

旋转。这通过速度梯度张量表示为

$$\nabla \boldsymbol{u} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\Gamma_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\Omega_{ij}}$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是应变率张量，捕捉到速度梯度的对称部分，而 $\boldsymbol{\Omega}$ 是旋转张量，捕捉到非对称部分。这种分解反映了任何方阵的一般性质，它可以表示为一个对称分量和一个反对称分量之和。这使我们能够时间演化任意两个邻近示踪剂之间的分离向量 $\Delta \boldsymbol{x}$（见图 1）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta \boldsymbol{x} = \Delta \boldsymbol{u} \tag{3}$$

其中 $\Delta \boldsymbol{u}$ 是两个示踪剂之间的速度差向量，定义为

$$\Delta \boldsymbol{u} = \nabla \boldsymbol{u} \cdot \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \Delta \boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}$ 被视为局部流体涡度。由于刚体旋转不会改变向量的长度，时间演化

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\Delta \boldsymbol{x}|^2 = 2 \Delta \boldsymbol{x} \cdot \Delta \boldsymbol{u} = 2 \Delta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \Delta \boldsymbol{x}$$

允许我们将方程 (3) 重写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \Delta \boldsymbol{x} \tag{4}$$

在张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的本征基中。因此，在这个基底下经过区间 τ 后的解为

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_0 \; e^{\lambda \tau} \\ \Delta y &= \Delta y_0 \; e^{\zeta \tau} \\ \Delta x &= \Delta x_0 \; e^{-(\lambda+\zeta)\tau} \end{aligned} \tag{5}$$

其中 λ 和 ζ 是张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的前两个本征值，该张量具有 $\lambda > \zeta$。注意由于流体不可压缩，因此 $\mathrm{Tr}\ \boldsymbol{\Gamma} = 0$。读者应注意，与我们之前关于二维流的工作 [23] 相比，我们现在需要一个额外的特征值来追踪分离矢量随时间的变化。为了进一步进行，我们取初始分离矢量为

$$\begin{aligned} \Delta z_0 &= d_0 \cos\theta \\ \Delta y_0 &= d_0 \sin\theta \sin\phi \\ \Delta x_0 &= d_0 \sin\theta \cos\phi \end{aligned} \tag{6}$$

其中 θ 和 ϕ 分别是球面坐标系中的极角和方位角。此外，我们需要分离矢量的时间演化长度以其初始值为单位

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{d_0} = [e^{-2(\lambda+\zeta)\tau} \sin^2\theta \cos^2\phi + e^{2\zeta\tau} \sin^2\theta \sin^2\phi + e^{2\lambda\tau} \cos^2\theta]^{1/2} \equiv f(\lambda, \zeta, \theta, \phi) \tag{7}$$

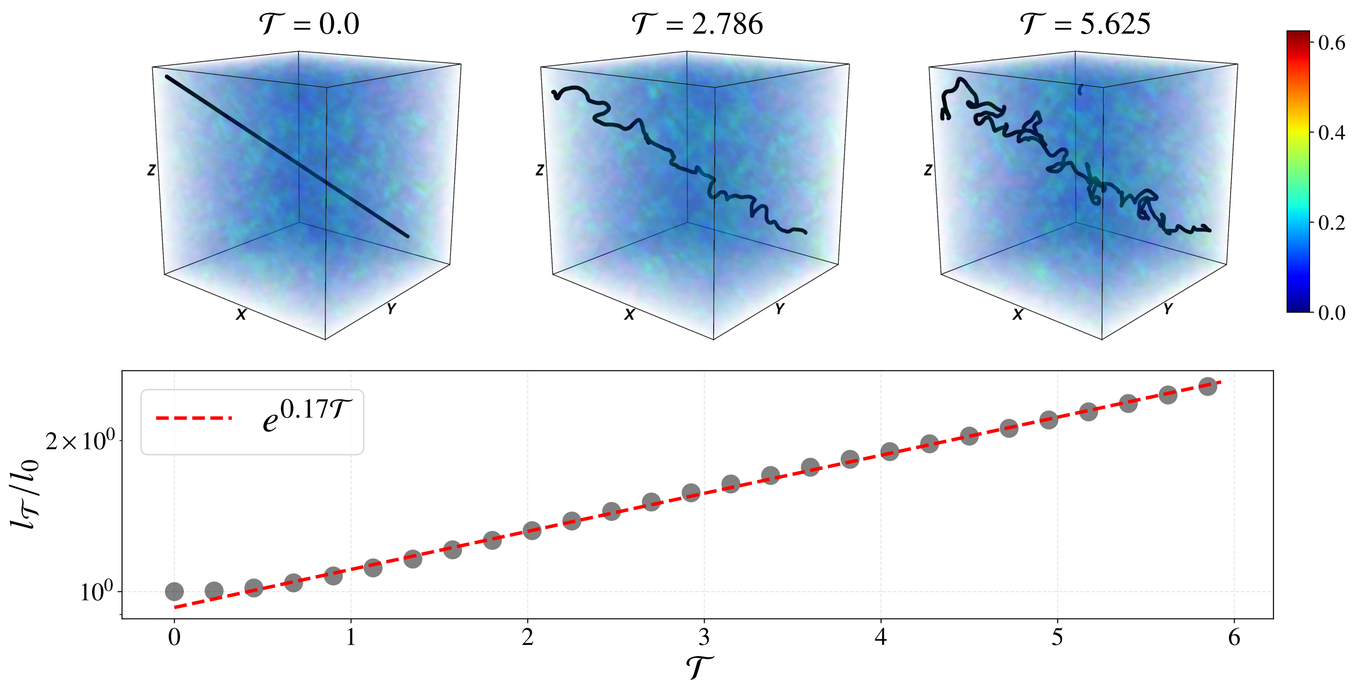


图 2. 顶部：典型数值模拟中材料曲线随时间的演化，该模拟在一个尺寸为 $(2\pi)^3$ 的周期性盒子中进行，其中使用了 $R_e = 10^3$。此处，颜色条标记了局部速度的大小，$|\mathbf{u}|$。底部：对于一个代表性的雷诺数值 1000，这条曲线的指数拉伸率与其初始形状无关，提供了一种拉格朗日拓扑熵度量。

这定义了在时间区间 τ 上的缩放函数。

我们现在可以继续这个想法，并追踪由 n 个示踪对组成的材料线的长度，每个初始间隔距离为 d_0，在任意时间区间 $\mathcal{T} = m\tau$ $(m \gg 1)$ 内如图 1 所示。数学上，这可以写作

$$l_{\mathcal{T}} = d_0 \sum_{i=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{m} f_{i\nu} \tag{8}$$

其中指标 i 和 ν 分别遍历构成材料曲线的对和时间间隔。方程 8 告诉我们，材料曲线的长度在所有时刻仅取决于应变率张量的最大两个本征值的分布以及构成对沿材料曲线的方向。将方程 8 中的 $l_{\mathcal{T}}$ 代入方程 2，并意识到 $l_0 = nd_0$，我们得到拓扑熵为

$$\mathcal{S} = \frac{1}{m\tau} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{m} f_{i\nu} \right] = \frac{1}{m\tau} \ln \left\langle \prod_{\nu=1}^{m} f_{\nu} \right\rangle_{\text{pairs}} \tag{9}$$

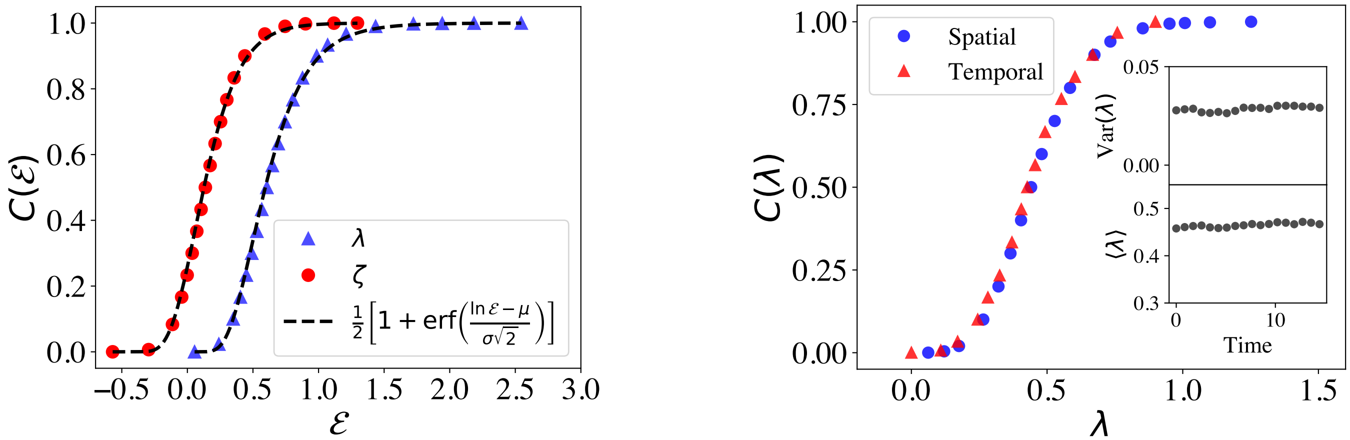
其中，$\langle \cdots \rangle_{\text{pairs}}$ 表示构成物质曲线的 n 对的拉格朗日平均。正如最初在参考文献中所述。[23]，时间累积拉伸函数 $\prod_{\nu=1}^{m} f_{\nu}$ 是一个对数正态随机变量，由于每个因子 f_{ν} 的正值和中心极限定理。统计特性要求均值 $\langle \prod_{\nu=1}^{m} f_{\nu} \rangle = e^{\mu + \sigma^2/2}$ 其中 μ 和 σ^2 分别是高斯分布的 $\ln \prod_{\nu=1}^{m} f_{\nu}$ 的均值和方差。这使我们能够将平均值移出方程 9 中的对数，写为

$$\mathcal{S} = \frac{1}{m\tau} \left[\left\langle \ln \prod_{\nu=1}^{m} f_{\nu} \right\rangle_{\text{pairs}} + \frac{\sigma^2}{2} \right] \tag{10}$$

我们可以进一步将乘积的对数分布为时间平均，并写为

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\tau} \left[\langle \ln f \rangle_{\text{pairs, time}} + \frac{\sigma^2}{2m} \right] \tag{11}$$

方程 10 是一个拉格朗日处方，它需要在示踪剂配对和时间上进行双重平均，在湍流流动中当配对数量非常大时实验上具有挑战性。如果我们认为 τ 是最大特征值 λ 的去相关时间，则有可能取得重大突破。这说得通，因为它负责分离向量的最大拉伸。在实践中，这可以通过保证 λ 是一个随时间呈指数级不相关的随机变量来实现（参见图 5）。因此，物质曲线预计将在一个任意等待时间 $\mathcal{T} \gg \tau$ 内独立地采样一组特征值和角度的分布，这实际上允许我们将拉格朗日平均替换为欧



(a) (b)

图 3. (a) 局部应变率张量的前两个特征值 ($\mathcal{E}$) 的累积分布函数对于一个典型的 Re 显示了预期的对数正态分布拟合，其平均值分别为 μ 和标准偏差为 σ。(b) 我们比较了两种不同方法在典型 Re—下获得的最大特征值 λ 的分布——一种是从单个时间点采样空间位置得出的，另一种则是从单一空间点进行时间采样得到的。在后者中，我们确保了所有的时间样本都是不相关的。这些分布之间的相似性为流动的遍历性质提供了强有力的证据。该分布确实是平稳的，这一点从其均值和方差的不变性可以看出，如插图所示。

拉平均

$$\mathcal{S}=\frac{1}{\tau}\left[\langle\ln f\rangle+\frac{\sigma^2}{2m}\right] \tag{12}$$

其中 $\langle\cdots\rangle$ 意味着可以分别进行对 θ,ϕ,λ 和 ζ 的平均。两个额外的随机变量 ζ 和 ϕ 使得进一步的工作比二维中的早期工作更为繁琐，即 [23]。为了评估 σ^2，我们首先认识到出现在对数正态产品 $\prod_{\nu=1}^{m} f_\nu$ 中的因素 f_ν 是由于流动的同质性和平稳性而独立且相同分布的随机变量。由对数正态变量的一个标准性质，我们有

$$\ln\left(\prod_{\nu=1}^{m} f_\nu\right)=\sum_{\nu=1}^{m}\ln f_\nu=\mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \tag{13}$$

这是一个均值为 $\mu = m\langle\ln f\rangle$ 且方差为 $\sigma^2 = m\,\mathrm{Var}(\ln f)$ 的正态分布。然后产品的方差自然就是

$$\mathrm{Var}\left(\prod_{\nu=1}^{m} f_\nu\right)=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)=\langle f^2\rangle^m-\langle f\rangle^{2m} \tag{14}$$

显然对于任意大的等待时间（$m\gg 1$），我们可以取方差 $\sigma^2\gg 1$ 并近似 $e^{\sigma^2}-1\approx e^{\sigma^2}$。然后，方程 14 在取对数后给出

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{m}&\approx\frac{1}{2m}\ln\left(\langle f^2\rangle^m-\langle f\rangle^{2m}\right)-\frac{\mu}{m}\\&\approx\frac{1}{2}\ln\langle f^2\rangle+\frac{1}{2m}\ln\left[1-\left(\frac{\langle f\rangle^2}{\langle f^2\rangle}\right)^m\right]-\langle\ln f\rangle\\&\approx\frac{1}{2}\ln\langle f^2\rangle-\langle\ln f\rangle\end{aligned} \tag{15}$$

其中我们在极限 $m\gg 1$ 下省略了右侧的第二个对数作为 $\langle f\rangle^2/\langle f^2\rangle<1$。将此代入方程 12，我们得到

$$\mathcal{S}=\frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{2}\langle\ln f\rangle+\frac{1}{4}\ln\langle f^2\rangle\right] \tag{16}$$

角度的部分平均值可以使用在方程 7 中定义的尺度函数计算得出（见附录 A 及 B）

$$\langle\ln f\rangle_{\theta,\phi}=\lambda\tau+\frac{2}{\pi}e^{-(2\lambda+\zeta)\tau}E\left(1-e^{2(2\zeta+\lambda)\tau}\right)-\frac{1}{4}\left(e^{-2(2\lambda+\zeta)\tau}+e^{2(\zeta-\lambda)\tau}\right)-\ln 2=G(\lambda,\zeta;\tau) \tag{17}$$

$$\langle f^2\rangle_{\theta,\phi}=\frac{1}{4}\left(e^{-2(\lambda+\zeta)\tau}+e^{2\zeta\tau}+2e^{2\lambda\tau}\right)=H(\lambda,\zeta;\tau) \tag{18}$$

其中 $E(\cdots)$ 是第二类椭圆积分。注意函数 G 和 H 只依赖于局部特征值 λ 和 ζ。方程 16 可以最终写为

$$\mathcal{S}=\frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{2}\langle G(\lambda,\zeta;\tau)\rangle+\frac{1}{4}\ln\langle H(\lambda,\zeta;\tau)\rangle\right] \tag{19}$$

这里 $\langle\cdots\rangle$ 表示对两个本征值 λ 和 ζ 求平均。因此，我们只需要独立特征值 λ 和 ζ 的分布，这些分布可以通过对局部应变率张量 $\mathbf{\Gamma}$ 进行对角化而轻易获得。这种方法消除了跟踪随流体移动的粒子的需要，并且仅依赖于 $\mathbf{\Gamma}$ 的特征值分布，从而大大简化了问题。此外，如果我们考虑流动在本质上也是遍历和稳定的（见图 3(b)），可以使用单一热线风速计 [33] 来局部提取 λ 和 ζ 的分布。函数 $G(\lambda,\zeta;\tau)$ 和 $H(\lambda,\zeta;\tau)$ 的平均值因此很容易由这些分布生成。在实际操作中，我们注意到样本大小为 $\mathcal{O}(10^3)$ 足以将 $\mathcal{S}$ 的相对误差控制在 1%以下（参见图 4）。这极大地改善了实验湍流研究的前景，在该研究中涡度探针被常规使用 [34, 35]。相同的探针可以

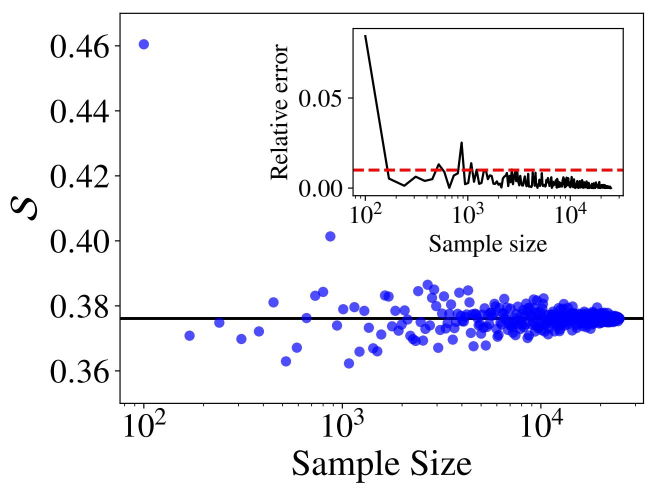


图 4. 图说明了实验设置中所需的 λ 和 ζ 数据点数量，以确保计算值 $\mathcal{S}$ 的误差保持在指定阈值以下。例如，插图中的红线（代表阈值）对应于当样本量达到约 $\mathcal{O}(10^3)$ 时的 1% 误差，这是 Re 的一个代表性值。此处黑色实线表示与最大样本点数量相对应的真实值 $\mathcal{S}$。

产生一组时间序列数据，可用于构建自相关性，其指数衰减提供了去相关时间 τ 的度量，参见图 5。

$$\mathcal{R}(t';\lambda)=\frac{\overline{\lambda'(t)\lambda'(t+t')}}{\overline{\lambda'(t)^2}} \tag{20}$$

其中，$\lambda'(t)=\lambda(t)-\overline{\lambda(t)}$，$\overline{(\cdots)}$ 表示集合平均，$t'(\ll\tau)$ 是时间滞后。剩下的唯一事情就是将这个理论与拉格朗日测量进行对比测试。为了做到这一点，我们对三维不可压缩的纳维-斯托克斯方程进行了直接数值模拟。

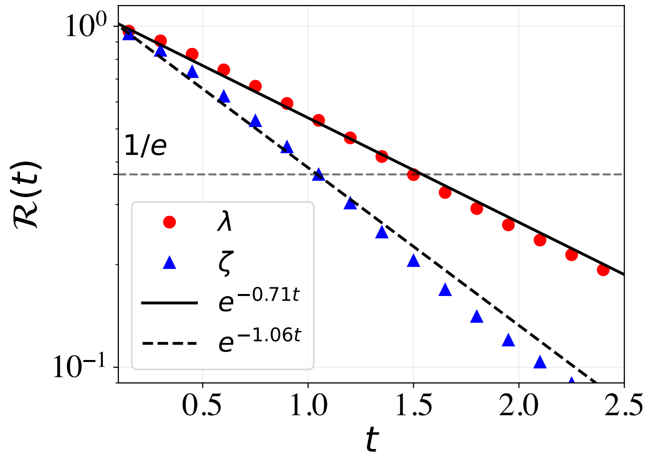


图 5. 自相关函数（ACFs）如方程 20 中所定义的，对于一个代表性的雷诺数，表现出指数衰减。灰色虚线标记了作为去相关时间的 e 折叠时间。我们使用 λ 的去相关性来定义 τ，因为它在这三个中是最慢的。

III. 模型与仿真

我们使用不可压缩的 Navier-Stokes 方程来模拟三维流体流动。在无量纲形式和旋转表述中，这表示为 [36]，

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\nabla}P+\frac{1}{\mathrm{Re}}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}\quad \text{and,}\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是速度，$\boldsymbol{\omega}$ 是局部涡度，P 是修改后的压力，$\boldsymbol{F}$ 是随机强迫方案，Re 是雷诺数。为了避免计算高阶导数，方程 21 在谱空间中进行了时间推进。因此，通过对方程 21 执行离散傅里叶变换（DFT）并施加不可压缩条件以消除压力 P，谱空间中的模型方程简化为

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial t}=(\widehat{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}})-\frac{1}{\mathrm{Re}}|\boldsymbol{k}|^2\hat{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{k}\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\widehat{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}})}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)+\hat{\boldsymbol{F}} \tag{22}$$

这里 $\widehat{(\cdots)}$ 表示在 $\boldsymbol{k}$ 空间中的一个量，其中 $\boldsymbol{k}\equiv(k_x,k_y,k_z)$ 是三维波矢。非线性对流项 $(\widehat{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}})$ 需要实现伪谱方法，其中速度 $\boldsymbol{u}$ 和局部涡度 $\boldsymbol{\omega}$ 首先被转换到物理空间以执行叉积运算，然后再返回到频谱空间进行时间积分。此外，该术语使用了 2/3 消除混叠方法 [37]，其中波数大于 $2/3^{\mathrm{rd}}$ 的部分被截断。一个无散度和各向同性的随机强迫项 $\hat{\boldsymbol{F}}_k$ 被用来平衡由于流体粘性在 Kolmogorov 长度尺度上的能量耗散，以达到

稳定状态 [38]。实际上，随机强迫是在一个相对较大的长度尺度中心的一窄波数带中实现的。在我们的工作中，我们在 $|\boldsymbol{k}| \in [3,7]$ 激活了这种强迫。

并行代码使用消息传递接口（MPI）用 C 语言编写，并使用 FFTW 库执行了 [36] 傅里叶变换。时间积分方程 22 采用了 2^{nd} 阶的克兰克-尼科尔森方案。时间步长 Δt 被选择为 0.005，以与整个我们工作中报道的雷诺数范围内的库朗-弗里德里希斯-莱维（CFL）准则达成良好一致。数值模拟在一个三重周期立方网格上进行，该网格有 512^3 个格点，边长为 2π。达到稳态后，在流场中启动了一条由大约 10^5 个示踪粒子组成的材料线，然后使用以下方程进行平移

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_i(t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_i(t)) \tag{23}$$

这里 $\boldsymbol{r}_i(t)$ 表示第 i^{th} 个被动示踪剂的位置向量，而 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_i(t))$ 则表示其局部速度，该速度是使用线性插值算法从流场中得出的。通过计算连续示踪粒子对之间的距离之和来估计材料曲线的长度，并利用其指数增长率来计算拉格朗日拓扑熵，如方程 2 所述。随后，通过局部应变率张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的对角化得到了特征值 λ 和 ζ。然后通过方程 19 可以计算拓扑熵。在图 6 中，我们将拉

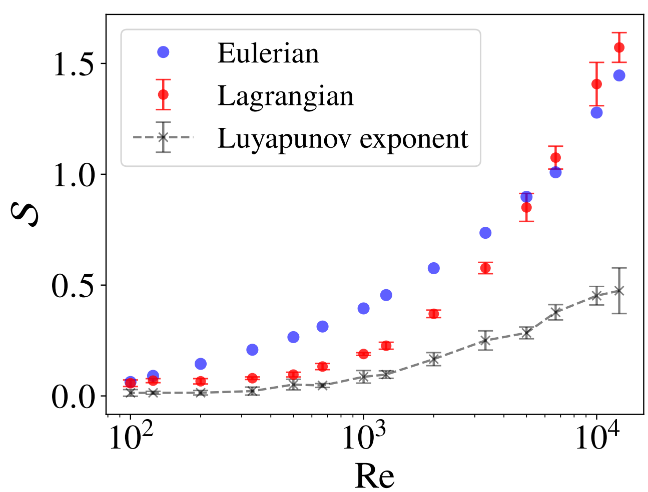


图 6. 欧拉和拉格朗日版本的拓扑熵分别从方程 19 和 2 进行比较，显示了在雷诺数两个数量级内的良好一致性。前者是通过 λ 和 ζ 的本征值分布计算得出的，而后者则是从图 2 的斜率得到的。此处，误差棒表示单个标准偏差。

格朗日和欧拉估计的拓扑熵进行了对比，并发现在两个数量级的 Re 下有很好的一致性。结合方程 19 不包含任何自由参数这一事实，进一步坚定了我们对这里给出的计算结果的信任。对于实验人员来说，这是一个巨大的前景，因为熵计算的输入被最小化为仅需局部速度梯度张量——一个可以通过传统方法轻松获得的数量。请注意，图 6 清楚地表明 $\mathcal{S}$ 随 Re 的增加呈非线性增长。这种行为是可以预期的，因为更高的 Re 会增强湍流，从而提高被动示踪剂的混合程度。直观上来说，由于旋度密度 $|\boldsymbol{\omega}|^2$ 与 Re 之间的正相关关系，可能会加剧局部速度梯度，这有助于被动示踪剂的混合。在下面的部分中，我们将通过强调本工作的实验用途及其自然扩展来结束论文。

IV. 结论

在这项工作中，我们提供了一种理论来计算三维设置下欧拉框架中的拓扑熵。我们的计算不依赖于自由参数，并且与两个雷诺数数量级的惯性湍流数值模拟结果吻合良好。我们消除了追踪由混沌流携带的示踪剂的需求，并提供了易于在实验中应用的简单欧拉公式。我们的工作对实验湍流具有相当大的实用性，因为拓扑熵通过量化材料线的指数增长来提供了一种有效的混合和流动复杂性度量。与需要轨迹保持比流动的线性尺度—更近的条件下的 Lyapunov 指数不同，这是一个全局测量，在湍流中维持该条件是不切实际的。在工业流程范围内，我们的结果可能适用于制药生产 [39, 40]、燃烧室内的燃料混合 [41] 以及核反应堆中的冷却剂混合 [42] 等本质上三维的过程。扩展到地物系统中时，当垂直剪切力高且不涉及显著的汇聚和局部次中尺度过程的情况下，我们的结果可能适用于海洋流和大气流。在这种情况下，我们的 3D 计算可用于准确确定拓扑熵。这特别适用于通常具有长度尺度 $\mathcal{O}(10-100\text{ km})$ 及时标 $\mathcal{O}(\text{weeks})$ 的介观湍流，在这些时标上同质性和遍历性的假设一般成立。应变率张量将主导流动的动力学，我们的理论应该可靠地捕捉材料线的拉伸 [43, 44]。然而，必须谨慎行事以避免诸如地形变化、群岛、内波和海洋流中的强梯度前沿等因素，这些因素可能会使这些假设失效 [43, 45, 46]。我们相信这里报告的结果将显著增加对 3D 湍流流动中被动示踪剂传输和混合的当前理解。

致谢

感谢印度理工学院马德拉斯分校海洋工程系的 Arjun Jagannathan 提供的评论和讨论。

附录 A: 计算 θ-平均值

直观上，我们期望 θ 在范围内 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 为均匀随机变量，这也有我们的数值数据支持。这，以及公式 7 中缩放函数的定义，允许我们写出 θ 的平均值 $\ln f$ 为：

$$\langle \ln f \rangle_\theta = \langle \ln \cos\theta \rangle_\theta + \frac{1}{2}\left\langle \ln\left(1+\left[e^{-2(2\lambda+\zeta)\tau}\cos^2\phi + e^{2(\zeta-\lambda)\tau}\sin^2\phi\right]\tan^2\theta\right)\right\rangle_\theta + \lambda\tau \tag{A1}$$

很容易证明

$$\langle \ln\cos\theta\rangle_\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\cos\theta \,\mathrm{d}\theta = -\ln 2 \tag{A2}$$

因此，公式 A1 中的第二项是积分

$$\langle \ln\left(1+C\tan^2\theta\right)\rangle_\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\left(1+C\tan^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{A3}$$

其中 $C = \alpha\cos^2\phi + \beta\sin^2\phi$ 具有 $\alpha = e^{-2(2\lambda+\zeta)\tau}$ 和 $\beta = e^{2(\zeta-\lambda)\tau}$。通过代换 $\tan\theta = x$，上述积分变为

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\ln\left(1+Cx^2\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x \tag{A4}$$

这是一个可以通过围道积分技术求解的 Serret 积分

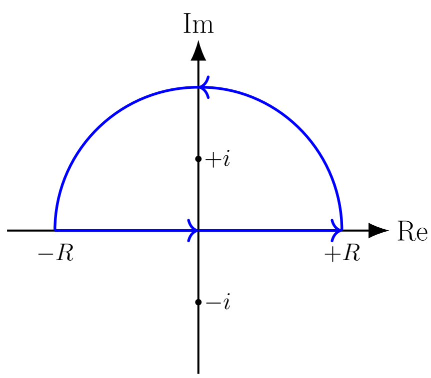


图 7. 半径为 R 的蓝色半圆表示一个包含极点 $+i$ 的闭合轮廓，沿着该轮廓计算了积分 J。

[47]。为此，我们考虑复平面上如图 7 所示的轮廓，并引用柯西残数定理来计算复积分

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi}\oint_C \frac{\ln\left(i+z\sqrt{C}\right)}{1+z^2}\mathrm{d}z \\ &= 4i\,\mathrm{Res}\left[\frac{\ln\left(i+z\sqrt{C}\right)}{1+z^2}, z=i\right] \\ &= i\pi + 2\ln\left(1+\sqrt{C}\right) \end{aligned} \tag{A5}$$

沿着图 7 中的轮廓，积分

$$\begin{aligned} J = &\frac{2}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\ln\left(i+x\sqrt{C}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &+ \frac{2}{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\ln\left(i+Re^{i\theta}\sqrt{C}\right)}{1+R^2e^{2i\theta}} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{A6}$$

当半径为 $R\to\infty$ 时，我们有极限

$$\left|\frac{\ln\left(i+Re^{i\theta}\sqrt{C}\right)Rie^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}\right| \longrightarrow 0$$

使得公式 A6 中的第二项消失，只剩下

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left(i+x\sqrt{C}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{\ln\left(i+x\sqrt{C}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\frac{\ln\left(i+x\sqrt{C}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\ln(-1)+\ln(1+x^2C)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\ln e^{i\pi}}{1+x^2}\mathrm{d}x+I \\
&= 2i\tan^{-1}x\Big|_0^{\infty}+I=i\pi+I
\end{aligned} \tag{A7}
$$

比较方程将 A5 和 A7 代入，我们得到

$$
I=\langle\ln\left(1+C\tan^2\theta\right)\rangle_\theta=2\ln\left(1+\sqrt{C}\right) \tag{A8}
$$

将其代入方程 A1，我们得到所需的平均值

$$
\langle\ln f\rangle_\theta=-\ln 2+\ln\left(1+\sqrt{C}\right)+\lambda\tau \tag{A9}
$$

附录 B: 计算 ϕ 平均值

再次通过直觉并得到我们数值数据的支持，我们将 ϕ 在范围 $0\le\phi\le\pi/2$ 内视为均匀分布，并计算 ϕ 平均值

$$
\begin{aligned}
\left\langle\ln\left(1+\sqrt{C}\right)\right\rangle_\phi &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\left(1+\sqrt{C}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\left(1+\sqrt{\alpha\cos^2\phi+\beta\sin^2\phi}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\left(1+\left(\alpha\cos^2\phi+\beta\sin^2\phi\right)^{1/2}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+z^2}\ln\left(1+\left(\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2}\right)^{1/2}\right)\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{B1}
$$

其中在最后一个等式中我们用 $\tan\phi=z$ 进行了替换。这个积分在其当前形式下无法进行解析求解。为了解决这个问题，我们在下面引入了一种使积分可解析求解的技术。以 λ 和 ζ 为前两个特征值且 Tr$\mathbf{\Gamma}=0$，我们有 $\alpha<1$ 和 $\beta<1$。这使我们能够近似 $\ln(1+x)\approx x-x^2/2+\mathcal{O}(x^3)$，最终得到方程 B1

$$
\left\langle\ln\left(1+\sqrt{C}\right)\right\rangle_\phi=\frac{2}{\pi}\Bigg[\underbrace{\int_0^{\infty}\left(\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z}_{I_1}-\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\alpha+\beta z^2}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z}_{I_2}+\cdots\Bigg]\approx\frac{2}{\pi}I_1-\frac{I_2}{\pi} \tag{B2}
$$

将 $z=\tan\phi$ 代回，第一个积分变为

$$
I_1=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\alpha\sin^2\phi+\beta\cos^2\phi}\,\mathrm{d}\phi=\sqrt{\alpha}E\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{B3}
$$

其中 $E(\cdots)$ 表示一种缺乏闭合函数形式 [48] 的第二类完全椭圆积分 $^{\mathrm{nd}}$。存在椭圆积分的替代方法，例如椭圆周长的四分之一，其偏心率为 $\sqrt{1-\alpha/\beta}$。其中两种如下所示 [49]

$$
I_1\approx\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\\[2ex]\dfrac{\pi}{4}\left(3(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})-\sqrt{3(\alpha+\beta)+10\sqrt{\alpha\beta}}\right)\end{cases} \tag{B4}
$$

这里第一个将椭圆近似为半径为 $\sqrt{(\alpha+\beta)/2}$ 的圆形，随着偏心率的增加，这种近似的准确性逐渐降低。第二个是 Ramanujan 对椭圆周长的近似，比第一种更准确。在我们的工作中，我们使用了方程 B3 中的椭圆积分来计算拓扑熵，该熵绘制在图 6 中。最后，方程 B2 中的第二个积分 I_2 是直接明了的

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\infty}\frac{\alpha+\beta z^2}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{\pi\beta}{2}+(\alpha-\beta)\int_0^{\pi/2}\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\pi}{4}(\alpha+\beta)
\end{aligned} \tag{B5}
$$

结合方程组 B2，B3 和 B5，方程 B1 的右边变为

$$\left\langle \ln\left(1+\sqrt{C}\right)\right\rangle_{\phi} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\pi} E\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{1}{4}(\alpha+\beta) \tag{B6}$$

使用方程组 B6 和 A9 以及 α 和 β 的值一起，所需的双角平均值变为

$$\langle \ln f \rangle_{\theta,\phi} = \lambda\tau + \frac{2}{\pi} e^{-(2\lambda+\zeta)\tau} E\left(1-e^{2(2\zeta+\lambda)\tau}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{-2(2\lambda+\zeta)\tau} + e^{2(\zeta-\lambda)\tau}\right) - \ln 2 \tag{B7}$$

* ashwin@physics.iitm.ac.in

[1] Y. Zhou, Turbulence theories and statistical closure approaches, Physics Reports **935**, 1 (2021).

[2] H. H. Wensink, J. Dunkel, S. Heidenreich, K. Drescher, R. E. Goldstein, H. Löwen, and J. M. Yeomans, Meso-scale turbulence in living fluids, Proceedings of the National Academy of Sciences **109**, 14308 (2012).

[3] V. Canuto, Turbulence in astrophysical and geophysical flows, Interdisciplinary aspects of turbulence , 107 (2009).

[4] V. Canuto and J. Christensen-Dalsgaard, Turbulence in astrophysics: Stars, Annual review of fluid mechanics **30**, 167 (1998).

[5] O. Reynolds, Xxix. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, Philosophical Transactions of the Royal society of London , 935 (1883).

[6] A. Kolmogorov, Local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid at very high reynolds numbers, Soviet Physics Uspekhi **10**, 734 (1968).

[7] A. N. Kolmogorov, Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence, Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences **434**, 15 (1991).

[8] C. L. Fefferman, Existence and smoothness of the navier-stokes equation, The millennium prize problems **57**, 22 (2006).

[9] A. Alexakis and L. Biferale, Cascades and transitions in turbulent flows, Physics Reports **767**, 1 (2018).

[10] G. Falkovich, K. Gawedzki, and M. Vergassola, Particles and fields in fluid turbulence, Reviews of modern Physics **73**, 913 (2001).

[11] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, Determining lyapunov exponents from a time series, Physica D: nonlinear phenomena **16**, 285 (1985).

[12] V. I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem, lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, Transactions of the Moscow Mathematical Society **19**, 197 (1968).

[13] A. Wolf *et al.*, Quantifying chaos with lyapunov exponents, Chaos **16**, 285 (1986).

[14] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew, Topological entropy, Transactions of the American Mathematical Society **114**, 309 (1965).

[15] E. Ott, Chaos in dynamical systems, Chaos in Dynamical Systems-2nd Edition , 490 (2002).

[16] S. Newhouse and T. Pignataro, On the estimation of topological entropy, Journal of statistical physics **72**, 1331 (1993).

[17] L. W. Goodwyn, Topological entropy bounds measure-theoretic entropy, Proceedings of the American Mathematical Society **23**, 679 (1969).

[18] R. Bowen, Topological entropy for noncompact sets, Transactions of the American Mathematical Society **184**, 125 (1973).

[19] R. Bowen, Topological entropy and axiom a, in *Proc. Sympos. Pure Math*, Vol. 14 (1970) pp. 23–41.

[20] J. Westerweel, G. E. Elsinga, and R. J. Adrian, Particle image velocimetry for complex and turbulent flows, Annual Review of Fluid Mechanics **45**, 409 (2013).

[21] F. Toschi and E. Bodenschatz, Lagrangian properties of particles in turbulence, Annual review of fluid mechanics **41**, 375 (2009).

[22] D. Schanz, S. Gesemann, and A. Schröder, Shake-the-box: Lagrangian particle tracking at high particle image densities, Experiments in fluids **57**, 1 (2016).

[23] A. Manoharan, S. Subramanian, and A. Joy, Topological entropy of two dimensional turbulence (2024), arXiv:2412.08996 [physics.flu-dyn].

[24] A. Stohl, Computation, accuracy and applications of trajectories—a review and bibliography, Atmospheric Environment **32**, 947 (1998).

[25] T. Peacock and G. Haller, Lagrangian coherent structures: The hidden skeleton of fluid flows, Physics today **66**, 41 (2013).

[26] J.-L. Thiffeault, Braids of entangled particle trajectories, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **20** (2010).

[27] T. Haszpra and T. Tél, Topological entropy: A lagrangian measure of the state of the free atmosphere, Journal of the Atmospheric Sciences **70**, 4030 (2013).

[28] T. Haszpra and T. Tél, Volcanic ash in the free atmosphere: A dynamical systems approach, in *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 333 (IOP Publishing, 2011) p. 012008.

[29] J. M. Ottino *et al.*, Mixing, chaotic advection, and turbulence, Annual Review of Fluid Mechanics **22**, 207 (1990).

[30] T. Zahtila, L. Chan, A. Ooi, and J. Philip, Particle transport in a turbulent pipe flow: direct numerical simulations, phenomenological modelling and physical mechanisms, Journal of Fluid Mechanics **957**, A1 (2023).

[31] K. A. Kusters, The influence of turbulence on aggregation of small particles in agitated vessels, (1991).

[32] E. Ziemniak, C. Jung, and T. Tél, Tracer dynamics in open hydrodynamical flows as chaotic scattering, Physica D: Nonlinear Phenomena **76**, 123 (1994).

[33] S. Zimmerman, C. Morrill-Winter, and J. Klewicki, Design and implementation of a hot-wire probe for simultaneous velocity and vorticity vector measurements in boundary layers, Experiments in Fluids **58**, 1 (2017).

[34] A. Cavo, G. Lemonis, T. Panidis, and D. Papailiou, Performance of a 12-sensor vorticity probe in the near field of a rectangular turbulent jet, Experiments in fluids **43**, 17 (2007).

[35] J. M. Wallace and P. V. Vukoslavčević, Measurement of the velocity gradient tensor in turbulent flows, Annual review of fluid mechanics **42**, 157 (2010).

[36] M. Mortensen and H. P. Langtangen, High performance python for direct numerical simulations of turbulent flows, Computer Physics Communications **203**, 53 (2016).

[37] G. Patterson and S. A. Orszag, Spectral calculations of isotropic turbulence: Efficient removal of aliasing interactions, Physics of Fluids **14**, 2538 (1971).

[38] K. Alvelius, Random forcing of three-dimensional homogeneous turbulence, Physics of Fluids **11**, 1880 (1999).

[39] A. Crouter and L. Briens, Methods to assess mixing of pharmaceutical powders, AAPS PharmSciTech **20**, 1 (2019).

[40] M. Ebrahimi, M. Tamer, R. M. Villegas, A. Chiappetta, and F. Ein-Mozaffari, Application of cfd to analyze the hydrodynamic behaviour of a bioreactor with a double impeller, Processes **7**, 694 (2019).

[41] M. Zoby, S. Navarro-Martinez, A. Kronenburg, and A. Marquis, Turbulent mixing in three-dimensional droplet arrays, International journal of heat and fluid flow **32**, 499 (2011).

[42] J. Li, M. Wang, D. Fang, J. Wang, D. Liu, W. Tian, S. Qiu, and G. Su, Cfd simulation on the transient process of coolant mixing phenomenon in reactor pressure vessel, Annals of Nuclear Energy **153**, 108045 (2021).

[43] K. Srinivasan, R. Barkan, and J. C. McWilliams, A forward energy flux at submesoscales driven by frontogenesis, Journal of Physical Oceanography **53**, 287 (2023).

[44] J. G. Charney, Geostrophic turbulence, Journal of Atmospheric Sciences **28**, 1087 (1971).

[45] E. A. D'Asaro, A. Y. Shcherbina, J. M. Klymak, J. Molemaker, G. Novelli, C. M. Guigand, A. C. Haza, B. K. Haus, E. H. Ryan, G. A. Jacobs, *et al.*, Ocean convergence and the dispersion of flotsam, Proceedings of the National Academy of Sciences **115**, 1162 (2018).

[46] A. Jagannathan, K. Srinivasan, J. C. McWilliams, M. J. Molemaker, and A. L. Stewart, Boundary-layer-mediated vorticity generation in currents over sloping bathymetry, Journal of Physical Oceanography **51**, 1757 (2021).

[47] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, 6th ed. (Academic Press, San Diego, CA, 2000) see formula 4.291.8 for Serret's integral.

[48] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 10th ed. (Dover Publications, New York, 1965) national Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55.

[49] S. Ramanujan, Modular equations and approximations to π, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **45**, 350 (1914), section 16 contains the ellipse perime-

ter approximations.