

不确定性原理与非局部黑洞

Salvatore Capozziello,^{1,2,3,*} Giuseppe Meluccio,^{2,3,†} and Jonas R. Mureika^{4,‡}

¹*Dipartimento di Fisica “E. Pancini”, Università di Napoli “Federico II”, Via Cinthia 9, 80126 Napoli, Italy*

²*Scuola Superiore Meridionale, Largo San Marcellino 10, 80138, Napoli, Italy*

³*INFN Sezione di Napoli, Complesso Universitario di Monte Sant’Angelo, Edificio 6, Via Cinthia, 80126, Napoli, Italy*

⁴*Department of Physics, Loyola Marymount University, Los Angeles, California, USA*

(10Dated: June 28, 2025)

我们讨论了来自非局部引力理论的黑洞解中的广义不确定性原理和扩展不确定性原理，特别关注无穷导数引力。我们认为这些海森堡不确定性原理的修改是源自引力相互作用非局域特性的有效描述。通过比较这两种修正不确定度原理以及非局部引力的预测，我们找到了对其他情况下自由参数的理论约束以及超越广义相对论的黑洞物理学的普遍定律。

I. 介绍

黑洞代表了主要的理论领域，用于研究物质理论（即量子力学 (QM)）和引力理论（即广义相对论 (GR)）的偏差。因此，黑洞对于任何量子重力 (QG) 研究项目都具有极大的兴趣。解决 GR 某些不足的一个有希望的方法与非局部性有关，可以在重力理论中作为有效描述或由基本原则引入。无限导数重力 (IDG) 是一系列基于强烈理论动机发展的非局部重力理论的广泛集合，这些动机导致了无奇点、么正且可重整化的 QG 理论的形成（见例如 [1–3] 中的文献）。IDG 理论考虑了一般协变 d’Alembert 算子或其逆的解析函数，分别导致 GR 的紫外 (UV) 或红外 (IR) 修正。

假设仅涉及里奇标量的项，IDG 的有效红外非局域引力作用可以写为（参见 Ref.[4] 及其中的参考文献）

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} [M_P^2 R + R \bar{\mathcal{F}}_1(\square) R], \quad (1)$$

其中

$$\bar{\mathcal{F}}_1(\square) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1-n} \square^{-n}, \quad f_{1-n} \equiv \tilde{f}_{1-n} M_{\text{IR}}^{2n}. \quad (2)$$

这里 $\tilde{f}_{1-n}$ 是无量纲常数； $M_P = 2.44 \cdot 10^{18} \text{GeV}$ 是简化的普朗克质量， M_{IR} 是一个红外质量尺度。在 UV 极限下， M_{IR} 可以忽略不计相对于 M_P ，作用量简化为广义相对论的爱因斯坦-希尔伯特作用量。逆 d’Alembert 算

子 $\square^{-1}$ 可以用其格林函数表示并求解。另一方面，作用量

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} F(R, \square^{-1} R), \quad (3)$$

其中 F 是一个通用解析函数，可以被认为是同时考虑了 UV 和 IR 修正 [5]。紫外非局域修改试图解决像黑洞或大爆炸 [2, 3, 6–8] 这样的奇点问题，而红外非局域修改旨在解释暗物质或暗能量 [4, 9–24]。

时空非局域性的影响可以以各种方式表现出来，但总的来说，它们会给与广义相对论相关的引力场引入一种基本的“模糊性”，并关联到一个特征长度，在非常小或非常大的尺度上。这个概念类似于通过对海森堡不确定性原理进行修改所暗示的内容，即广义不确定性原理 (GUP) 和扩展不确定性原理 (EUP)。前者可以从多种量子重力理论中推导出来，并在普朗克尺度 [25–47, 50] 影响黑洞物理学，而后者则在天文或宇宙学尺度 [25, 51–54] 上发挥作用。在这两种情况下，GUP 和 EUP 都提供了对任何物质场测量固有不确定性的修正。这种额外的“模糊性”以特征长度标度表现出来，无论是紫外 (UV) 还是红外 (IR) 区域。

在这项工作中，我们论证了，在黑洞物理学的背景下，GUP 和 EUP 是从引力中的非局域性效应衍生出的有效描述。这一见解可以这样理解。首先，无论是非局域性的范式还是修改不确定原理的范式都提出了物质与时空相互作用中存在一种固有的“模糊”或“弥散”，这超出了量子力学和广义相对论的基础。此外，在这两种情况下，这些新颖的非局部效应预计仅在某些特征长度尺度上相关；因此，人们自然可以将非局域引力的特征 UV 或 IR 长度尺度与 GUP 或 EUP 分

* capozziello@na.infn.it

† giuseppe.meluccio-ssm@unina.it

‡ jrmureika@lmu.edu

别对应起来。据称非局域性和修改不确定原理之间的联系最终源自动力学。一方面，GUP 和 EUP 假设引力由广义相对论定律描述，并且仅对物质的行为进行修改；另一方面，非局部引力处理遵守量子力学规则的普通物质，同时改变广义相对论时空曲率的局部性质。但是，物质部分的修改必须反映在引力部分的修改上，反之亦然，因此为什么 GUP 和 EUP 可以被视为只更改了物质理论而保持时空描述中局域性原则的有效描述。相反，非局部引力建议对引力相互作用进行激进改革，在某些适当的 UV 或 IR 区域，可以通过非常不同的理论框架——即 GUP 或 EUP 分别近似表示。将非局部黑洞与 GUP 联系起来的想法并不新鲜。在参考文献 [55] 中，一个受 GUP 启发的黑洞模型被发现等同于从特定的非局域引力理论中推导出的一个模型。这一结果正是由于可以自由地利用引力场方程将非局部特性从物质源转移到时空或反过来转移的事实所致。在这里，我们寻找黑洞性质上非局域性和修改不确定原理之间更一般的联系，因此我们将 IDG 理论作为研究的起点。本文采用自然单位制。

II. 紫外非局部引力和广义不确定性原理

基于来自量子引力的各种论据，GUP 假设了一个依赖于动量的海森堡不确定性原理修正：

$$\Delta x \Delta p \geq 1 + \beta L_P^2 \Delta p^2, \quad (4)$$

其中，(约化的) 普朗克长度定义为 $L_P \equiv \sqrt{8\pi G}$ ，而 β 是一个无量纲参数。对于这个方向的一个初步研究，请参见文献 [56]。一种受广义不确定性原理启发的引力理论在 [47] 中被提出，并在 [48, 49] 中进一步探讨，在其中引入了如下形式的 GUP 修正施瓦西度规：

$$ds^2 = f_{\text{GUP}}(r) dt^2 - \frac{dr^2}{f_{\text{GUP}}(r)} - r^2 d\Omega$$

$$f_{\text{GUP}}(r) = 1 - \frac{2Gm}{r} \left(1 + \frac{\beta M_P^2}{2 m^2} \right), \quad (5)$$

其中， $M_P = 1/L_P$ 是(简化后的) 普朗克质量。这允许存在亚普朗克黑洞。在弱场极限下，可以恢复以下牛顿势：

$$\Phi_{\text{GUP}}(r) = -\frac{Gm}{r} \left(1 + \frac{\beta}{16\pi G m^2} \right). \quad (6)$$

因此，相应的事件视界相对于广义相对论中的位置发生了偏移，即为：

$$R_{\text{EH}} = \left(1 + \frac{\beta}{16\pi G m^2} \right) R_S, \quad (7)$$

其中， $R_S \equiv 2Gm$ 是施瓦西半径。请注意，度量 (5) 在亚普朗克区域表现出维数减少的特征，产生具有 $(1+1)-D$ 基准面和热力学特性的黑洞。也就是说，对于 $m \ll M_P$ ，基准面的尺度为 $R_{\text{EH}} \sim m^{-1}$ 和 $T \sim m$ ，这解决了标准霍金温度剖面在极限 $m \rightarrow 0$ 下的发散行为。

紫外非局域引力理论的一个共同特征是将点状源的有效“展宽”到一个其大小由理论的特征长度尺度定义的区域。在这个区域内，非局域性的影响变得显著，导致引力场变得规则而不是奇异。为了看到这一点，可以考虑一类在弱场极限下具有无限多个达朗贝尔算子 [57] 的紫外非局域理论。对于质量为 m 和能量密度为 ρ 的静态点状源，非局域场方程给出与广义相对论相比泊松方程的如下修改 [58]：

$$e^{-L_{\text{UV}}^2 \square} \nabla^2 \Phi_{\text{NL}}(r) = 4\pi G \rho(r), \quad (8)$$

其中 Φ_{NL} 是理论中的球对称牛顿势， L_{UV} 是非局域性的特征长度尺度。通过将非局部指数因子移至右侧并采用傅里叶变换表示，该方程等效于具有有限尺寸区域“弥散”源的 GR 的泊松方程 $\sim L_{\text{UV}}$ ：

$$\nabla^2 \Phi_{\text{NL}}(r) = 4\pi G m e^{L_{\text{UV}}^2 \square} \delta^3(\vec{r}) = \frac{Gm}{2\sqrt{\pi} L_{\text{UV}}^3} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4L_{\text{UV}}^2}\right). \quad (9)$$

求解 Φ_{NL} ，可以发现

$$\Phi_{\text{NL}}(r) = -\frac{Gm}{r} \text{erf}\left(\frac{r}{2L_{\text{UV}}}\right). \quad (10)$$

该牛顿势是渐近平坦的，并且对于 $r \gg L_{\text{UV}}$ ，逼近 GR 的牛顿势，而对于 $r \rightarrow 0$ ，它收敛于有限值 $-\frac{Gm}{\sqrt{\pi} L_{\text{UV}}}$ ，从而使该理论渐近安全。

势 (6) 和 (10) 非常不同， Φ_{NL} 在结构上与广义相对论的牛顿势不同，并对 $r \lesssim L_{\text{UV}}$ 提供了不同的物理预测。尽管如此，仍可以预期势 Φ_{GUP} 是在某个合适的长度尺度下对 Φ_{NL} 的有效描述。我们认为这个长度尺度是在非局部引力效应出现时的尺度，即 L_{UV} 。为了理解这一主张并测试其预测，可以研究方程

$$\Phi_{\text{GUP}}(L_{\text{UV}}) = \Phi_{\text{NL}}(L_{\text{UV}}). \quad (11)$$

求解 β 可得

$$\beta = -16\pi Gm^2[1 - \text{erf}(1/2)] \approx -24.1 Gm^2 \approx -\frac{m^2}{M_{\text{P}}^2}. \quad (12)$$

我们观察到这个结果的两个重要特征： β 被预测为负值，并且与比率 m/M_{P} 的二次关系有关。将 β 的这一表达式代入事件视界 (7) 的对应表达式中得到

$$R_{\text{EH}} = 2 \text{erf}(1/2) Gm \approx 0.5 R_{\text{S}}. \quad (13)$$

进一步推论是对黑洞蒸发温度进行了修正预测

$$T_e \approx 2 T_{\text{H}}, \quad (14)$$

其中 $T_{\text{H}} \equiv 1/8\pi Gm$ 是 GR 中的霍金温度

III. 红外非局域引力和 EUP

借鉴上一节的讨论，我们现在可以尝试重现红外区域的分析。

EUP 引入了海森堡不确定性原理的位置依赖性修改：

$$\Delta x \Delta p \geq 1 + \alpha \frac{\Delta x^2}{L_*^2}, \quad (15)$$

其中 α 是另一个无量纲参数，而 L_* 是一个大的长度尺度，可能是哈勃长度。遵循在 [47] 中概述的 GUP 纠正度量的形式主义，提出了相应的受 EUP 启发的引力理论 [54]。在这种情况下，修改后的度量函数是

$$f_{\text{EUP}}(r) = 1 - \frac{2Gm}{r} \left(1 + \frac{4\alpha G^2 m^2}{L_*^2} \right) \quad (16)$$

该理论对那些施瓦茨希尔德半径超过 EUP 尺度的物体的质量进行了修正， $R_{\text{S}} > L_*$ ，使得黑洞的地平线半径按 $R_{\text{EH}} \sim m^3$ 缩放。因此，超大质量黑洞是检验相应偏差的自然测试对象。在 [54] 中考虑了各种观测结果，包括对光子和物质轨道的修改。后续的研究分析了 EUP 引力对水星近日点偏移、夏皮罗时间延迟以及 S2 恒星轨道进动 [60] 的影响，强透镜效应对于 Sgr A* 和 M87 [61]，以及一个由 EUP 引发的哈勃张力问题 [62]。此外，尺度 L_* 可能决定了宇宙学常数 [63] 的值。

在这种情况下，质量为 m 的静态黑洞，在弱场极限下的牛顿势是

$$\Phi_{\text{EUP}}(r) = -\frac{Gm}{r} \left(1 + \frac{4\alpha G^2 m^2}{L_*^2} \right). \quad (17)$$

相应的事件视界相对于广义相对论中的位置发生了偏移：

$$R_{\text{EH}} = \left(1 + \frac{4\alpha G^2 m^2}{L_*^2} \right) R_{\text{S}}. \quad (18)$$

注意，当质量分布的史瓦西半径为 $R_{\text{S}} > L_*$ 时，该势 (17) 大于标准牛顿情况下的值。然而，在这里，质量不一定是一个黑洞，而史瓦西半径仅作为理论中的内部参数起作用。在星系的情况下，过渡到 EUP 势可能与旋转曲线的平坦化 [54] 相吻合。

对于非局部引力，可以考虑一类含有无限多个逆达朗贝尔算子 [59] 的红外非局部理论，其具有特征长度尺度 L_{IR} 。该理论中一个质量为 m 的静态黑洞在弱场极限下的球对称牛顿势是

$$\Phi_{\text{NL}}(r) = -\frac{Gm}{r} \left[\frac{1}{2} {}_0F_2 \left(; \frac{1}{2}, 1; \frac{r^2}{4L_{\text{IR}}^2} \right) - \frac{r}{\sqrt{\pi} L_{\text{IR}}} {}_0F_2 \left(; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{r^2}{4L_{\text{IR}}^2} \right) \right], \quad (19)$$

其中 ${}_0F_2$ 是广义超几何函数。这个牛顿势在短距离 $r \ll L_{\text{IR}}$ 时等同于广义相对论的结果，而对于 $r \gtrsim L_{\text{IR}}$ ，它显著地振荡，表明与广义相对论预测的巨大偏差。

在这种情况下，势能 (17) 和 (19) 也非常不同，但前者可以预期在距离接近 L_{IR} 时成为后者的有效描述。要研究的有用方程是

$$\Phi_{\text{EUP}}(L_{\text{IR}}) = \Phi_{\text{NL}}(L_{\text{IR}}). \quad (20)$$

求解 α 导致

$$\alpha = \left[\sqrt{\pi} {}_0F_2 \left(; \frac{1}{2}, 1; \frac{1}{4} \right) - {}_0F_2 \left(; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{4} \right) - 2\sqrt{\pi} \right] \frac{L_*^2}{8\sqrt{\pi} G^2 m^2} \approx -0.2 \frac{L_*^2}{G^2 m^2} \approx -137 \frac{M_{\text{P}}^2}{m^2} \frac{L_*^2}{L_{\text{P}}^2}. \quad (21)$$

如同 UV 情况，值得注意的是这个结果有两个重要的特征： α 被预测为负值，并且与比率 M_{P}/m 的平方成正比，以及与比率 L_*/L_{P} 的平方成正比。通过将此表达式代入事件视界 (18) 的表达式中，并用 α 代替，可得

$$R_{\text{EH}} = \left[{}_0F_2 \left(; \frac{1}{2}, 1; \frac{1}{4} \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} {}_0F_2 \left(; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{4} \right) \right] Gm \approx 0.1 R_{\text{S}}. \quad (22)$$

黑洞的蒸发温度则是

$$T_e \approx 10 T_{\text{H}}. \quad (23)$$

这些结果表明来自非局部性的紫外和红外效应均可有效区分于广义相对论预测的黑洞热力学。

IV. 结论

我们比较了基于修改的不确定性原理和非局部引力对黑洞的预测。我们的关键论点是，前者可以被视为在特征长度尺度上后者的有效描述，在这些长度尺度下，非局部引力效应可能会变得主导。随后与广义相对论的偏差源于 IDG 理论放弃了局域性原则，但场方程允许自由地将这些新的后果归因于物质，至少在现象学水平上是这样。这就是为什么修改后的不确定性原理的起源最终可以追溯到引力的基本非局部性质。在紫外和红外区域中，我们可以分别预测由 GUP-和 EUP 启发的黑洞的一些普遍特征：事件视界相对于史瓦西半径减小，以及蒸发温度相对于霍金温度增加。

研究黑洞质量的参数空间，在假设 $\beta \sim 1$ 和 $\alpha \sim 1$ 以及它们各自的测地结构的情况下应该是有趣的。

ACKNOWLEDGMENTS

S.C. 和 G.M. 感谢意大利国家核物理研究所 (INFN)，那不勒斯分会，特定计划 QGSKY 和 MoonLight-2 的支持。本文基于由 COST 行动计划 CA21136 支持的研究工作——通过系统性和基础物理学解决宇宙学中的观测紧张关系 (CosmoVerse)，该行动得到 COST (欧洲科学技术合作组织) 的支持。

-
- [1] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto, A. Mazumdar, Towards Singularity- and Ghost-Free Theories of Gravity, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 031101 (2012).
 - [2] T. Biswas, A. Mazumdar, W. Siegel, Bouncing universes in string-inspired gravity, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2006**, 009 (2006).
 - [3] L. Modesto, Super-renormalizable quantum gravity, *Phys. Rev. D* **86**, 044005 (2012).
 - [4] S. Capozziello, A. Mazumdar, G. Meluccio, Can nonlocal gravity really explain dark energy?, *Phys. Dark Universe* **45**, 101517 (2024).
 - [5] F. Bajardi, S. Capozziello, Non-Local Cosmology: From Theory to Observations, *Symmetry* **16**, 579 (2024).
 - [6] F. Briscese, A. Marcianò, L. Modesto, E. N. Saridakis, Inflation in (super-) renormalizable gravity, *Phys. Rev. D* **87**, 083507 (2013).
 - [7] T. Biswas, A. S. Koshelev, A. Mazumdar, S. Y. Vernov, Stable bounce and inflation in non-local higher derivative cosmology, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **08**, 024 (2012).
 - [8] L. Modesto, J. W. Moffat, P. Nicolini, Black holes in an ultraviolet complete quantum gravity, *Phys. Lett. B* **695**, 397–400 (2011).
 - [9] S. Deser, R. P. Woodard, Nonlocal Cosmology, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 111301 (2007).
 - [10] S. Deser, R. P. Woodard, Nonlocal Cosmology II – Cosmic acceleration without fine tuning or dark energy, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 034 (2019).
 - [11] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, G. Gabadadze, Non-Local Modification of Gravity and the Cosmological Constant Problem, *arXiv:hep-th/0209227* (2002).
 - [12] A. O. Barvinsky, Nonlocal action for long-distance modifications of gravity theory, *Phys. Lett. B* **572**, 109–116 (2003).
 - [13] S. Nojiri, S. D. Odintsov, M. Sasaki, Y. Zhang, Screening of cosmological constant in non-local gravity, *Phys. Lett. B* **696**, 278–282 (2011).
 - [14] S. Nojiri, S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, Ghost-free non-local $F(R)$ Gravity Cosmology, *Phys. Dark Universe* **28** (2020), 100541 (2020).
 - [15] E. Elizalde, S. D. Odintsov, E. O. Pozdeeva, S. Y. Vernov, De Sitter and power-law solutions in non-local Gauss–Bonnet gravity, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **15**, 1850188 (2018).
 - [16] K. Bamba, S. Nojiri, S. D. Odintsov, M. Sasaki, Screening of cosmological constant for De Sitter Universe in non-local gravity, phantom-divide crossing and finite-time future singularities, *Gen. Relativ. Gravit.* **44**, 1321–1356 (2012).
 - [17] F. M. Lev, Solving Particle–Antiparticle and Cosmological Constant Problems, *Axioms* **13**, 138 (2024).
 - [18] S. Capozziello, R. D’Agostino, Reconstructing the distortion function of non-local cosmology: A model-independent approach, *Phys. Dark Universe* **42**, 101346 (2023).
 - [19] M. Maggiore, Phantom dark energy from nonlocal infrared modifications of general relativity, *Phys. Rev. D* **89** (2014).
 - [20] S. Foffa, M. Maggiore, E. Mitsou, Cosmological dynamics and dark energy from nonlocal infrared modifications of

- gravity, *Int. J. Mod. Phys. A* **29**, 1450116 (2014).
- [21] M. Maggiore, M. Mancarella, Nonlocal gravity and dark energy, *Phys. Rev. D* **90**, 023005 (2014).
- [22] S. Capozziello, A. Mazumdar, G. Meluccio, The Weinberg no-go theorem for cosmological constant and nonlocal gravity, *Phys. Lett. B* **862**, 139370 (2025).
- [23] F. Bouché, S. Capozziello, V. Salzano, K. Umetsu, Testing non-local gravity by clusters of galaxies, *Eur. Phys. J. C* **82**, 652 (2022).
- [24] F. Bouché, S. Capozziello, V. Salzano, Addressing cosmological tensions by non-local gravity, *Universe* **9**, 27 (2023).
- [25] A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann, Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation, *Phys. Rev. D* **52**, 1108–1118 (1995).
- [26] R. J. Adler, D. I. Santiago, On gravity and the uncertainty principle, *Mod. Phys. Lett. A* **14**, 1371 (1999).
- [27] G. Veneziano, A Stringy Nature Needs Just Two Constants, *EPL* **2**, 199 (1986).
- [28] E. Witten, Reflections on the Fate of Spacetime, *Phys. Today* **49**, 24–30 (1996).
- [29] F. Scardigli, Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment, *Phys. Lett. B* **452**, 39–44 (1999).
- [30] D. J. Gross, P. F. Mende, String theory beyond the Planck scale, *Nucl. Phys. B* **303**, 407 (1988).
- [31] D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano, Can spacetime be probed below the string size?, *Phys. Lett. B* **216**, 41 (1989).
- [32] T. Yoneya, ON THE INTERPRETATION OF MINIMAL LENGTH IN STRING THEORIES, *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 1587 (1989).
- [33] A. Ashtekar, S. Fiarhurst, J. L. Willis, Quantum gravity, shadow states and quantum mechanics, *Class. Quantum Gravity* **20**, 1031 (2003).
- [34] G. M. Hossain, V. Husain, S. S. Seahra, Background-independent quantization and the uncertainty principle, *Class. Quantum Gravity* **27**, 165013 (2010).
- [35] M. Isi, J. Mureika, P. Nicolini, Self-completeness and the generalized uncertainty principle, *J. High Energy Phys.* **1311**, 139 (2013).
- [36] S. Majid, Scaling Limit of the Noncommutative Black Hole, *J. Phys. Conf. Ser.* **284**, 012003 (2011).
- [37] M. Maggiore, A generalized uncertainty principle in quantum gravity, *Phys. Lett. B* **304**, 65 (1993).
- [38] M. Maggiore, The algebraic structure of the generalized uncertainty principle, *Phys. Lett. B* **319**, 83 (1993).
- [39] M. Maggiore, Quantum groups, gravity, and the generalized uncertainty principle, *Phys. Rev. D* **49**, 5182 (1994).
- [40] R. J. Adler, P. Chen, D. I. Santiago, The generalized uncertainty principle and black hole remnants, *Gen. Relativ. Gravit.* **33**, 2101–2108 (2001).
- [41] P. Chen, R. J. Adler, Black hole remnants and dark matter, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **124**, 103 (2003).
- [42] A. N. Tawfik, A. M. Diab, Generalized uncertainty principle: Approaches and applications, *Int. J. Mod. Phys. D* **23**, 1430025 (2014).
- [43] B. Carr, L. Modesto, I. Premont-Schwarz, Generalized uncertainty principle and self-dual black holes, *arXiv:1107.0708* (2011).
- [44] B. J. Carr, The Black Hole Uncertainty Principle Correspondence, *Springer Proc. Phys.* **170**, 159 (2016).
- [45] B. J. Carr, Black holes, the generalized uncertainty principle and higher dimensions, *Mod. Phys. Lett. A* **28**, 1340011 (2013).
- [46] S. Köppel, M. Knipfer, M. Isi, J. Mureika, P. Nicolini, Generalized uncertainty principle and extra dimensions, *Springer Proc. Phys.* **208**, 141–147 (2018).
- [47] B. J. Carr, J. Mureika, P. Nicolini, Sub-Planckian black holes and the Generalized Uncertainty Principle, *J. High Energy Phys.* **1507**, 052 (2015).
- [48] B. J. Carr, J. Mureika, P. Nicolini, Self-complete and GUP-Modified Charged and Spinning Black Holes, *Eur. Phys. J. C* **80**:1166 (2020).
- [49] B. J. Carr, J. Mureika, P. Nicolini, Reconciling microscopic and macroscopic tests of the Compton-Schwarzschild correspondence, *Int. J. Mod. Phys. D.* **33**:2430002 (2024).
- [50] G. Amelino-Camelia, M. Arzano, Y. Ling, G. Mandanici, Black-hole thermodynamics with modified dispersion relations and generalized uncertainty principles, *Class. Quantum Gravity* **23**, 2585 (2006).
- [51] C. Bambi, F. R. Urban, Natural extension of the generalized uncertainty principle, *Class. Quantum Gravity* **25**, 095006 (2008).
- [52] S. Mignemi, Extended uncertainty principle and the geometry of (anti)-de Sitter space, *Mod. Phys. Lett. A* **25**, 1697–1703 (2010).
- [53] T. Zhu, J.-R. Ren, M.-F. Li, Influence of generalized and extended uncertainty principle on thermodynamics of FRW universe, *Phys. Lett. B* **674**, 204–209 (2009).
- [54] J. R. Mureika, Extended Uncertainty Principle black holes, *Phys. Lett. B* **789**, 88–92 (2019).

- [55] P. Nicolini, Nonlocal and generalized uncertainty principle black holes, arXiv:1202.2102v2 (2012).
- [56] S. Capozziello, G. Lambiase, G. Scarpetta, Generalized uncertainty principle from quantum geometry, *Int. J. Theor. Phys.* **39**, 15 (2000).
- [57] T. Biswas, A. Conroy, A. S. Koshelev, A. Mazumdar, Generalized ghost-free quadratic curvature gravity, *Class. Quantum Gravity* **31**, 015022 (2013).
- [58] L. Buoninfante, A. S. Koshelev, G. Lambiase, A. Mazumdar, Classical properties of non-local, ghost- and singularity-free gravity, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2018**, 034 (2018).
- [59] A. Conroy, T. Koivisto, A. Mazumdar, A. Teimouri, Generalised Quadratic Curvature, Non-Local Infrared Modifications of Gravity and Newtonian Potentials, *Class. Quantum Gravity* **32**, 015024 (2014).
- [60] O. Ökcü and E. Aydinler, *Eur. Phys. Lett.* **138**, 39002 (2022).
- [61] X. Lu and Y. Xie, *Mod. Phys. Lett. A* **34**, 1950152 (2019).
- [62] K. Nozari, S. Saghafi, and M. Hajebrahimi, *Phys. Dark Univ.* **46**, 101571 (2024).
- [63] R. C. Pantig, G. Lambiase, A. Övgün, N. J. L. S. Lobos, *Phys. Dark Univ.* **47**, 101817 (2025).