

# 带有后验内部测量的空间时间分数阶扩散方程的逆源问题

Kai Yu<sup>a</sup>, Zhiyuan Li<sup>a</sup> and Yikan Liu<sup>\*b</sup>

<sup>a</sup>*School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China*

<sup>b</sup>*Department of Mathematics, Kyoto University, Kitashirakawa-Oiwakecho, Sakyo-ku, Kyoto 606-8502, Japan*

## 摘要

本文研究了从后验内部测量数据出发的空间时间分数阶扩散方程的逆源问题。唯一性结果通过分数阶导数的记忆效应和唯一连续性性质得以建立。对于数值重建, 将逆问题重新表述为带有 Tikhonov 正则化的优化问题。我们使用 Levenberg-Marquardt 方法从噪声测量数据中识别未知源。最后, 给出一些数值例子以说明所提算法的有效性和准确性。

**关键词:** 空间时间分数阶扩散方程, 逆源问题, 后验内部测量, 唯一连续性, Levenberg-Marquardt 正则化。

**2020 数学主题分类:** 35R30, 35R11.

## 1 介绍和主要结果

令  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^d$  中的一个有界域, 其边界  $\partial\Omega$  足够光滑, 并且令  $T > 0$  是一个固定的最终时间。在这篇论文中, 我们考虑了如下时空分数阶扩散方程的初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha(u(x, t) - \phi(x)) + \mathcal{A}^\beta u(x, t) = f(x)\mu(t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, \cdot) - \phi(x) \in H_\alpha(0, T), & \text{a.e. } x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1.1)$$

这里  $\partial_t^\alpha$  和  $\mathcal{A}^\beta$  分别表示时间上的阶数为  $\alpha \in (0, 1)$  的分数阶导算子和空间上的阶数为  $\beta \in (0, 1)$  的分数阶椭圆算子, 它们将在下一节中被精确定义。

随着时空分数阶扩散方程正问题受到广泛关注, 对应反问题的研究也迅速增长。例如, 张等人 [24] 使用贝叶斯方法解决了时间空间分数阶扩散方程的反问题, 但他们没有给出唯一性结果。李和魏 [15] 研究了在时空分数阶扩散问题中使用初始和边界数据以及内部位置

\*Corresponding author. E-mail: liu.yikan.8z@kyoto-u.ac.jp

额外测量数据识别时变源项的问题。雅诺 [5] 研究了一个反问题，即从最终数据中识别非局部扩散和波动方程中的时间依赖源项和参数。李等人。[14] 使用 Tikhonov 正则化方法解决了识别时空分数阶扩散方程中空间依赖源项的反问题。塔塔尔等人。在 [20, 21, 22] 中解决了一个逆空间依赖源问题，并确定了时间空间分数阶导数的阶数，对于一个时空分数阶扩散方程。贾等人。在 [7] 研究了一种时空分数阶扩散方程的哈纳克不等式及其在反源问题中的应用。在 [2] 中，杰纳迪等人。研究了通过分数阶 Tikhonov 正则化方法解决时空间分数阶扩散方程中的逆向和源问题。聂等人。在 [17] 中研究了由分数布朗运动驱动的时间空间分数扩散方程的逆随机源问题。Van 等人使用拟可逆方法研究了时间空间分数抛物线方程的逆源问题，在 [3] 中。

上述研究大多基于整个区域  $\Omega$  或在整个时间间隔内的子域的终端时刻的全局观测数据  $(0, T)$ 。然而，在许多应用中，获得这种全局数据常常遇到实际困难。例如，获取全局观测数据有时成本高昂或不切实际，因为某些观测条件受到限制。特别是对于时间方向上的观测，提前预测意外事故并进行全程观测  $(0, T)$  总是具有难度的。相比之下，在实践中似乎更倾向于在选择观测时间间隔方面赋予一定的灵活性。

鉴于上述动机，我们专注于以下逆源问题的唯一性问题，该问题涉及带有后验内部观测数据的 (1.1)。

**问题 1.1.** 令  $T_1 < T$  为一个固定的正常数， $\omega$  是  $\Omega$  的非空开子域。在某些假设下，我们能否通过测量  $\omega \times (T_1, T)$  中的  $u$  来唯一确定  $\Omega$  中的源项  $f(x)$ ？

最近的一些研究，例如 [11, 9, 6, 8]，断言可以利用分数阶导数的记忆效应（参见定义 (2.1)）从远离初始时间的的时间区间上的观测值中重构未知量。然而，据我们所知，似乎没有文献结合空间的非局部性。在本文中，结合引理 3.1 中的唯一延拓和引理 3.2 中的杜哈梅原理，我们建立了关于问题 1.1 唯一性的以下主要结果。

**定理 1.2.** 令  $\phi = 0$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\mu \in L^2(0, T)$  和  $u$  是 (1.1) 的解。假设  $f = 0$  在一个非空开子域  $\omega \subset \Omega$  中。如果  $\mu$  满足

$$\exists T_0 > 0 \text{ such that } \mu \not\equiv 0 \text{ in } (0, T_0), \quad (1.2)$$

那么对于任意的  $T \geq T_0$  和任意的  $T_1 \in (0, T)$ ,  $u = 0$  在  $\omega \times (T_1, T)$  中蕴含  $f = 0$  在  $\Omega$  中。

在环境事故背景下，关键假设 (1.2) 意味着已知的成分  $\mu$  仅在  $(0, T_0)$  内活跃。然后定理 1.2 要求在  $\mu$  变得不活跃后终止观察，而开始时间可以相当任意。我们称其为事后数据以强调观察不一定从  $t = 0$  开始。同时，在  $\omega$  中的假设  $f = 0$  意味着观察区域中  $f$  的值是已知的，这也是合理的。

本文的其余部分组织如下。在第 2 节中，我们准备了证明定理 1.2 所需的材料，该定理在第 3 节中给出。我们在第 4 节中提出了莱文贝格-马夸特方法来解决逆问题。然后，第 5 节致力于通过示例对问题 1.1 进行数值处理。最后，第 6 节以结论性评论结束本文。

## 2 预备知识

在本节中，我们首先固定符号并引入后续使用的工具，然后提及正向问题的适定性。设  $L^2(\Omega)$  是一个带有内积  $(\cdot, \cdot)$  的常规  $L^2$  空间，并且  $H_0^1(\Omega), H^2(\Omega)$  等表示常规的索伯列夫空间。用  $H^\alpha(0, T)$  表示索伯列夫-斯洛博德捷斯基空间（例如，Adams[1]）。

分数阶导数  $\partial_t^\alpha : H_\alpha(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$  的阶数为  $\alpha \in (0, 1)$ ，定义为  $\alpha$  阶 Riemann-Liouville 积分算子的逆，阶数为  $\alpha$ ：

$$I^\alpha : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T), \quad I^\alpha g(t) := \int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(t-\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  表示 Gamma 函数。根据 Kubica、Ryszewska 和 Yamamoto[12]，域  $H_\alpha(0, T)$  是由  $\partial_t^\alpha$  定义的  $H^\alpha(0, T)$  的一个子空间

$$H_\alpha(0, T) = \begin{cases} \{\psi \in H^\alpha(0, T) \mid \psi(0) = 0\}, & 1/2 < \alpha < 1, \\ \left\{ \psi \in H^{1/2}(0, T) \mid \int_0^T \frac{|\psi(t)|^2}{t} dt < \infty \right\}, & \alpha = 1/2, \\ H^\alpha(0, T), & 0 < \alpha < 1/2, \end{cases}$$

配备了范数

$$\|\psi\|_{H_\alpha(0, T)} = \begin{cases} \|\psi\|_{H^\alpha(0, T)}, & 0 < \alpha < 1, \alpha \neq 1/2, \\ \left( \|\psi\|_{H^{1/2}(0, T)}^2 + \int_0^T \frac{|\psi(t)|^2}{t} dt \right)^{1/2}, & \alpha = 1/2. \end{cases}$$

详情请参见例如 Gorenflo、Luchko 和 Yamamoto[4]。这里应该提到，对于几乎每一个  $u(x, \cdot) - \phi(x) \in H_\alpha(0, T)$  而言， $x \in \Omega$  广义化了在  $\Omega \times \{0\}$  中的常见初始条件  $u = \phi$ ，并且它只对  $\alpha > 1/2$  具有通常的意义（参见例如 [4, 12]）。此外，不难看出  $\partial_t^\alpha$  等于  $H_\alpha(0, T)$  中的 Riemann-Liouville 导数  $D_t^\alpha := \frac{d}{dt} \circ I^{1-\alpha}$ ，其中  $\circ$  表示复合。

我们回忆一下 Mittag-Leffler 函数

$$E_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

及其拉普拉斯变换的有用公式

$$\mathcal{L}[E_{\alpha, 1}(-\lambda t^\alpha)](z) = \frac{z^{\alpha-1}}{\lambda + z^\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha > 0.$$

以下性质是众所周知的，可以在 Podlubny[18] 中找到

**引理 2.1.** 设  $0 < \alpha < 2$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  为任意值，且  $\mu$  满足  $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$ 。则存在常数  $c = c(\alpha, \beta, \mu) > 0$  使得

$$|E_{\alpha, \beta}(z)| \leq \frac{c}{1 + |z|}, \quad \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi.$$

**引理 2.2.** 令  $\alpha > 0$  和  $\lambda > 0$ 。则对于任意的  $t \geq 0$  和

$$\frac{d}{dt} E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha), \quad t > 0.$$

均成立  $E_{\alpha,\alpha}(-t) > 0$ ,  $E_{\alpha,1}(-t) > 0$ 。

接下来, 椭圆算子  $\mathcal{A}$  在 (1.1) 中被定义为  $\varphi \in D(\mathcal{A}) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  的

$$\mathcal{A}\varphi(x) := - \sum_{i,j=1}^d \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i\varphi(x)) + c(x)\varphi(x), \quad x \in \Omega,$$

其中  $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{\Omega})$  ( $1 \leq i, j \leq d$ ) 和  $0 \leq c \in C(\bar{\Omega})$ 。此外, 存在一个常数  $\delta > 0$ , 使得

$$\delta \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d.$$

对于分数阶椭圆算子的定义, 我们首先引入  $\mathcal{A}$  的本征系统  $\{(\lambda_n, \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ , 即  $\mathcal{A}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ , 其中  $\varphi_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 。然后可知  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ ,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  形成  $n \rightarrow \infty$ , 以及  $\{\varphi_n\}$  构成了  $L^2(\Omega)$  的一个完整的标准正交基。现在我们可以定义分数阶 Sobolev 空间  $D(\mathcal{A}^\beta)$  以及相应的分数阶椭圆算子  $\mathcal{A}^\beta$  为

$$D(\mathcal{A}^\beta) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \|u\|_{D(\mathcal{A}^\beta)}^2 := \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n^\beta(u, \varphi_n)|^2 < \infty \right\},$$

$$\mathcal{A}^\beta u := \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^\beta(u, \varphi_n)\varphi_n.$$

从此我们设定  $D(\mathcal{A}^{-\beta}) = (D(\mathcal{A}^\beta))'$ , 它是所有有界线性泛函在  $D(\mathcal{A}^\beta)$  上的向量空间。我们将  $\psi \in D(\mathcal{A}^{-\beta})$  和  $u \in D(\mathcal{A}^\beta)$  的分离表示为  ${}_{-\beta}\langle \psi, u \rangle_\beta$ 。我们注意到  $D(\mathcal{A}^{-\beta})$  是一个带有范数

$$\|u\|_{D(\mathcal{A}^{-\beta})} = \left( \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-2\beta} |{}_{-\beta}\langle u, \varphi_n \rangle_\beta|^2 \right)^{1/2}.$$

的希尔伯特空间。

根据上述设置, 我们陈述正问题 (1.1) 的适定性。

**定理 2.3.** 如果  $\phi \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  和  $\mu \in L^2(0, T)$ , 成立, 则存在唯一解 (1.1), 使得  $u \in L^2(0, T; D(\mathcal{A}^{\beta/2}))$  和  $u - \phi \in H_\alpha(0, T; D(\mathcal{A}^{-\beta/2}))$ 。此外, 该解允许显式表示

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda_n^\beta t^\alpha) \phi_n \varphi_n(x) + \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \mu(\tau) (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^\beta (t - \tau)^\alpha) d\tau f_n \varphi_n(x), \quad (2.2)$$

其中  $\phi_n = (\phi, \varphi_n)$  和  $f_n = (f, \varphi_n)$ 。进一步地, 我们有估计值

$$\|u\|_{L^2(0,T;D(\mathcal{A}^{\beta/2}))} + \|u - \phi\|_{H_\alpha(0,T;D(\mathcal{A}^{-\beta/2}))} \leq C (\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\mu\|_{L^2(0,T)} \|f\|_{L^2(\Omega)}),$$

其中  $C > 0$  是依赖于  $\alpha, T, \Omega$  的常数。

证明. 使用传统的本征函数展开论证, 我们可以得到直接问题 (1.1) 的弱解为 (2.2)。我们将证明过程分为两个步骤。

**第一步**我们证明了  $u \in L^2(0, T; D(\mathcal{A}^{\beta/2}))$ 。设定

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &:= \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda_n^\beta t^\alpha) \phi_n \varphi_n(x), \\ u_2(x, t) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \mu(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^\beta (t-\tau)^\alpha) d\tau f_n \varphi_n(x), \end{aligned}$$

然后通过叠加原理得到  $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ 。我们分别估计每一项。对于  $u_1$ , 我们有

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{L^2(0,T;D(\mathcal{A}^{\beta/2}))}^2 &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lambda_n^{\beta/2} \phi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n^\beta t^\alpha) \right)^2 dt \\ &\leq C \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2 \left( \frac{\sqrt{\lambda_n^\beta t^\alpha}}{1 + \lambda_n^\beta t^\alpha} \right)^2 t^{-\alpha} dt \\ &\leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_0^T t^{-\alpha} dt \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

对于  $u_2$ , 鉴于引理 2.1–2.2 和卷积的杨不等式, 我们可以推导出

$$\begin{aligned} \|u_2\|_{L^2(0,T;D(\mathcal{A}^{\beta/2}))}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\beta f_n^2 \left\| \int_0^t \mu(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^\beta (t-\tau)^\alpha) \varphi_n d\tau \right\|_{L^2(0,T)}^2 \\ &\leq \|\mu\|_{L^2(0,T)}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lambda_n^{\beta/2} \int_0^T t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^\beta t^\alpha) dt \right)^2 f_n^2 \\ &= C \|\mu\|_{L^2(0,T)}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_n^{\beta/2} T^\alpha) \right)^2 f_n^2 \\ &\leq C \|\mu\|_{L^2(0,T)}^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

因此, 基于上述结果, 我们有  $u \in L^2(0, T; D(\mathcal{A}^{\beta/2}))$ 。

**第二步**我们证明了  $u - \phi \in H_\alpha(0, T; D(\mathcal{A}^{-\beta/2}))$ 。同样地, 我们分别估计  $u_1 - \phi$  和  $u_2$ 。为此, 我们首先从第 pp. 的结果得出结论。140–141 在 [10] 中得到

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha (u(x, t) - \phi(x)) &= D_t^\alpha (u(x, t) - \phi(x)) = D_t^\alpha (u_1(x, t) - \phi(x)) + D_t^\alpha u_2(x, t) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \lambda_n^\beta E_{\alpha,1}(-\lambda_n^\beta t^\alpha) \varphi_n(x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left\{ \mu(t) - \lambda_n^\beta \int_0^t \mu(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^\beta (t-\tau)^\alpha) d\tau \right\} \varphi_n(x) \\ &= -\mathcal{A}^\beta u(x, t) + f(x) \mu(t). \end{aligned}$$

因此，从空间正则性估计的第一步开始，我们得到

$$\begin{aligned}\|u - \phi\|_{H_\alpha(0,T;D(\mathcal{A}^{-\beta/2}))}^2 &= \|\partial_t^\alpha(u - \phi)\|_{L^2(0,T;D(\mathcal{A}^{-\beta/2}))}^2 \\ &= \|- \mathcal{A}^\beta u + f \mu\|_{L^2(0,T;D(\mathcal{A}^{-\beta/2}))}^2 \\ &\leq C (\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\mu\|_{L^2(0,T)} \|f\|_{L^2(\Omega)})^2.\end{aligned}$$

因此，收集上述所有结果，我们有  $u \in L^2(0, T; D(\mathcal{A}^{\beta/2}))$  和  $u - \phi \in H_\alpha(0, T; D(\mathcal{A}^{-\beta/2}))$ 。□

### 3 定理 1.2 的证明

在我们开始证明定理 1.2 之前，我们准备以下两个引理。

**引理 3.1** (唯一连续性). 令  $\phi \in L^2(\Omega)$ ,  $f = 0$  和  $u$  为 (1.1) 的解。然后对于任意非空子域  $\omega \subset \Omega$ ,  $u = 0$  在  $\omega \times (0, T)$  中蕴含  $u \equiv 0$  在  $\Omega \times (0, T)$  中。

证明. 该论点类似于 Sakamoto 和 Yamamoto 的 [19, Theorem 4.2]，然而我们在这里仍然提供一个证明以保持完整性。

类似于 [19, Theorem 2.1(i)]，可以很容易地证明初始边值问题 (1.1) 的解  $u$  可以从  $(0, T)$  分析延拓到  $(0, \infty)$ 。为了简单起见，我们仍然用  $u$  表示这个延拓。如在 [13, Lemma 4.1] 的证明中所示，解  $u(\cdot, t)$  对 (1.1) 的拉普拉斯变换  $\hat{u}(\cdot; s)$  表示为

$$\hat{u}(\cdot; s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{\alpha-1}(\phi, \varphi_n)}{s^\alpha + \lambda_n^\beta} \varphi_n, \quad \operatorname{Re} s > s_1,$$

其中  $s_1 > 0$  是一个足够大的常数。然后由  $\omega \times (0, T)$  中的  $u = 0$  可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{\alpha-1}(\phi, \varphi_n)}{s^\alpha + \lambda_n^\beta} \varphi_n = 0 \quad \text{in } \omega, \operatorname{Re} s > s_1.$$

我们看到当  $s$  在  $\operatorname{Re} s > s_1$  中变化时， $s^\alpha$  在某个域  $U \subset \mathbb{C}$  中变化。因此，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\phi, \varphi_n)}{\eta + \lambda_n^\beta} \varphi_n = 0 \quad \text{in } \omega, \eta = s^\alpha \in U. \quad (3.1)$$

此外，我们可以解析地继续 (3.1) 的两边，从而使它对  $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{-\lambda_n^\beta\}_{n=1}^{\infty}$  成立。然后对于任意的  $n = 1, 2, \dots$ ，我们可以取一个足够小的以  $-\lambda_n^\beta$  为中心的圆圈，排除不同的特征值，并在此圆上积分 (3.1) 以获得

$$u_n := \sum_{\{k|\lambda_k=\lambda_n\}} (\phi, \varphi_k) \varphi_k = 0 \quad \text{in } \omega, \forall n = 1, 2, \dots$$

同时可以很容易地看出  $u_n$  满足在  $\Omega$  中的椭圆方程  $(\mathcal{A} - \lambda_n)u_n = 0$ 。然后根据椭圆方程的唯一连续性可知， $u_n \equiv 0$  在  $\Omega$  中对于所有的  $n = 1, 2, \dots$  成立。结合  $\{\varphi_n\}$  在  $L^2(\Omega)$  中的完全正交性，这意味着  $\phi = 0$  在  $\Omega$  中作为 (1.1) 的初始值。因此，正问题的唯一性保证了  $u \equiv 0$  在  $\Omega \times (0, T)$  中成立，从而完成证明。□

**引理 3.2** (杜哈梅原理). 设  $\phi = 0$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  和  $\mu \in L^2(0, T)$ . 然后, 初始边值问题 (1.1) 的唯一弱解  $u$  允许表示为

$$u(\cdot, t) = \int_0^t \theta(t-s)v(\cdot, s) ds, \quad 0 < t < T, \quad (3.2)$$

其中  $v$  解决了齐次问题

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha v + \mathcal{A}^\beta v = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v = f & \text{in } \Omega \times \{0\}, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

而  $\theta \in L^2(0, T)$  表示分数阶积分方程的唯一解

$$I^{1-\alpha}\theta(t) = \mu(t), \quad 0 < t < T. \quad (3.3)$$

上述结论与非分数阶椭圆部分的 [16, Lemma 4.1] 相平行, 因此此处省略证明。

现在我们已经准备好给出主要定理的证明。

**定理 1.2 的证明.** 令  $u$  满足初始边值问题 (1.1), 其中包含  $\phi = 0$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  和  $\mu \in L^2(0, T)$ . 然后  $u$  根据引理 3.2 取得形式 (3.2)。对 (3.2) 的两边执行 Riemann-Liouville 积分算子  $I^{1-\alpha}$ , 我们推导出

$$\begin{aligned} I^{1-\alpha}u(\cdot, t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \theta(\tau-\xi)v(\cdot, \xi) d\xi d\tau \\ &= \int_0^t v(\cdot, \xi) \int_\xi^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \theta(\tau-\xi) d\tau d\xi \\ &= \int_0^t v(\cdot, \xi) \int_0^{t-\xi} \frac{(t-\xi-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \theta(\tau) d\tau d\xi \\ &= \int_0^t v(\cdot, \xi) I^{1-\alpha}\theta(t-\xi) d\xi \\ &= \int_0^t \mu(t-\tau)v(\cdot, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

其中我们应用了 Fubini 定理并使用了关系式 (3.3)。

由于 Caputo 和 Riemann-Liouville 导数在初始值为零时一致, 我们从方程 (1.1) 得出

$$D_t^\alpha u = \partial_t^\alpha u = -\mathcal{A}^\beta u + f\mu = 0 \quad \text{in } \omega \times (T_1, T)$$

考虑到假设  $u = 0$  在  $\omega \times (T_1, T)$  中以及  $f = 0$  在  $\omega$  中。与  $u = 0$  在  $\omega \times (T_1, T)$  中一起, 根据 [11, Theorem 1] 可知  $u = 0$  在  $\omega \times (0, T)$  中, 因此

$$I^{1-\alpha}u(\cdot, t) = \int_0^t \mu(t-\tau)v(\cdot, \tau) d\tau = 0 \quad \text{in } \omega \times (0, T).$$

根据 Titchmarsh 卷积定理 (见 [23, Theorem VII]), 存在满足  $\tau_1 + \tau_2 \geq T$  的常数  $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ , 使得

$$\mu \equiv 0 \text{ in } (0, \tau_1), \quad v \equiv 0 \text{ in } \omega \times (0, \tau_2).$$

由于  $\mu \neq 0$  在  $(0, T_0) \subset (0, T)$  中在 (1.2) 中的关键假设, 我们得出  $\tau_1 < T_0$ , 并因此得到  $\tau_2 \geq T - \tau_1 > T - T_0 \geq 0$  或等价地  $v = 0$  在  $\omega \times (0, \tau_2)$ 。然后引理 3.1 的直接应用立即表明了  $v \equiv 0$  在  $\Omega \times (0, \tau_2)$  中, 并且相应地在  $\Omega$  中的  $f = 0$  作为  $v$  的初始值。  $\square$

## 4 列文伯格-马夸特方法

在后续内容中, 我们用  $u(x, t; f)$  表示方程 (1.1) 的唯一解, 以强调其对  $f$  的依赖性。根据定理 2.3, 我们定义一个前向算子

$$\mathcal{F} : L^2(\Omega \setminus \omega) \ni f \mapsto u(\cdot, \cdot; f)|_{\omega \times (T_1, T)} \in L^2(\omega \times (T_1, T)).$$

为了通过在  $\omega \times (T_1, T)$  中的  $u$  观测数据恢复空间依赖源  $f$ , 我们采用如下 Levenberg-Marquardt 方法。首先, 我们考虑以下最小化问题。取初始猜测  $f^0$  并假设第  $k$  步逼近  $f^k$  已经获得。然后我们应该通过求解最小化问题

$$f^{k+1} = \arg \min \left\{ \frac{1}{2} \left\| \mathcal{F}(f^k) - u^\delta + \mathcal{F}'(f - f^k) \right\|_{L^2(\omega \times (T_1, T))}^2 + \frac{\rho_{k+1}}{2} \left\| f - f^k \right\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)}^2 \right\}, \quad (4.1)$$

来找到第  $(k+1)$  步的近似值  $f^{k+1}$ , 其中  $\rho_{k+1} > 0$  是第  $(k+1)$  步的正则化参数, 而  $\mathcal{F}'$  表示  $\mathcal{F}$  对  $f$  在点  $f^k$  处的 Fréchet 导数。此外,  $u^\delta$  是满足

$$\left\| u(\cdot, \cdot; f_{\text{true}}) - u^\delta \right\|_{L^2(\omega \times (T_1, T))} \leq \delta,$$

的噪声数据, 其中  $f_{\text{true}} \in L^2(\Omega)$  和  $\delta > 0$  分别代表真实解和噪声水平。

在以下内容中, 我们使用有限维逼近算法来求解最小化问题 (4.1)。假设  $\{\chi_n \mid n = 1, 2, \dots\}$  是  $L^2(\Omega \setminus \omega)$  中一组适当的基础函数。设

$$f^{k+1}(x) \approx \sum_{n=1}^N a_n^{k+1} \chi_n(x) \quad \text{and} \quad f^k(x) \approx \sum_{n=1}^N a_n^k \chi_n(x),$$

其中  $N \in \mathbb{N}$  和  $a_n^{k+1}, a_n^k$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) 是展开系数。我们设

$$\Phi^N = \text{span} \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N\}$$

和两个向量  $\mathbf{a}^{k+1} = (a_1^{k+1}, \dots, a_N^{k+1})$ ,  $\mathbf{a}^k = (a_1^k, \dots, a_N^k) \in \mathbb{R}^N$ 。我们将近似值  $f^{k+1}, f^k \in \Phi^N$  分别与向量  $\mathbf{a}^{k+1}, \mathbf{a}^k \in \mathbb{R}^N$  对应。

接下来, 我们给出一个用于确定  $f$  的逆算法。基于上述讨论, 求解问题 (4.1) 可以转化为求解以下最小化问题:

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \left\| u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k) - u^\delta + \nabla_{\mathbf{a}^k} u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k)(\mathbf{a} - \mathbf{a}^k)^T \right\|_{L^2(\omega \times (T_1, T))}^2 + \frac{\rho_{k+1}}{2} \left\| f - f^k \right\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)}^2 \right\}, \quad (4.2)$$

其中

$$\nabla_{\mathbf{a}^k} u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k) = \left( \frac{\partial}{\partial a_1^k} u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k), \dots, \frac{\partial}{\partial a_N^k} u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k) \right).$$

我们用一个适当选择的数值微分步长  $\tau$  来近似

$$\frac{\partial}{\partial a_n^k} u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k) \approx \frac{u(\cdot, \cdot; a_1^k, \dots, a_n^k + \tau, \dots, a_N^k) - u(\cdot, \cdot; a_1^k, \dots, a_n^k, \dots, a_N^k)}{\tau}$$

。

(4.2) 的极小化点简单记为  $\mathbf{a}^{k+1}$ ，我们写成

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k + \delta \mathbf{a}^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

其中  $\delta \mathbf{a}^k = (\delta a_1^k, \dots, \delta a_N^k)$  被称为  $\mathbf{a}^k$  的一个扰动。因此，为了得到  $\mathbf{a}^{k+1}$ ，只需要计算一个最优扰动  $\delta \mathbf{a}^k$ 。然后问题 (4.2) 变为

$$\min_{\delta \mathbf{a}^k \in \mathbb{R}^N} \left\{ \left\| \nabla_{\mathbf{a}^k} u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k) (\delta \mathbf{a}^k)^T - (u^\delta - u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k)) \right\|_{L^2(\omega \times (T_1, T))}^2 + \delta \mathbf{a}^k A^k (\delta \mathbf{a}^k)^T \right\}, \quad (4.4)$$

其中  $A^k = \text{diag}(\rho_{k+1}((\chi_i, \chi_j)_{L^2(\Omega \setminus \omega)}))_{N \times N}$ 。令

$$Q^k = \left( \left( \frac{\partial}{\partial a_i^k} u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k), \frac{\partial}{\partial a_j^k} u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k) \right)_{L^2(\omega \times (T_1, T))} \right)_{N \times N}$$

和

$$W^k = \left( \left( u^\delta - u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k), \frac{\partial}{\partial a_i^k} u(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^k) \right)_{L^2(\omega \times (T_1, T))} \right)_{N \times 1}.$$

我们很容易验证，最小化 (4.4) 等价于求解下列正规方程

$$(Q^k + A^k) (\delta \mathbf{a}^k)^T = W^k.$$

然后通过迭代过程 (4.3)，只要达到给定的迭代次数，就可以得到最优近似解。

## 5 数值实验

在本节中，我们的目标是通过从  $\omega \times (T_1, T)$  测量的噪声观测数据  $u^\delta$  中数值恢复源项  $\Omega \setminus \omega$  中的未知空间分量  $f(x)$ 。噪声数据是通过向无噪声数据添加随机扰动生成的，即，

$$u^\delta(x, t) = u(x, t; f_{\text{true}}) + \epsilon u(x, t; f_{\text{true}}) (2 \text{rand}(-1, 1) - 1), \quad (x, t) \in \omega \times (T_1, T),$$

其中  $\text{rand}(-1, 1)$  表示在  $(-1, 1)$  中均匀分布的随机数。相应的噪声水平通过  $\delta = \|u^\delta - u(\cdot, \cdot; f_{\text{true}})\|_{L^2(\omega \times (T_1, T))}$  计算，其中我们回忆一下  $\omega$  是  $\Omega$  的一个非空子域。为了评估数值解的准确性，我们计算由

$$\text{err} = \frac{\|f_K - f_{\text{true}}\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)}}{\|f_{\text{true}}\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)}}$$

定义的相对误差迭代次数为  $K$ ，其中  $f_K$  被视为 Levenberg-Marquardt 方法生成的重建解。

残差  $E_k$  在第  $k$  次迭代中由以下给出

$$E_k = \left\| u(\cdot, \cdot; f^k) - u^\delta \right\|_{L^2(\omega \times (T_1, T))}.$$

关于停止准则，在本研究中我们使用著名的不一致原理，即选择满足下列不等式的  $K$

$$E_K \leq \eta \delta < E_{K-1},$$

其中  $\eta > 1$  是通常凭经验取为 1.01 的常数。如果噪声水平为 0，则我们在以下示例中取  $K = 40$ 。正则化参数  $\rho_k$  在第  $k$  步的选择基于其由下列公式给出的性质

$$\rho_k = \frac{1}{1 + \exp(\gamma_0(k - k_0))},$$

其中  $k_0, \gamma_0 > 0$  是预先选择的一些调整参数。

在数值示例中，我们简单地设置  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\mathcal{A} = -\partial_x^2$ ,  $T = 1$  并选择调参参数为  $\gamma_0 = 0.8$  和  $k_0 = 4$ 。我们分别选择初始猜测和观测子域为  $f_0 \equiv 0$  和  $\omega = (0, 0.06)$ 。对于观测的起始时间  $T_1$ ，我们将改变其值以观察其对数值性能的影响。无噪声数据  $u(x, t; f_{\text{true}})$  是通过数值求解直接问题 (1.1) 在  $\omega \times (T_1, T)$  中获得的。

我们测试了以下两种真实解的选择：

$$f_{\text{true}}^1(x) = x^4 + x \sin(\pi x), \quad f_{\text{true}}^2(x) = e^{-\pi x^2} + \cos(2\pi x).$$

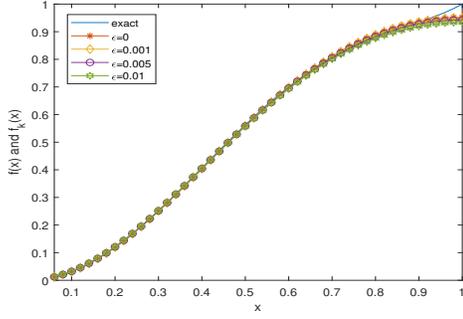
源项在  $\Omega \setminus \omega$  中不同噪声水平下的重建结果如图 1-2 所示。我们可以观察到，当  $T_1$  增加时，我们的算法表现更差。这一结果无疑符合我们的预期，因为可用信息的减少使得算法的反演更加困难。我们可以从图 1-2 和表 1-2 中看到，数值结果与真解在无噪声数据中添加的 1% 噪声的情况下相当吻合，对于  $\alpha$  和  $\beta$  的不同选择也是如此。最后，基于对数值结果的分析，我们验证了理论的有效性和算法的稳定性。

表 1: 不同噪声水平下  $f_{\text{true}}^1$  的相对误差。

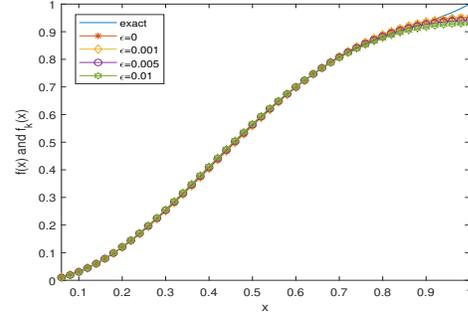
$\epsilon$	(a)	(b)	(c)	(d)
0	0.0153	0.0153	0.0154	0.0154
0.001	0.0157	0.0158	0.0155	0.0165
0.005	0.0184	0.0191	0.0159	0.0247
0.01	0.0237	0.0254	0.0167	0.0384

## 6 结论

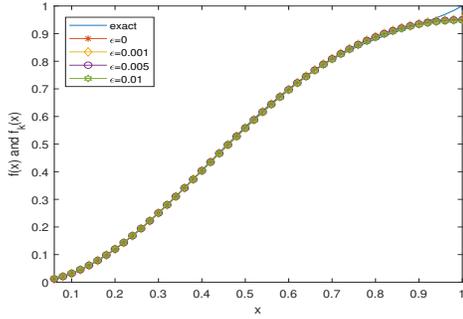
我们从后验内部测量中恢复时空分数阶扩散方程中的空间依赖源项。通过利用分数阶导数的记忆效应、唯一连续性性质和 Duhamel 原理，建立了相应反问题的唯一性。我们使用 Levenberg-Marquardt 方法来求解该反问题。最后，数值结果验证了所提出理论的正确性。



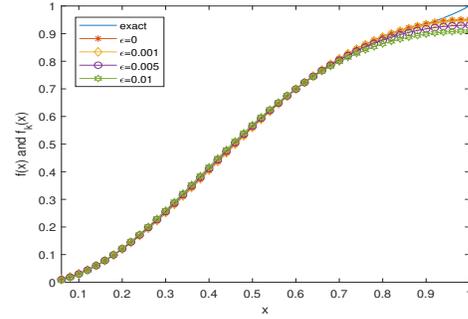
(a)  $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.7), T_1 = 0.1$ .



(b)  $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.7), T_1 = 0.3$ .



(c)  $(\alpha, \beta) = (0.6, 0.8), T_1 = 0.1$ .



(d)  $(\alpha, \beta) = (0.6, 0.8), T_1 = 0.3$ .

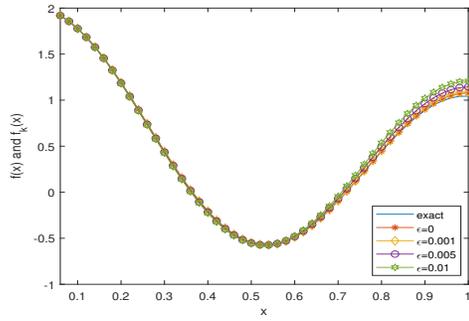
图 1: 源项  $f_{\text{true}}^1$  在  $\Omega \setminus \omega$  中的各种噪声水平下的重构。

表 2: 不同噪声水平下  $f_{\text{true}}^2$  的相对误差。

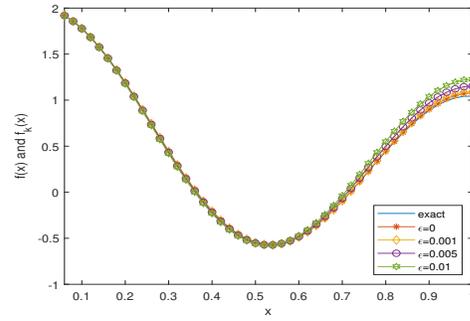
$\epsilon$	(a)	(b)	(c)	(d)
0	0.0103	0.0103	0.0102	0.0102
0.001	0.0163	0.0172	0.0125	0.0136
0.005	0.0430	0.0477	0.0227	0.0289
0.01	0.0773	0.0868	0.0362	0.0488

## 致谢

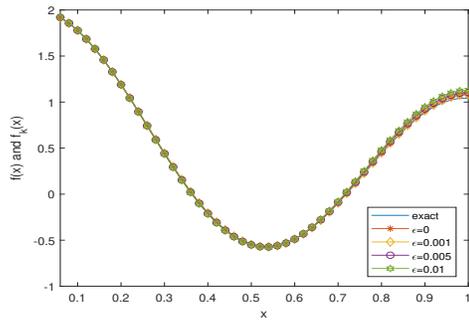
第二作者得到了国家自然科学基金 (编号! 12271277) 和宁波市青年领军人才项目 (编号! 2024QL045) 的支持。第三作者得到了 JSPS KAKENHI 资助号 JP22K13954, JP23KK0049 以及广东省基础与应用基础研究基金 (编号! 2025A1515012248) 的支持。这项工作部分得到教育部重点实验室非线性分析及应用 (华中师范大学) 开放研究基金的支持。



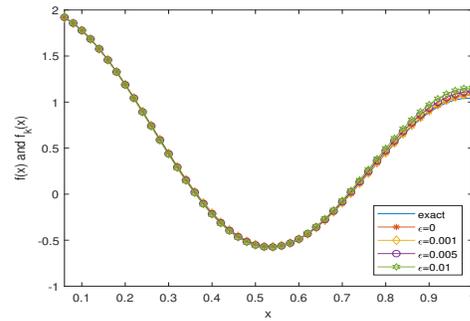
(a)  $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.7), T_1 = 0.1$ .



(b)  $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.7), T_1 = 0.3$ .



(c)  $(\alpha, \beta) = (0.6, 0.8), T_1 = 0.1$ .



(d)  $(\alpha, \beta) = (0.6, 0.8), T_1 = 0.3$ .

图 2: 源项  $f_{\text{true}}^2$  在  $\Omega \setminus \omega$  中具有各种噪声水平的重建。

## 参考文献

- [1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] S. Djennadi, N. Shawagfeh, O.A. Arqub, A fractional Tikhonov regularization method for an inverse backward and source problems in the time-space fractional diffusion equations, *Chaos Solitons Fractals*, **150**, 2021, 111127.
- [3] N.V. Duc, N.V. Thang, N.T. Thành, The quasi-reversibility method for an inverse source problem for time-space fractional parabolic equations, *J. Differential Equations*, **344**, 2023, 102–130.
- [4] R. Gorenflo, Y. Luchko, M. Yamamoto, Time-fractional diffusion equation in the fractional Sobolev spaces, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **18**(3), 2015, 799–820.
- [5] J. Janno, Determination of time-dependent sources and parameters of nonlocal diffusion and wave equations from final data, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **23**(6), 2020, 1678–1701.

- [6] J. Janno, Y. Kian, Inverse source problem with a posteriori boundary measurement for fractional diffusion equations, *Math. Methods Appl. Sci.*, **46**(14), 2023, 15868–15882.
- [7] J. Jia, J. Peng, J. Yang, Harnack’s inequality for a space-time fractional diffusion equation and applications to an inverse source problem, *J. Differential Equations*, **262**(8), 2017, 4415–4450.
- [8] Y. Kian, Simultaneous determination of different class of parameters for a diffusion equation from a single measurement, *Inverse Problems*, **38**(7), 2022, 075008.
- [9] Y. Kian, Y. Liu, M. Yamamoto, Uniqueness of inverse source problems for general evolution equations, *Commun. Contemp. Math.*, **25**(6), 2023, 2250009.
- [10] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [11] N. Kinash, J. Janno, An inverse problem for a generalized fractional derivative with an application in reconstruction of time-and space-dependent sources in fractional diffusion and wave equations, *Mathematics*, **7**(12), 2019, 1138.
- [12] A. Kubica, K. Ryszewska, M. Yamamoto, Time-Fractional Differential Equations: A Theoretical Introduction, Springer, Singapore, 2020.
- [13] Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients, *Appl. Math. Comput.*, **257**, 2015, 381–397.
- [14] J. Li, G. Tong, R. Duan, S. Qin, Tikhonov regularization method of an inverse space-dependent source problem for a time-space fractional diffusion equation, *J. Appl. Anal. Comput.*, **11**(5), 2021, 2387–2401.
- [15] Y.S. Li, T. Wei, An inverse time-dependent source problem for a time-space fractional diffusion equation, *Appl. Math. Comput.*, **336**, 2018, 257–271.
- [16] Y. Liu, W. Rundell, M. Yamamoto, Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **19**(4), 2016, 888–906.
- [17] D. Nie, W. Deng, An inverse random source problem for the time-space fractional diffusion equation driven by fractional Brownian motion, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **31**(5), 2023, 723–738.
- [18] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

- [19] K. Sakamoto, M. Yamamoto, Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **382**, 2011, 426–447.
- [20] S. Tatar, R. Tinaztepe, S. Ulusoy, Determination of an unknown source term in a space-time fractional diffusion equation, *J. Fract. Calc. Appl.*, **6**(1), 2015, 83–90.
- [21] S. Tatar, R. Tinaztepe, S. Ulusoy, Simultaneous inversion for the exponents of the fractional time and space derivatives in the space-time fractional diffusion equation, *Appl. Anal.*, **95**(1), 2016, 1–23.
- [22] S. Tatar, S. Ulusoy, An inverse source problem for a one-dimensional space-time fractional diffusion equation, *Appl. Anal.*, **94**(11), 2015, 2233–2244.
- [23] E.C. Titchmarsh, The zeros of certain integral functions, *Proc. London Math. Soc.*, **2**(1), 1926, 283–302
- [24] Y. X. Zhang, J. Jia, L. Yan, Bayesian approach to a nonlinear inverse problem for a time-space fractional diffusion equation, *Inverse Problems*, **34**(12), 2018, 125002.