

# 束缚态在五次本质替代理论中的形成

George Koutsoumbas,<sup>1,\*</sup> Andri Machattou,<sup>1,†</sup> and Eleftherios Papantonopoulos<sup>1,‡</sup>

<sup>1</sup>Physics Division, School of Applied Mathematical and Physical Sciences,  
National Technical University of Athens, 15780 Zografou Campus, Athens, Greece.

(10Dated: 2025 年 6 月 28 日)

我们研究了在存在五次元物质的情况下，黑洞视界外形成的束缚态的形成和行为。通过计算一般度量函数的 Regge 和 Wheeler 势，我们发现五次元物质显著影响度量函数和霍金温度。我们表明，在存在大量五次元物质的情况下，大黑洞辐射较少，并且似乎寿命更长，而小黑洞则辐射更多。

## Contents

I. 介绍	2
II. 广义 Regge-Wheeler 势	3
III. quintessence 物质及其热力学	4
A. quintessence 的描述	5
B. 反德西特时空中的热力学	5
IV. Regge-Wheeler 势	7
V. 束缚态的形成	8
VI. 结论	10
References	10

arxiv:2506.21097v1 中译本

\*Electronic address: kutsbas@central.ntua.gr

†Electronic address: andrimachattou@hotmail.com

‡Electronic address: lpapa@central.ntua.gr

## I. 介绍

黑洞周围的粒子束缚态是一种非常有趣的现象，在 [1] 中进行了详细研究。类似的研究可以通过对 QNMs 的调查来完成。在这两种情况下，目标都是找到在黑洞背景中传播的标量场的特征复频率。标量场必须满足的约束是在黑洞视界和空间无穷远处的边界条件。然而，束缚态和准正常模式的物理意义非常不同，并且对应于不同的能量范围。在 [1] 中，对被困在有限黑洞势垒与作为防止粒子到达无穷远屏障的无限厚井之间的量子进行了系统研究。这些束缚态可能与原初功率谱 [2, 3] 有潜在的宇宙学关联。此外，这些束缚态及其光谱的现象学应该进行详细研究，并且与轻黑洞相关的实验也应该考虑到这些状态。

研究黑洞稳定性的基本工具之一是研究 Regge 和 Wheeler 势。Regge 和 Wheeler [4] 首次描述了在球对称背景几何上扰动的张量谐波分解，并用这些谐波表示扰动方程。他们发现，可以将波动运动的方程转化为一个具有有效势能的单个二阶 Schrodinger 型微分方程的形式。然后研究这些方程可以为我们提供关于黑洞稳定性的关键信息。Regge 和 Wheeler 首先研究的是 Schwarzschild 度规。

量子束缚态在伽利略黑洞附近的形成和传播在 [6] 中进行了讨论。伽利略黑洞是由与曲率 [7-9] 相耦合的标量场产生的，它们是球对称的有毛黑洞。经典上已经广泛研究了这种耦合；它强烈影响了标量场相对于最小耦合到引力的标量场的传播。还研究了背景伽利略黑洞的稳定性，并发现束缚态被陷阱在雷吉-惠勒势阱中或穿透伽利略黑洞视界，这取决于标量场对曲率的导数耦合强度。量子束缚态的形成需要克莱因-戈登方程在一个黑洞背景下表现出包含局部阱的径向势能，对于给定范围内的黑洞参数。

最近的天文观测表明，我们的宇宙正在以加速的速度膨胀 [10, 11]。负责这种膨胀的是我们宇宙中的暗区段，主要由暗能量构成，而宇宙常数的存在无法解释这一膨胀现象 [12, 13]。宇宙中大约 70% 的能量密度是以一种奇异的、负压成分的形式存在的，被称为暗能量。关于暗能量特性的观测界限一直在收紧。将  $w$  设为暗能量的压强与密度之比  $w = p_{DE}/\rho_{DE}$ ，最近的观测限制了  $-1 \leq w \leq -\frac{1}{3}$  的范围，这导致了加速。不寻常五次元的边界情况  $w = -1$  包含了宇宙常数项。正如 [14-16] 所认识到的那样，加速对于量子引力的一致理论是一个挑战，因为外视界不允许用渐近过去和未来状态来引入可观测 S 矩阵。德西特空间的外部视界与黑洞的内部视界显著不同，后者在远离黑洞的地方具有渐近平坦的空间。

夸克本质场的存在用来解释宇宙膨胀，这修改了广义相对论，并提出了新的修正引力理论，这些理论中存在动态标量场 [17]。在这些理论中，在夸克本质物质场存在的条件下找到了黑洞解。第一个在夸克本质存在条件下的黑洞解是在 [18] 中讨论的。提出了爱因斯坦方程的新静态球面对称精确解，其中包含围绕带电或不带电黑洞的夸克本质物质。发现了一个能量动量张量中的可加性和线性条件，这允许获得已知电磁静态场解的正确极限。进一步的研究在夸克本质物质存在的情况下进行，并获得了新的黑洞解，讨论了夸克本质场对其热力学量、阴影和拟常态模式的影响 [19]-[26]。暗物质和夸克本质场在黑洞视界之外的存在会影响它们的热力学性质，例如温度，并引入新的临界现象。这些修改可能导致经典热力学结果的一般化，使这一研究领域非常有趣，并建立了黑洞事件视界与其熵之间的联系 [27, 28]。

本工作的目的是研究在由拟本质物质形成的有毛黑洞视界外形成的束缚态的形成和行为。然后，通过考虑度量函数的一般形式，我们推导出了一个包含 Regge 和 Wheeler 势的薛定谔方程。同时考虑到解的热力学性质，我们讨论了对于拟本质参数  $w$  的不同取值下束缚态的形成和行为。

该工作组织如下。在第 II 节中，我们回顾了相当一般度量函数的 Regge-Wheeler 势。在第 III 节中引入了 quintessence，并描述了一些其热力学方面的内容。第 IV 节处理标量激发的 Regge-Wheeler 势，而在第 V 节中计算了质量本征态。第 VI 节包含我们的结论。

## II. 广义 REGGE-WHEELER 势

在本节中，我们将考虑一个相当一般的度量，并将计算 Regge-Wheeler 势，按照 [5]。我们考虑度量：

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + H(r)d\Omega^2. \quad (1)$$

然后自旋为  $s$  的粒子满足方程：

$$\begin{aligned} & -\frac{H}{G}\partial_{tt}\Psi_s(t, r, \theta, \phi) + s\sqrt{\frac{F}{G}}\left(H\frac{G'}{G} - H'\right)\partial_t\Psi_s(t, r, \theta, \phi) + FH\partial_{rr}\Psi_s(t, r, \theta, \phi) \\ & + \left(\frac{F'H}{2} + \left(s + \frac{1}{2}\right)\frac{FG'H}{G} + (s+1)FH'\right)\partial_r\Psi_s(t, r, \theta, \phi) \\ & + \left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{2is\cot\theta}{\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\phi\phi} - s - s^2\cot^2\theta\right]\Psi_s(t, r, \theta, \phi) \\ & + \left[s\frac{FG''H}{G} + \frac{3s-2s^2}{2}FH'' - \frac{sFG'^2H}{2G^2} + \frac{2s^2-sFH'^2}{4H} + \frac{sF'G'H}{2G}\right. \\ & \left. + \frac{3s-2s^2}{2}F'H' + \frac{2s^2+5sFG'H'}{4G}\right]\Psi_s(t, r, \theta, \phi) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

我们将各种场分解成径向、球面和时间部分，使用试探函数

$$\Psi_s(t, r, \theta, \phi) = R_s(r)\mathcal{Y}_{lm}^s(\theta, \phi)e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

其中  $\mathcal{Y}_{lm}^s(\theta, \phi)$  是具有自旋  $s$  的广义球谐函数，它们满足方程

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{2is\cot\theta}{\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\phi\phi} - s - s^2\cot^2\theta + \lambda_l^s\right]\mathcal{Y}_{lm}^s(\theta, \phi) = 0, \quad \lambda_l^s = l(l+1) - s(s+1). \quad (4)$$

波函数的径向部分将满足：

$$A_s(B_s R_s')' + \left(\frac{\omega^2 H}{G} + i\omega s\sqrt{\frac{F}{G}}\left(H\frac{G'}{G} - H'\right) + C_s\right)R_s = 0, \quad A_s = \sqrt{\frac{F}{G}}\frac{1}{(GH)^s}, \quad B_s = H\sqrt{FG}(GH)^s, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_s = & s\frac{FG''H}{G} + \frac{3s-2s^2}{2}FH'' - \frac{sFG'^2H}{2G^2} \\ & + \frac{2s^2-sFH'^2}{4H} + \frac{sF'G'H}{2G} + \frac{3s-2s^2}{2}F'H' + \frac{2s^2+5sFG'H'}{4G} - \lambda_l^s - 2s. \end{aligned} \quad (6)$$

我们将定义

$$R_s \equiv \frac{u_s}{\sqrt{H}},$$

然后方程的径向部分变为：

$$\begin{aligned} A_s(B_s R_s')' = & \frac{\sqrt{H}}{G}\left[FGu_s'' + \frac{1}{2}\frac{(FG)'u_s'}{G}\right] \\ & + \frac{1}{4}\left[\frac{FH'^2}{H} - F'H' - \frac{FG'H'}{G} - 2FH''\right]\frac{u_s}{\sqrt{H}}. \end{aligned} \quad (7)$$

使用乌龟坐标

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{\sqrt{FG}}\frac{d}{dr_*}, \quad (8)$$

我们得到

$$\frac{du_s}{dr} = \frac{1}{\sqrt{FG}} \frac{du_s}{dr_*}, \quad \frac{d^2u_s}{dr^2} = \frac{1}{FG} \frac{d^2u_s}{dr_*^2} - \frac{(FG)'}{2(FG)^{3/2}} \frac{du_s}{dr_*}, \quad (9)$$

使得

$$A_s(B_s R_s')' = \frac{\sqrt{H}}{G} \frac{d^2u_s}{dr_*^2} + \frac{1}{4} \left[ \frac{FH'^2}{H} - F'H' - \frac{FG'H'}{G} - 2FH'' \right] \frac{u_s}{\sqrt{H}}, \quad (10)$$

从而径向方程呈现出类似薛定谔方程的形式。

$$-\frac{d^2u_s}{dr_*^2} + V_s u_s = \omega^2 u_s, \quad (11)$$

其中, 对于  $s = 0, 1, 2, \frac{1}{2}$  的势能为

$$V_0 = \nu_l^0 \frac{G}{H} + \frac{1}{\sqrt{H}} \frac{d^2}{dr_*^2} \sqrt{H} = \nu_l^0 \frac{G}{H} + \frac{1}{\sqrt{H}} \left[ FG \frac{d^2 \sqrt{H}}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d(FG)}{dr} \frac{d\sqrt{H}}{dr} \right], \quad (12)$$

$$V_1 = \nu_l^1 \frac{G}{H}, \quad (13)$$

$$V_2 = \nu_l^2 \frac{G}{H} + \frac{1}{2H^2} \left( \frac{dH}{dr_*} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{H}} \frac{d^2}{dr_*^2} \sqrt{H} = \nu_l^2 \frac{G}{H} + \frac{FG}{2H^2} \left( \frac{dH}{dr} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{H}} \left[ FG \frac{d^2 \sqrt{H}}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d(FG)}{dr} \frac{d\sqrt{H}}{dr} \right], \quad (14)$$

$$V_{\frac{1}{2}} = \nu_l^{1/2} \frac{G}{H} \pm \sqrt{\nu_l^{1/2}} \frac{d}{dr_*} \sqrt{\frac{G}{H}} = \nu_l^{1/2} \frac{G}{H} \pm \sqrt{\nu_l^{1/2} FG} \frac{d}{dr} \sqrt{\frac{G}{H}}, \quad \nu_l^s = l(l+1) - s(s-1). \quad (15)$$

在这种情况下, ( $F=G=f, H=r^2$ ) 以度量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (16)$$

势能变为

$$V_0 = f \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{f'}{r} \right], \quad V_1 = l(l+1) \frac{f}{r^2}, \quad V_2 = f \left[ \frac{l(l+1)-2}{r^2} - \frac{2f}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right], \quad (17)$$

$$V_{\frac{1}{2}} = f \left[ \frac{l(l+1) + \frac{1}{4}}{r^2} \pm \sqrt{l(l+1) + \frac{1}{4}} \frac{d}{dr} \sqrt{\frac{f}{r^2}} \right]. \quad (18)$$

如我们所见, 自旋改变了 Regge-Wheeler 势的结构。在这项工作中我们集中研究了  $s = 0$  情况。

### III. QUINTESSENCE 物质及其热力学

在本节中, 我们将介绍黑洞视界之外的五元物质, 并研究耦合系统的热力学以及束缚态的形成。

### A. quintessence 的描述

正如我们已经讨论过的，五次元本质是一种标量场，其状态方程参数  $w$  定义为其压力  $p$  与其能量密度  $\rho$  的比值，后者由动能项和势能项给出为

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad -1 \leq w \leq -\frac{1}{3}. \quad (19)$$

存在五次元时的能量-动量张量由 [18] 给出：

$$T_t^t = \rho, \quad T_k^l = 3w\rho \left[ -(1+3B)\frac{r_k r^l}{r^2} + B\delta_k^l \right], \quad B = -\frac{1+3w}{6w}. \quad (20)$$

在考虑角度平均，并注意到  $\langle r_k r^l \rangle = \frac{1}{3}r^2\delta_k^l$ ，后得到

$$\langle T_k^l \rangle = -p\delta_k^l. \quad (21)$$

将线元素写为形式：

$$ds^2 = (1+h)dt^2 - \frac{dr^2}{1+h} - r^2 d\Omega^2 = f dt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2 d\Omega^2, \quad f \equiv 1+h, \quad (22)$$

爱因斯坦方程读作：

$$T_t^t = -\frac{1}{2r^2}(h + rh') = \rho, \quad T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{1}{4r}(2h' + rh'') = -\frac{1}{2}\rho(3w+1). \quad (23)$$

存在两种解，众所周知的史瓦西解  $h = -\frac{2M}{r}$  和一种新颖的解

$$h = \frac{a}{r^{1+3w}}. \quad (24)$$

爱因斯坦方程给出：

$$\rho = \frac{a}{2} \frac{3w}{r^{3(w+1)}}, \quad R = 3aw \frac{1-3w}{r^{3(1+w)}}. \quad (25)$$

注意  $R$  在  $r \rightarrow 0$  处是奇异的，除非  $w = 0, \frac{1}{3}, -1$ 。加法性和线性给出了度量的最终解： $f = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{a}{r^{1+3w}}$ 。推广的雷斯纳-诺德斯特罗姆-反 dS 黑洞解为：

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{L^2} - \frac{a}{r^{1+3w}}. \quad (26)$$

如我们所见，在 AdS 空间中的度量函数除了通常的质量和电荷参数外，由于五次元物质的存在还依赖于两个额外的参数  $a$  和  $w$ ，正如我们将讨论的那样，它们在系统热力学和束缚态形成中起着至关重要的作用。

### B. 反德西特时空中的热力学

质量可以用剩余的参数和视界来表示，因为  $f(r_+) = 0$ ：

$$M = \frac{r_+}{2} \left[ 1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{L^2} - \frac{a}{r_+^{1+3w}} \right]. \quad (27)$$

霍金温度由以下公式给出：

$$T = \frac{1}{4\pi} f'(r_+) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2M}{r_+^2} - \frac{2Q^2}{r_+^3} + \frac{2r_+}{L^2} + \frac{a(1+3w)}{r_+^{2+3w}} \right], \quad (28)$$

将质量  $M$  代入后变为:

$$T = \frac{\frac{3r_+}{L^2} - \frac{Q^2}{r_+^3} + \frac{1}{r_+^2}(r_+ + 3awr_+^{-3w})}{4\pi}, \quad (29)$$

而熵由以下给出

$$S = \int \frac{dM}{T} = \frac{A}{4} = \pi r_+^2. \quad (30)$$

在接下来的内容中, 我们将研究上述量如何受到五次元参数  $a$  和  $w$  的影响 我们设定  $L = 1$ .

在图 1 的左上角面板中, 我们绘制了  $Q = 0.00$ ,  $w = -0.80$  和参数  $a$  各种值的度量函数。在同一图的右上角面板中, 我们绘制了  $Q = 0.00$ ,  $a = 0.80$  和参数  $w$  各种值的度量函数。在左下角面板中, 我们绘制了  $Q = 0.20$ ,  $w = -0.80$  和参数  $a$  各种值的度量函数。最后, 在右下方的面板中, 我们绘制了  $Q = 0.20$ ,  $a = 0.80$  的度量函数以及  $w$  参数的各种值。如我们可以见到的那样, 黑洞中存在非零电荷  $Q$  倾向于减少度量函数的值。相对于  $Q = 0.00$  情况而言, 这些图形的定性特征变化不大。

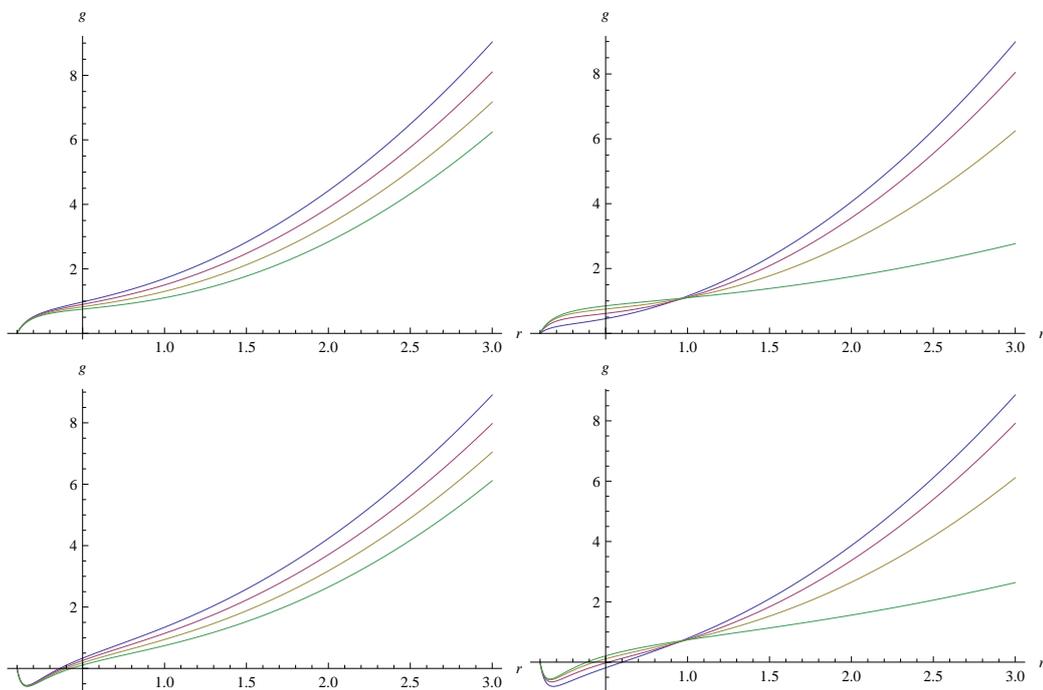


图 1: (a) 度量函数  $g \equiv f(r)$  对比  $r$ , 对于  $Q = 0.00$ ,  $w = -0.80$  和  $a = 0.20$ , (蓝色曲线)  $a = 0.40$  (紫色曲线)  $a = 0.60$  (棕色曲线) 以及  $a = 0.80$  (青色曲线)。(b) 度量函数  $g \equiv f(r)$  对比  $r$  对于  $Q = 0.00$ ,  $a = 0.80$  和  $w = -0.40$ , (蓝色曲线)  $w = -0.60$  (紫色曲线)  $w = -0.80$  (棕色曲线) 和  $w = -1.00$  (青色曲线)。(c) 度量函数  $g \equiv f(r)$  对比  $r$  对于  $Q = 0.20$ ,  $w = -0.80$  和  $a = 0.20$ , (蓝色曲线)  $a = 0.40$  (紫色曲线)  $a = 0.60$  (棕色曲线) 和  $a = 0.80$  (青色曲线)。(d) 度量函数  $g \equiv f(r)$  对比  $r$  对于  $Q = 0.20$ ,  $a = 0.80$  和  $w = -0.40$ , (蓝色曲线)  $w = -0.60$  (紫色曲线)  $w = -0.80$  (棕色曲线) 和  $w = -1.00$  (青色曲线)。

在图 2 的左上角面板中, 我们绘制了温度与  $r_+$  的关系图, 对于  $Q = 0.00$ ,  $w = -0.80$  和参数  $a$  的不同值。在同一图的右上角面板中, 我们绘制了温度与  $r_+$  的关系图, 对于  $Q = 0.00$ ,  $a = 0.80$  和参数  $w$  的不同值。在左下方的面板中, 我们绘制了温度与  $r_+$  的关系图, 针对  $Q = 0.20$ ,  $w = -0.80$  以及参数  $a$  的不同值。最后, 在右下方的面板中, 我们绘制了温度与  $r_+$  的关系图, 针对  $Q = 0.20$ ,  $a = 0.80$  以及参数  $w$  的不同值。我们可以看到, 黑洞中存在的非零电荷  $Q$  倾向于减小度量函数的值。

温度对  $a$  的依赖是单调的，使得随着  $a$  增加而变小。这一特性在  $Q = 0.20$  时不复存在，这一点可以从图的左面板中明显看出。

$w$  的依赖关系不太简单：对于较大的  $r_+$ ，它较小，而对于适度的  $r_+$ ，它较大。对于某个视界大小下的  $Q = 0.00$ ，温度有一个最小值。黑洞的温度随着  $|w|$  从  $\frac{1}{3}$  增加到 1 而减小，对于足够大的黑洞（大  $r_+$ ），而对较小的  $r_+$  来说则增大。因此，当  $|w|$  较大时，大黑洞辐射较少，而小黑洞辐射较多。因此，对于较大的  $|w|$ ，大黑洞似乎寿命更长。

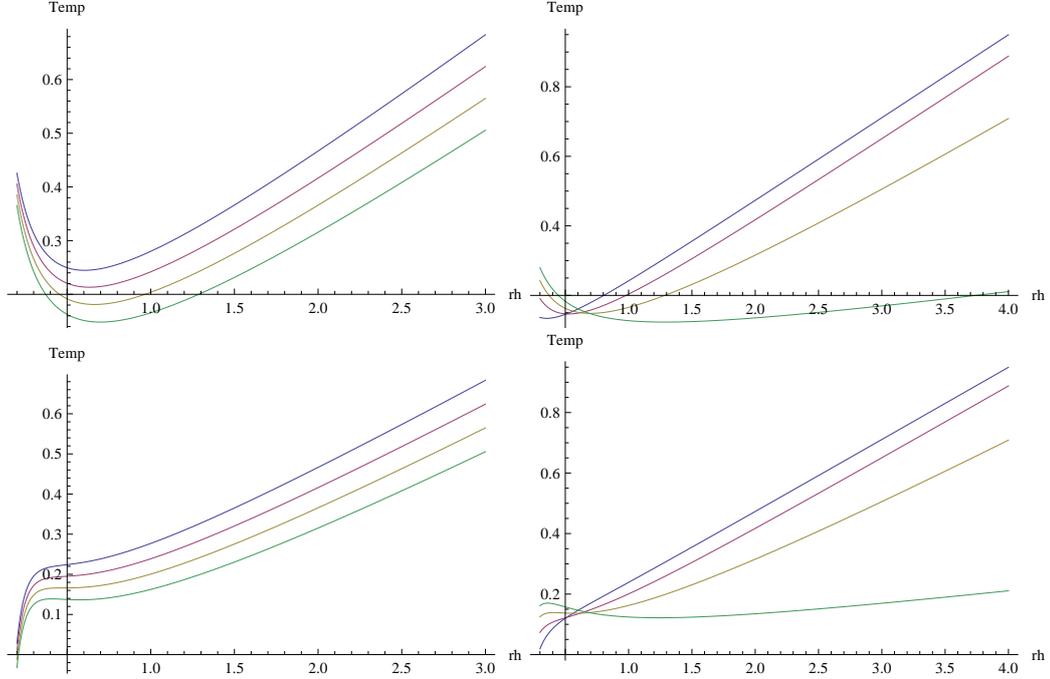


图 2: (a) 温度与  $r_h \equiv r_+$  的关系对于  $Q = 0.00$ ,  $w = -0.80$  和  $a = 0.20$ , (蓝色曲线)  $a = 0.40$  (紫色曲线)  $a = 0.60$  (棕色曲线) 和  $a = 0.80$  (卡其色曲线)。 (b) 温度与  $r_h \equiv r_+$  的关系对于  $Q = 0.00$ ,  $a = 0.80$  和  $w = -0.40$ , (蓝色曲线)  $w = -0.60$  (紫色曲线)  $w = -0.80$  (青色曲线) 和  $w = -1.00$  (青色曲线)。 (c) 温度与  $r_h \equiv r_+$  的关系对于  $Q = 0.00$ ,  $w = -0.80$  和  $a = 0.20$ , (蓝色曲线)  $a = 0.40$  (紫色曲线)  $a = 0.60$  (棕色曲线) 以及  $a = 0.80$  (青色曲线)。 (d) 温度与  $r_h \equiv r_+$  的关系, 对于  $Q = 0.00$ ,  $a = 0.80$  和  $w = -0.40$ , (蓝色曲线)  $w = -0.60$  (紫色曲线)  $w = -0.80$  (棕色曲线) 以及  $w = -1.00$  (青色曲线)。

#### IV. REGGE-WHEELER 势

我们首先考虑带有五次势能的 AdS 时空中的度量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + r^2 - \frac{a}{r^{1+3w}}. \quad (31)$$

我们特别关注标量和引力扰动的势能。零自旋  $V_0$  的标量扰动的势能为

$$V_0 = f(r)g_0(r), \quad g_0(r) = \frac{f'(r)}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} = 2 - \frac{2Q^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{a(1+3w)}{r^{3+3w}}. \quad (32)$$

我们在图 3 的左面板中从 Regge-Wheeler 势开始，当  $a = 0$  时，五次元质完全不起作用；我们设定  $M = 0.05$  并让  $Q$  取值 0.00, 0.04, 0.07 和 0.10。很明显，随着  $Q$  的增加，势的左侧障碍变得较小，并且在  $Q = 0.10$  时完全消失。在这种情况下，很明显势能无法支持束缚态：任何标量激发最终都会进入黑洞视界。这一特性与 quintessence

的作用无关。我们在右侧面板中继续讨论  $a = 0.8$ ,  $w = -0.80$  和  $M = 0.05$  情况, 并且电荷  $Q$  的值与之前相同。图景在定性上是相同的, 但 quintessence 的存在倾向于减小势能的大小。

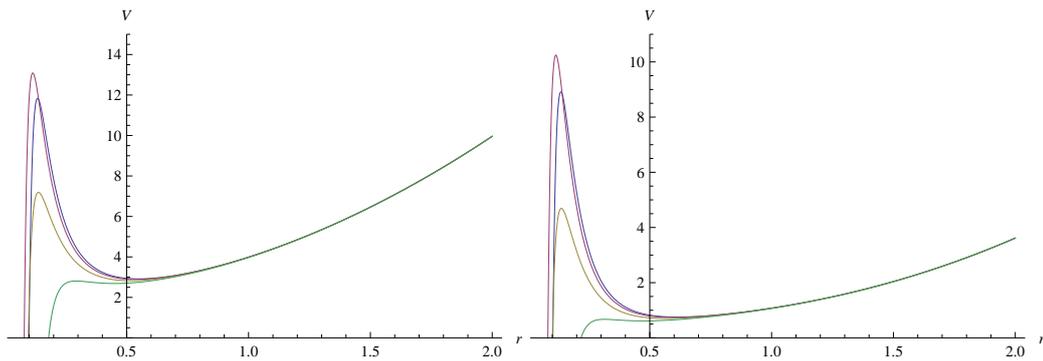


图 3: 左面板:  $a = 0$ ,  $l = 0$ ,  $M = 0.05$  的势能以及电荷的四个值:  $Q = 0.00$  (粉色曲线),  $0.04$  (蓝色曲线),  $0.07$  (卡其色曲线) 和  $0.10$  (绿色曲线)。右面板:  $a = 0.8$ ,  $w = -0.80$ ,  $M = 0.05$  和  $Q = 0.00$  的势 (粉红色曲线),  $0.04$  (蓝色曲线),  $0.07$  (卡其色曲线) 和  $0.10$  (绿色曲线)。

我们在图 4 中对四个不同的  $w$  值进行潜在分析, 具体为  $-0.40$ ,  $-0.60$ ,  $-0.80$ ,  $-1.00$ , 而  $l = 0$ ,  $M = 0.05$ , 对于  $Q = 0.00$  (左面板) 和  $Q = 0.04$  (右面板)。我们观察到, 对于电荷的两个值,  $w = -0.40$  的势能不支持束缚态, 但随着  $|w|$  增加, 左侧障碍逐渐形成, 并且束缚态成为可能。

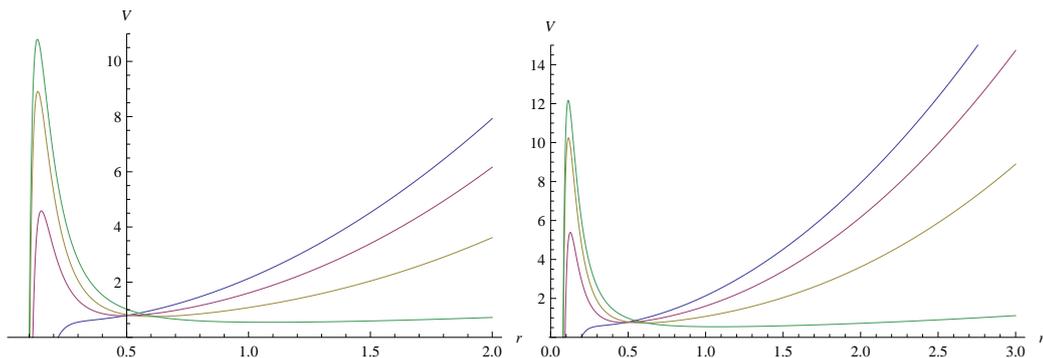


图 4: 左面板: 对于  $a = 0.8$ ,  $l = 0$ ,  $M = 0.05$ ,  $Q = 0.00$ , 和参数  $w$ :  $w = -0.40$  (蓝色曲线)、 $-0.60$  (粉色曲线)、 $-0.80$  (卡其色曲线) 和  $-1.00$  (绿色曲线) 的四种值的势。右面板: 与左面板相同, 但为  $Q = 0.04$ 。

图 5, 左栏, 描绘了  $M = 0.05$ ,  $Q = 0.00$ ,  $w = -0.60$  和  $l = 0, 1, 2$  的势能。这清楚地表明角动量的存在逐渐在左侧构建了一个障碍, 因此可能形成更多的束缚态。另一方面, 在右面板中可以检查  $M = 0.05$ ,  $Q = 0.00$ ,  $l = 0$ ,  $w = -0.60$  和  $a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  的势

## V. 束缚态的形成

我们现在继续计算束缚态的质量, 以及它们的虚部。后者表明这些状态的不稳定性, 因为它们可能会通过左侧的势垒并最终进入视界内。为了找到质量的实部, 我们遵循 [1] 并考虑方程:

$$\int_{r_2}^{r_3} \frac{\sqrt{\omega^2 - V_0}}{f(r)} dr = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, n = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

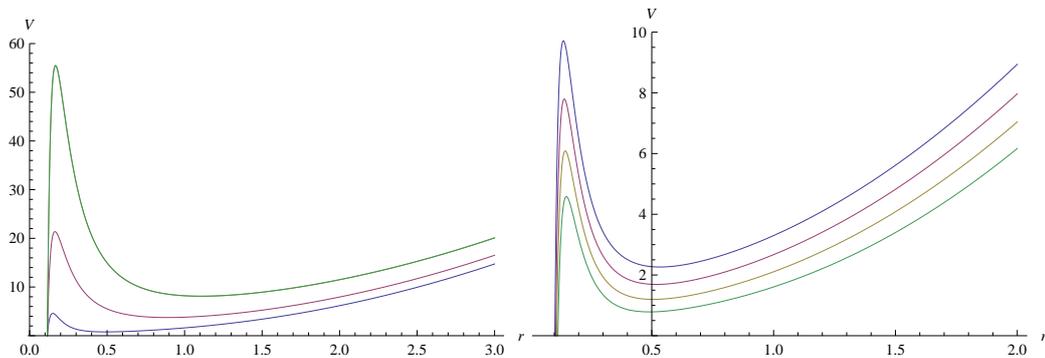


图 5: 左面板: 势能对于  $a = 0.8$ ,  $M = 0.05$ ,  $Q = 0.00$ ,  $w = -0.60$  和三个角动量值:  $l = 0$  (蓝色曲线)、 $l = 1$  (粉红色曲线) 和  $l = 2$  (绿色曲线)。右面板: 势函数为  $l = 0$ ,  $M = 0.05$ ,  $Q = 0.00$ ,  $w = -0.60$  及参数  $a$ :  $a = 0.2$  的四个值 (蓝色曲线)、 $a = 0.4$  (粉色曲线)、 $a = 0.6$  (卡其色曲线) 和  $a = 0.8$  (绿色曲线)。

并且调整  $\omega$ , 使得对于某个整数  $n$ . 方程成立。具有  $n = 0$  的状态是基本质量模态, 而具有  $n = 1, 2, \dots$  的状态是泛音。通常只有少量的泛音存在。我们还考虑了角动量子数  $l$ ; 的各种值, 我们将展示  $l = 0$  和  $l = 1$ . 的结果。

为了确定这些状态的虚部, 将其解释为带宽, 我们固定上一步找到的  $\omega$  的值 (称为  $\tilde{\omega}$ ), 并通过以下方式计算带宽:

$$\gamma = \tilde{\omega} \frac{\exp\left(-2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{V_0 - \tilde{\omega}^2}}{f(r)} dr\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2\pi p^2(r_{max})}{\sqrt{2 \frac{d^2 p^2(r_{max})}{dr^2}}}\right)}. \quad (34)$$

请注意,  $\frac{d}{dr_*} = f(r) \frac{d}{dr}$ , 因此

$$\frac{d^2(p^2)}{dr_*^2} = f^2(r) \frac{d^2(p^2)}{dr^2} + f(r)f'(r) \frac{d(p^2)}{dr}, \quad p^2 = \tilde{\omega}^2 - V_0. \quad (35)$$

请注意,  $r_1$  和  $r_2$  是两条水平线在  $\tilde{\omega}^2$  处与电位  $V_0$ , 相交的两点, 它们距离原点最近, 在  $\tilde{\omega}$  水平线切割电位曲线的位置, 而  $r_3$  是最远的切割点。此外,  $r_{max}$  是势能取得最大值的点。完成这些计算后, 我们得到了质量本征值的形式为  $\tilde{\omega} - i\gamma$ 。

我们现在报告了各种值的  $w$  和  $a$ . 的质量本征值及其带宽。在图 6 的左面板中, 我们描绘了质量对  $w$  的依赖关系, 对于  $Q = 0.00$ ,  $M = 0.05$ ,  $a = 0.8$  和  $l = 0$ . 来说。似乎当  $|w|$  小于某个值 (大约 0.55) 时不存在束缚态, 而带宽 (用误差条表示) 随着我们接近这个值而增加。质量变化不大, 除非接近值  $w = -1$ . 在右侧面板中我们展示了对应于  $Q = 0.00$ ,  $M = 0.05$ ,  $w = -0.6$  和  $l = 0$ . 的结果 质量与  $a$ , 几乎呈线性关系, 而带宽则或多或少保持恒定。

在图 7 的左面板中, 我们描绘了质量对  $w$  的依赖关系, 对于  $Q = 0.00$ ,  $M = 0.05$ ,  $a = 0.8$  和  $l = 1$ .。这个较大的角动量允许较小的  $w$  值有本征值。此外, 带宽小得多, 这是由于左侧因角动量产生的大势垒所致 (参见图 5); 这个势垒不允许粒子轻易进入视界, 因此它们的虚部减小到符号大小的程度。质量比之前更大, 并且与  $w$  的关系在定性上保持不变。在右侧面板中, 我们描绘了对应于  $Q = 0.00$ ,  $M = 0.05$ ,  $w = -0.6$  和  $l = 1$ . 的结果。质量对  $a$ , 的依赖关系再次呈线性。

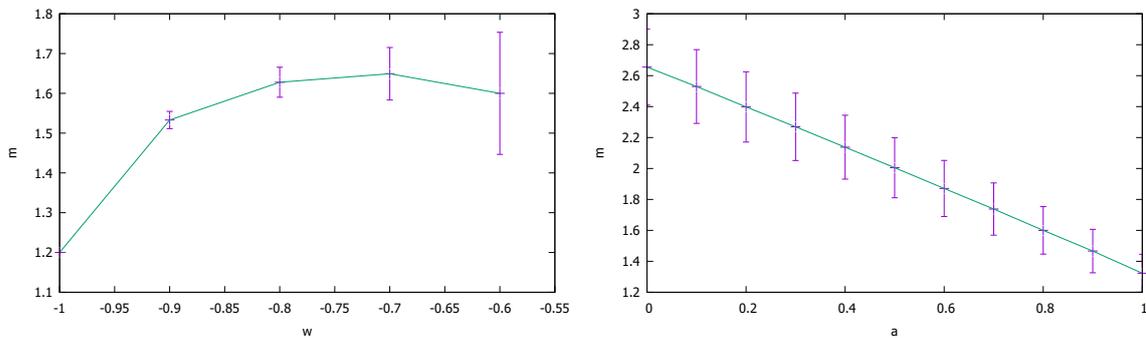


图 6: 左面板: 质量与  $w$  的关系, 对于  $l = 0$ . 右面板: 质量与  $a$  的关系, 对于  $l = 0$ .

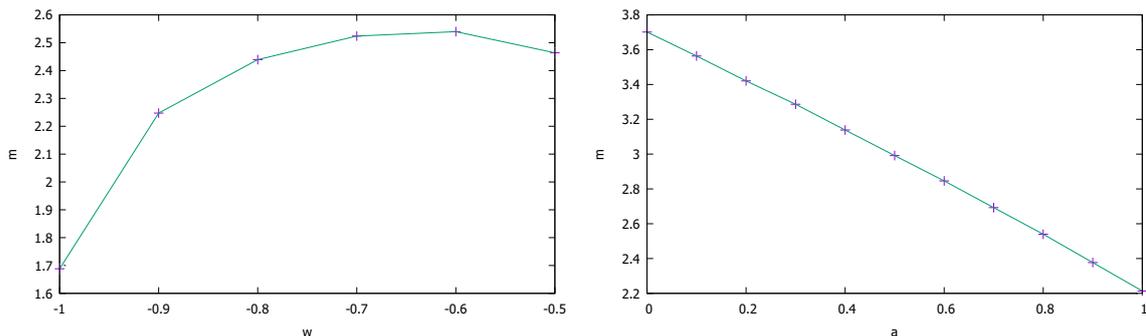


图 7: 左面板: 质量与  $w$  的关系, 针对  $l = 1$ . 右面板: 质量与  $a$  的关系, 针对  $l = 1$ .

## VI. 结论

我们研究了存在五次元质量情况下的黑洞解。特别是, 我们在地平线之外的标量激发束缚态上集中进行了研究。已经表明, 五次元质量的参数显著影响度规函数和霍金温度。结果发现, 对于较大的  $|w|$ , 大黑洞辐射较少, 而小黑洞辐射较多。因此, 与没有五次元质量的大  $|w|$  相比, 大黑洞似乎寿命更长。

Regge-Wheeler 势依赖于黑洞的电荷  $Q$ : 当  $Q$  足够大时, 没有左侧屏障, 因此标量粒子将不会遇到任何障碍而潜入黑洞。这与五次元本质无关。五次元本质的存在通常使它们保持较小的值, 尽管  $Q$  依赖性的定性图景并没有改变。对于足够小的  $Q$ , 五次元本质的存在可能会引起定性变化:  $w = -0.40$  的势并不支持标量束缚态, 但增加  $|w|$  可能会创建一个具有左侧屏障的势, 这可以支持束缚态。

左侧的障碍可能通过增加角动量子数  $l$  来增强。这表明具有较大角动量的标量粒子比那些具有较小  $l$  的寿命更长。对势的研究表明, 如果要支持束缚态,  $|w|$  应该大于某个界限。另一方面, 质量随着参数  $a$  的增加几乎线性地减小。此外, 具有较大角动量  $l$  的状态比那些具有较小  $l$  的质量更大且带宽更窄。

- 
- [1] J. Grain and A. Barrau, Eur. Phys. J. C **53**, 641-648 (2008) [arXiv:hep-th/0701265 [hep-th]].  
 [2] A. Barrau, N. Ponthieu, Phys. Rev. D **69** (2004) 105021.  
 [3] B. J. Carr, [arXiv:astro-ph/0511743 [astro-ph]].  
 [4] T. Begge and J. A. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957)  
 [5] M. Calzá, 2502.04041 (2025)

- [6] G. Koutsoumbas, I. Mitsoulas and E. Papantonopoulos, *Class. Quant. Grav.* **35**, no.23, 235016 (2018) [arXiv:1803.05489 [gr-qc]].
- [7] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, *Class. Quant. Grav.* **29**, 205011 (2012) [arXiv:1111.0263 [gr-qc]].
- [8] M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **86**, 084048 (2012) [arXiv:1208.0103 [gr-qc]].
- [9] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, *JHEP* **11**, 133 (2013) [arXiv:1308.5280 [hep-th]].
- [10] A.G. Riess, et al., *Ap.J.* **607**, 665 (2004), A. G. Riess et al., *Astronom. J.* **116**, 1008 (1998).
- [11] S. J. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [12] S. M. Carroll, *Living Rev. Relativ.* **4**, 1 (2001).
- [13] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
- [14] S. Hellerman, N. Kaloper and L. Susskind, *JHEP* **0106**, 003 (2001) [arXiv:hep-th/0104180];  
W. Fischler, A. Kashani-Poor, R. McNees and S. Paban, *JHEP* **0107**, 003 (2001) [arXiv:hep-th/0104181].
- [15] T. Banks, W. Fischler and L. Motl, *JHEP* **9901**, 019 (1999) [arXiv:hep-th/9811194];  
T. Banks, arXiv:hep-th/0011255;  
T. Banks and W. Fischler, arXiv:hep-th/0102077.
- [16] E. Witten, [arXiv:hep-th/0106109 [hep-th]].
- [17] S. Hellerman, N. Kaloper, L. Susskind, *J. High Energy Phys.* **06**, 003 (2001).
- [18] V. V. Kiselev, *Class. Quant. Grav.* **20**, 1187-1198 (2003) [arXiv:gr-qc/0210040 [gr-qc]].
- [19] S. Chen, B. Wang, R. Su, *Phys. Rev. D* **77**, 124011 (2008).
- [20] S. Dutta and R. J. Scherrer, *Phys. Rev. D* **78**, 123525 (2008) [arXiv:0809.4441 [astro-ph]].
- [21] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Astrophys. Space Sci.* **342**, 155 (2012).
- [22] K. Ghaderi, B. Malakolkalami, *Grav. Cosmol.* **24**, 61 (2018).
- [23] H. Chen, B. C. Lutfuoglu, H. Hassanabadi, Z. W. Long, *Phys. Lett. B* **827**, 136994 (2022).
- [24] B. Hamil, B. C. Lutfuoglu, *Eur. Phys. J. Plus* **137**, 1124 (2022).
- [25] R. Wang, F. Gao, H. Chen, *Phys. Dark Universe* **40**, 101189 (2023).
- [26] B. Hamil, B. C. Lutfuoglu, *Phys. Dark Universe* **44**, 101484 (2024).
- [27] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [28] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **13**, 191 (1976).