

# 通过多连续介质同质化实现演变穿透介质的鲁棒时空 多重尺度上采样

Wei Xie<sup>a,b</sup>, Viet Ha Hoang<sup>b</sup>, Yin Yang<sup>\*a</sup>, and Yunqing Huang<sup>a</sup>

<sup>a</sup>School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, National Center for Applied Mathematics in Hunan, Xiangtan, Hunan, China 411105

<sup>b</sup>Division of Mathematical Sciences, School of Physical and Mathematical Sciences, Nanyang Technological University, Singapore 637371

## 摘要

随时间演变的穿孔域在许多工程和地球科学应用中出现，包括反应传输、颗粒沉积以及多孔介质中的结构退化。准确捕捉这些系统的宏观行为由于动态细观几何结构而带来了显著的计算挑战。在这篇论文中，我们基于多连续体同质化开发了一个稳健且可推广的多尺度建模框架，用于推导收缩域中的有效宏观方程。该方法根据物理特性（如通道宽度）区分多个连续体，并通过在代表性体积元素上制定的空间-时间局部单元问题将它们耦合起来。这些局部问题包含了时间导数和域演化，确保与底层细观动力学保持一致。所得的尺度放大系统生成可计算的宏观系数，适用于大规模模拟。展示了几个数值实验来验证该方法对复杂时变工程问题的准确性、效率以及潜在适用性。

**Keywords:** 多尺度建模，多重介质同质化，时空尺度放大，穿孔域

## 1 介绍

许多自然过程涉及跨越多个空间和时间尺度的复杂相互作用。例如，多孔介质中的矿物溶解和沉淀会逐步改变孔隙结构，从而影响流体流动模式 [12, 5]。类似地，注入 CO<sub>2</sub> 或水可能导致原本完整的固体发生机械失效，导致裂纹形成和结构变形 [25]。颗粒沉积是另一个例子，在此过程中孔隙逐渐被堵塞，动态重塑流动域 [28]。这些过程的一个共同特征是计算域随时间

---

\*Corresponding author

电子邮件地址: xiew@smail.xtu.edu.cn (谢伟), vhoang@ntu.edu.sg (霍越夏), yangyinxu@xtu.edu.cn (杨明), huangyq@xtu.edu.cn (黄云庆)

演变，给准确有效的数值模拟带来了重大挑战。捕捉这种动力学需要先进的多尺度方法，将微观演变与宏观响应耦合起来。

多尺度建模中广泛采用的方法涉及两级离散化策略。这些方法在细网格上构造局部基函数以解析子网格尺度特征，同时在一个简化的网格上求解大尺度问题以提高计算效率。代表性技术包括多尺度有限元法 (MsFEM) [19, 22]，广义多尺度有限元法 (GMsFEM) [13, 2, 7, 8, 30]，基于小波的边缘多尺度有限元方法 [17, 18]，约束能量最小化 GMsFEM (CEM-GMsFEM) [10, 33, 9, 32] 和非局部多重连续介质法 (NLMC) [11, 24, 20]。这些方法允许准确解析细尺度异质性，同时保持全局解的质量。对于时空多尺度问题，这些方法已经扩展到构造时空基函数 [7, 8, 24, 20]。

另一类方法旨在通过计算反映微观行为的同质化系数来推导有效的宏观模型。代表性方法包括数值同质化 [21, 27, 16, 3] 和异构多尺度方法 [1, 26]。这些方法通常依赖于空间和/或时间上的尺度分离假设，并经常使用渐近展开，如两尺度假定。

最近在多连续体同质化 [14, 15, 6, 23, 4, 29, 31] 方面的进展扩展了同质化的适用性，使其适用于没有明显尺度分离的情况。这些方法使用多个局部基函数和平滑的宏观变量来描述代表体积元素 (RVE) 内不同连续体的动力学。根据材料对比度或通道宽度等物理属性定义连续体，并通过精心制定的局部约束问题来建模它们之间的相互作用。

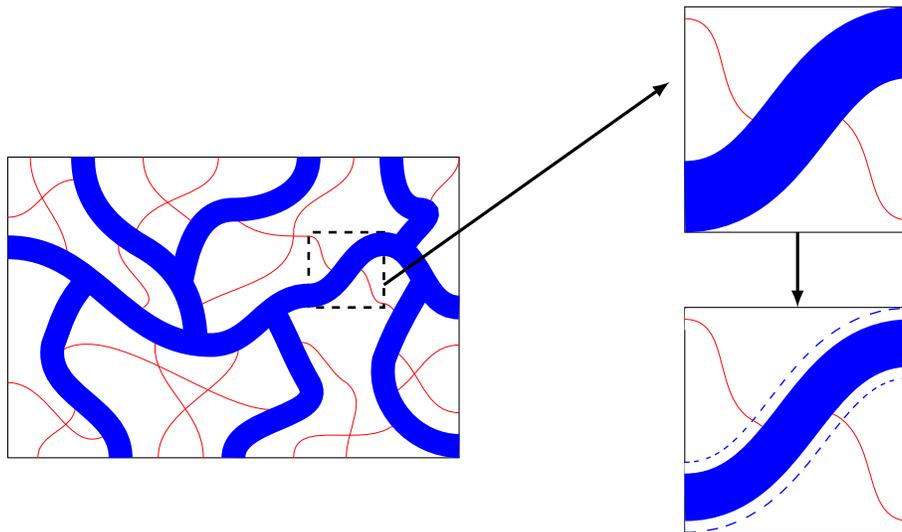


图 1: 缩小域的说明。

在这项工作中，我们提出了一种新的时空多连续介质同质化框架，专门用于处理缩小的穿孔域中的时间依赖性问题。这些区域由于诸如孔隙堵塞或裂纹扩展等过程而演变。作为一个代表性示例，我们考虑一个两连续系统，虽然所提出的框架自然可以扩展到更一般的多通道配

置。如图 1 所示，蓝色区域表示第一个连续体（厚通道），红色区域表示第二个连续体（薄通道）。每个连续体  $\psi_i(\mathbf{x}, t)$  由一个时空函数表示，在第  $i$  个连续体内该函数等于一而在其他地方为零。为了解析细观行为，我们在超采样 RVE 上解决局部约束问题，这可以减轻边界伪影并能够准确计算有效属性。

本文的主要贡献如下：我们引入了一个专为演化的穿孔域设计的时空多重连续介质同质化框架。该框架涉及构建局部单元问题，这些问题考虑了时间导数和几何演化。从局部解中，我们推导出描述粗尺度动力学的可计算宏观方程。最后，通过大量的数值实验，我们展示了所提出方法的准确性和效率。

论文的其余部分组织如下。第 2 节介绍模型问题和细尺度离散化。第 3 节展示多连续体同质化框架。数值结果在第 4 节中报告，结论在第 5 节中提供。

## 2 预备知识

在本节中，我们介绍模型问题，建立相关符号，并描述细尺度离散化。我们考虑以下抛物型方程，该方程在一个随时间演变的多孔域中提出：

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \operatorname{div}(\kappa(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}, t), & \text{in } \Omega^\epsilon(t) \times I, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), & \text{in } \Omega^\epsilon(0), \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{on } \partial\Omega^\epsilon(t) \times I, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Omega^\epsilon(t)$  表示时间为  $t$  时的计算域，由于诸如孔隙堵塞或颗粒沉积等物理过程而发生演变。时间区间用  $I = (0, T]$  表示。参数  $\epsilon$  描述了域的小尺度异质性，例如最小孔径或通道宽度。尽管  $\epsilon$  可能依赖于时间，但我们为了记号的简洁省略了这种依赖关系。

令  $H^1(\Omega^\epsilon)$  表示标准 Sobolev 空间。我们定义子空间

$$H_0^1(\Omega^\epsilon(t)) := \{v \in H^1(\Omega^\epsilon(t)) \mid v = 0 \text{ on } \partial\Omega^\epsilon(t)\},$$

并引入双线性形式

$$a(u, v) = \int_{\Omega^\epsilon} \kappa \nabla u \cdot \nabla v, \quad (w, v) = \int_{\Omega^\epsilon} wv.$$

方程 (1) 的弱形式为：寻找  $u \in H_0^1(\Omega^\epsilon(t))$  使得

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega^\epsilon(t)), \quad (2)$$

$$(u, v) = (u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega^\epsilon(t)). \quad (3)$$

我们将时间区间离散化使用  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ ，并用  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  表示时间步长，其中  $\tau = \min_{1 \leq k \leq N} \tau_k$ 。我们假设时间步长足够小以解析域的动态演变。

令  $\mathcal{T}_h$  为初始域  $\Omega^\epsilon(0)$  的一个协调划分，划分为三角形或四边形。网格尺寸  $h$  被选得足够细，以解析微尺度系数和域的几何复杂性，从而避免标准有限元方法失败。

我们定义  $V_h$  为与网格  $\mathcal{T}_h$  相关的连续分段线性函数空间。由于计算域的时间依赖性质，并非所有在  $V_h$  中的基础函数在每个时间步长都保持活跃。对于每个  $t_k$ ，我们定义活跃有限元空间  $V_h^k$  为由关关节点位于  $\Omega^\epsilon(t_k)$  内部的基础函数所张成的  $V_h$  的子空间。换句话说，解决方案  $u^k$  的自由度被限制在当前域  $\Omega^\epsilon(t_k)$  内，反映了穿孔几何形状的演变。

为了在时间上离散化方程 (2)，我们采用向后欧拉方法。对于  $k = 0, \dots, N - 1$ ，我们寻找  $u^{k+1} \in V_h^{k+1}$  使得

$$\left( \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau_k}, v \right) + a(u^{k+1}, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_h^{k+1}. \quad (4)$$

初始条件通过将  $u_0$  投影到初始定义域上定义的离散空间来强制执行。也就是说，我们计算  $u_h^0 \in V_h^0$ ，使得

$$(u_h^0, v) = (u_0, v), \quad \forall v \in V_h^0. \quad (5)$$

这为细网格解在  $t = 0$  处提供了一致的初始化。

### 3 多连续介质同质化

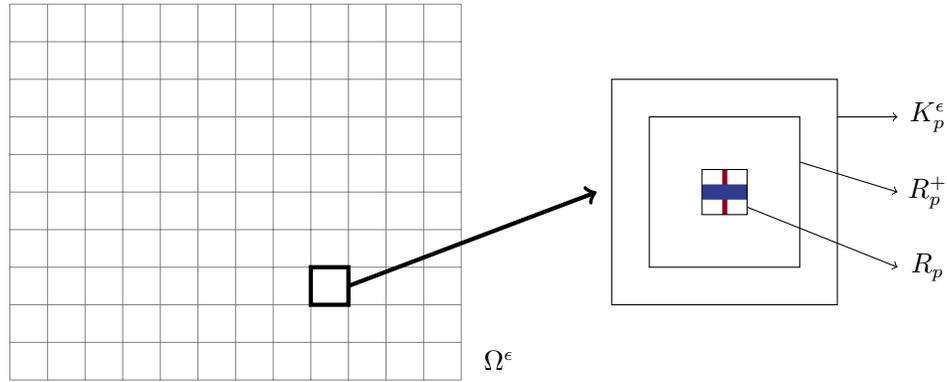


图 2: 代表性体积元素 (RVE)  $R_p$ 、超采样域  $R_p^+$  和粗块  $K_p^\epsilon$  的示意图。

在本节中，我们采用多连续介质均匀化框架来推导与原问题 (1) 相关的宏观方程。

我们首先介绍多连续介质同质化过程的计算设置。设  $\mathcal{T}_H$  是全局域  $\Omega^\epsilon$  的一个粗划分，其中  $H$  是粗网格大小，假设它大于非均匀性的特征尺度  $\epsilon$  (例如，典型的孔隙或穿孔宽度)。对于每个粗块  $K_p^\epsilon \in \mathcal{T}_H$ ，我们定义一个代表性体积元 (RVE)  $R_p \subset K_p^\epsilon$ 。为了减轻人为边界效

应 [19, 10, 32], 我们在区域内构造了一个过采样区域  $R_p^+ \supset R_p$ , 在其中解决了局部问题。图 2 说明了  $K_p^\epsilon$ 、 $R_p$  和  $R_p^+$  之间的关系。我们区分几个尺度:  $h < \epsilon < \varepsilon < H$ , 其中  $h$  是细网格尺寸,  $\epsilon$  是异质性尺度,  $\varepsilon$  是代表性体积元素 (RVE) 尺度, 而  $H$  是粗网格尺寸。

我们现在展示精细尺度解  $u$  在每个代表性体积元素 (RVE) 内的多尺度展开。根据我们之前的工作 [29], 基于它们的几何或物理特性 (例如, 通道宽度), 我们将多个连续介质区分开来; 参见图 1 以示例说明。解  $u$  被近似为光滑宏观变量  $U$  的组合, 这些变量代表大规模趋势, 以及局部化基函数  $\phi$  的组合, 这些基函数旨在捕捉细尺度特征同时保持粗尺度平均值。具体来说, 我们考虑展开式

$$u = \phi_i U_i + \phi_i^m \frac{\partial U_i}{\partial x_m} + \phi_i^{mn} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_m \partial x_n} + \dots, \quad (6)$$

其中  $U_i$  表示与第  $i$  个连续体相关的宏观变量, 并构造了一组局域基函数  $\phi$  以保持  $u$  的平均行为同时编码细尺度效应。关于宏观变量  $U$  的概念和基函数  $\phi$  的定义将在后面讨论。

在这项工作中, 我们仅保留展开式 (6) 中的前两项, 从而得到近似值:

$$u \approx \phi_i U_i + \phi_i^m \frac{\partial U_i}{\partial x_m}. \quad (7)$$

在多连续介质均匀化框架 [14, 29] 中, 宏观变量  $U_i$  定义为细尺度解  $u$  在第  $i$  个连续介质上的加权平均。给定一个代表性体积元素  $R_p$ , 该平均值表示为

$$U_i(\mathbf{x}_p^*) = \frac{\int_{R_p} u \psi_i}{\int_{R_p} \psi_i},$$

其中  $\mathbf{x}_p^*$  表示  $R_p$  的中心点, 而  $\psi_i(\mathbf{x}, t)$  是一个特征函数, 在第  $i$  个连续介质内部等于一, 而在其他地方等于零。

局部基函数  $\phi_i$  和  $\phi_i^m$  是通过求解强制与常数和线性宏观场一致的约束局部问题获得的。这些问题确保了基函数的局部平均值与预期的宏观行为相匹配。

为了捕捉每个连续统中的常数行为, 通过求解以下方程计算基函数  $\phi_i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{R_p^+} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} v + \int_{R_p^+} \kappa \nabla \phi_i \cdot \nabla v - \sum_{j,q} \frac{\beta_{ij}^q}{\int_{R_q} \psi_j} \int_{R_q} \psi_j v = 0, \quad \text{in } (0, T], \\ \int_{R_p^+} \kappa \nabla \phi_i \cdot \nabla v - \sum_{j,q} \frac{\zeta_{ij}^q}{\int_{R_q} \psi_j} \int_{R_q} \psi_j v = 0, \quad \text{at } t = 0, \\ \int_{R_q} \phi_i \psi_j = \delta_{ij} \int_{R_q} \psi_j, \quad \text{for all } t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (8)$$

其中  $\beta$  和  $\zeta$  是拉格朗日乘子, 它们强制执行平均约束条件, 确保每个  $\phi_i$  在第  $i$  个连续统上的均值为单位, 并且在其他地方的均值为零。

为了捕捉宏观尺度上的线性变化，通过求解以下方程计算基函数  $\phi_i^m$ ：

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{R_p^+} \frac{\partial \phi_i^m}{\partial t} v + \int_{R_p^+} \kappa \nabla \phi_i^m \cdot \nabla v - \sum_{j,q} \frac{\beta_{ij}^{mq}}{\int_{R_q} \psi_j} \int_{R_q} \psi_j v = 0, \quad \text{in } (0, T], \\ \int_{R_p^+} \kappa \nabla \phi_i^m \cdot \nabla v - \sum_{j,q} \frac{\zeta_{ij}^{mq}}{\int_{R_q} \psi_j} \int_{R_q} \psi_j v = 0, \quad \text{at } t = 0, \\ \int_{R_q} \phi_i^m \psi_j = \delta_{ij} \int_{R_q} (x_m - c_{mj}) \psi_j, \quad \text{for all } t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (9)$$

这里选择  $c_{mj}$  使得  $\int_{R_q} (x_m - c_{mj}) \psi_j = 0$  成立，确保每个连续体内的平均偏差为零。再次强调，拉格朗日乘子强制执行约束条件，使  $\phi_i^m$  在第  $i$  个连续体内与  $x_m$  的均值匹配，并在其他连续体内消失。

所得的基函数满足以下尺度性质（详见 [14]）：

$$\begin{aligned} \|\phi_i\| &= \mathcal{O}(1), \quad \|\nabla \phi_i\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \|\phi_i^m\| &= \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \|\nabla \phi_i^m\| = \mathcal{O}(1). \end{aligned} \quad (10)$$

我们现在通过将多尺度展开 (7) 代入弱形式 (2) 中来推导宏观方程。对所有代表性体积元素求和并应用标准局部化论证得到：

$$\sum_p \frac{|K_p^\varepsilon|}{|R_p|} \int_{R_p} \frac{\partial u}{\partial t} v + \sum_p \frac{|K_p^\varepsilon|}{|R_p|} \int_{R_p} \kappa \nabla u \cdot \nabla v = \sum_p \frac{|K_p^\varepsilon|}{|R_p|} \int_{R_p} f v. \quad (11)$$

使用多尺度近似 (7) 和假设在局部基函数  $\phi$  相比时， $U_i$  在  $R_p$  内变化缓慢，我们得到：

$$\int_{R_p} \frac{\partial(\phi_i U_i)}{\partial t} v + \int_{R_p} \frac{\partial_m(\phi_i^m U_i)}{\partial t} v \approx U_i(x_p^*) \int_{R_p} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} v + \partial_m U_i(x_p^*) \int_{R_p} \frac{\partial \phi_i^m}{\partial t} v, \quad (12)$$

和

$$\int_{R_p} \kappa \nabla(\phi_i U_i) \cdot \nabla v + \int_{R_p} \kappa \nabla(\phi_i^m \frac{\partial U_i}{\partial x_m}) \cdot \nabla v \approx U_i(x_p^*) \int_{R_p} \kappa \nabla \phi_i \cdot \nabla v + \frac{\partial U_i}{\partial x_m}(x_p^*) \int_{R_p} \kappa \nabla \phi_i^m \cdot \nabla v. \quad (13)$$

通过使用相同的近似方法对测试函数  $v \approx \phi_j V_j + \phi_j^n \frac{\partial V_j}{\partial x_n}$  进行处理，并应用 (12)–(13)，我们得到扩阶变分问题，

$$\begin{aligned}
& \sum_p \frac{|K_p^\epsilon|}{|R_p|} \left( V_j \frac{\partial U_i}{\partial t} \int_{R_p} \phi_i \phi_j + \frac{\partial U_i}{\partial t} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \int_{R_p} \phi_i \phi_j^n + V_j \frac{\partial U_i}{\partial t \partial x_m} \int_{R_p} \phi_i^m \phi_j + \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \frac{\partial U_i}{\partial t \partial x_m} \int_{R_p} \phi_i^m \phi_j^n \right. \\
& \quad \left. + U_i V_j \int_{R_p} \phi_i \phi_j + U_i \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \int_{R_p} \kappa \nabla \phi_i \phi_j^n + V_j \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \int_{R_p} \phi_i^m \phi_j + \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \int_{R_p} \phi_i^m \phi_j^n \right) \\
& \quad = \sum_p \frac{|K_p^\epsilon|}{|R_p|} \left( V_j \int_{R_p} f \phi_j + \partial_n V_j \int_{R_p} f \phi_j^n \right).
\end{aligned}$$

这导致了以下强形式的宏观系统：

$$D_{ji} \frac{\partial U_i}{\partial t} + B_{ji} U_i - \partial_n (B_{ji}^{mn} \partial_m U_i) = b_j, \quad (14)$$

在这里，其他项将由于对称性质或在 (10) 中的比例而被忽略。有效系数由下式给出

$$D_{ji} = \int_{R_p} \phi_i \phi_j, \quad B_{ji} = \int_{R_p} \kappa \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j, \quad B_{ji}^{mn} = \int_{R_p} \kappa \nabla \phi_i^m \cdot \nabla \phi_j^n, \quad b_j = \int_{R_p} f \phi_j.$$

按照相同的程序，我们得到初始条件的粗尺度上尺度方程，

$$D_{ji} U_i - \partial_n (D_{ji}^{mn} \partial_m U_i) = b_j, \quad (15)$$

其中

$$D_{ji} = \int_{R_p} \phi_i \phi_j, \quad D_{ji}^m = \int_{R_p} \phi_i^m \phi_j, \quad b_j = \int_{R_p} u_0 \phi_j.$$

通过结合 (14) 和 (15)，我们获得了多连续统系统的完整宏观模型。需要注意的是，扩展后的模型定义在域  $\Omega$  上。

## 4 数值实验

在本节中，我们展示了三个数值实验来证明所提出的多尺度方法的准确性和效率。计算域  $\Omega$  取为单位正方形。每个粗块被视为 RVE，并且细网格分辨率设置为  $h = 1/1260$ 。我们考虑两种粗网格大小，即  $H = 1/10$  和  $H = 1/20$ 。对于超采样策略，当  $H = 1/10$  时使用 2 层粗块，而当  $H = 1/20$  时使用 4 层。

域收缩通过为每个连续体规定一个固定的收缩率来建模。在每个时间步长中，第一个连续体（对应于厚通道）收缩三个细网格单元，而第二个连续体（代表薄通道）收缩一个细网格单元。

为了评估所提出方法的性能，我们使用以下公式计算每个连续体的相对  $L^2$  误差：

$$e_2^{(i)} = \frac{\sum_p \left| \frac{1}{|K_p|} \int_{K_p} U_i - \frac{1}{|K_p^\xi \cap \Omega_i|} \int_{K_p^\xi \cap \Omega_i} u \right|^2}{\sum_p \left| \frac{1}{|K_p^\xi \cap \Omega_i|} \int_{K_p^\xi \cap \Omega_i} u \right|^2}, \quad (16)$$

其中  $U_i$  表示连续体  $i$  的多尺度解，而  $u$  是相应的小尺度参考解。

渗透率场定义为  $\kappa = \kappa_1 \kappa_2$ ，其中  $\kappa_1$  描述了连续体之间的对比：第一连续体中的  $\kappa_1 = 1$  和第二连续体中的  $\kappa_1 = 10^{-2}$ 。组件  $\kappa_2$  在三个示例中变化如下：

- **示例 1:**  $\kappa_2 = 1$ ;
- **示例 2:**  $\kappa_2 = 2 + \sin(2\pi x_1) \sin(20\pi x_2)$ ;
- **示例 3:**  $\kappa_2 = 2 + \sin(\sqrt{20}\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ .

源项定义为

$$f(x, y) = 10^{-3} \exp(-100((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)),$$

初值条件由以下给出

$$u_0(x, y) = 10^{-1} \exp(-100((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)).$$

#### 4.1 示例 1

表 1 报告了不同粗网格尺寸的数值误差  $H$ 。如预期的那样，随着网格细化，误差始终减少，证实了所提出的多尺度方法的收敛性。此外，该方法在整个模拟时间范围内保持稳定的精度。

图 3 展示了选定时间点的参考细尺度解快照。该解在渗透率相对较低的薄通道内表现出更高的幅度和更长的停留时间，导致流体传输速度较慢。相比之下，在高渗透性的厚通道内的流动更加瞬时，因为流体迅速传播并重新分配到相邻区域。这种空间分布反映了异质渗透结构对传输动力学的影响。

为了评估多尺度近似的准确性，图 4 比较了来自细网格和多尺度模拟的连续平均解。两个解在整个模拟过程中表现出密切的一致性，表明多尺度模型准确地捕捉到了由底层通道网络控制的大规模流动行为。

$H = 1/10$			$H = 1/20$		
$t$	$e_2^{(1)}$	$e_2^{(2)}$	$t$	$e_2^{(1)}$	$e_2^{(2)}$
0	7.81e-02	8.42e-02	0	1.97e-02	2.51e-02
1	4.24e-02	9.74e-02	1	1.93e-02	2.83e-02
2	5.47e-02	6.92e-02	2	5.05e-02	8.77e-03
3	5.75e-02	4.82e-02	3	5.19e-03	4.86e-03

表 1: 示例 1 中不同粗网格大小的相对误差。

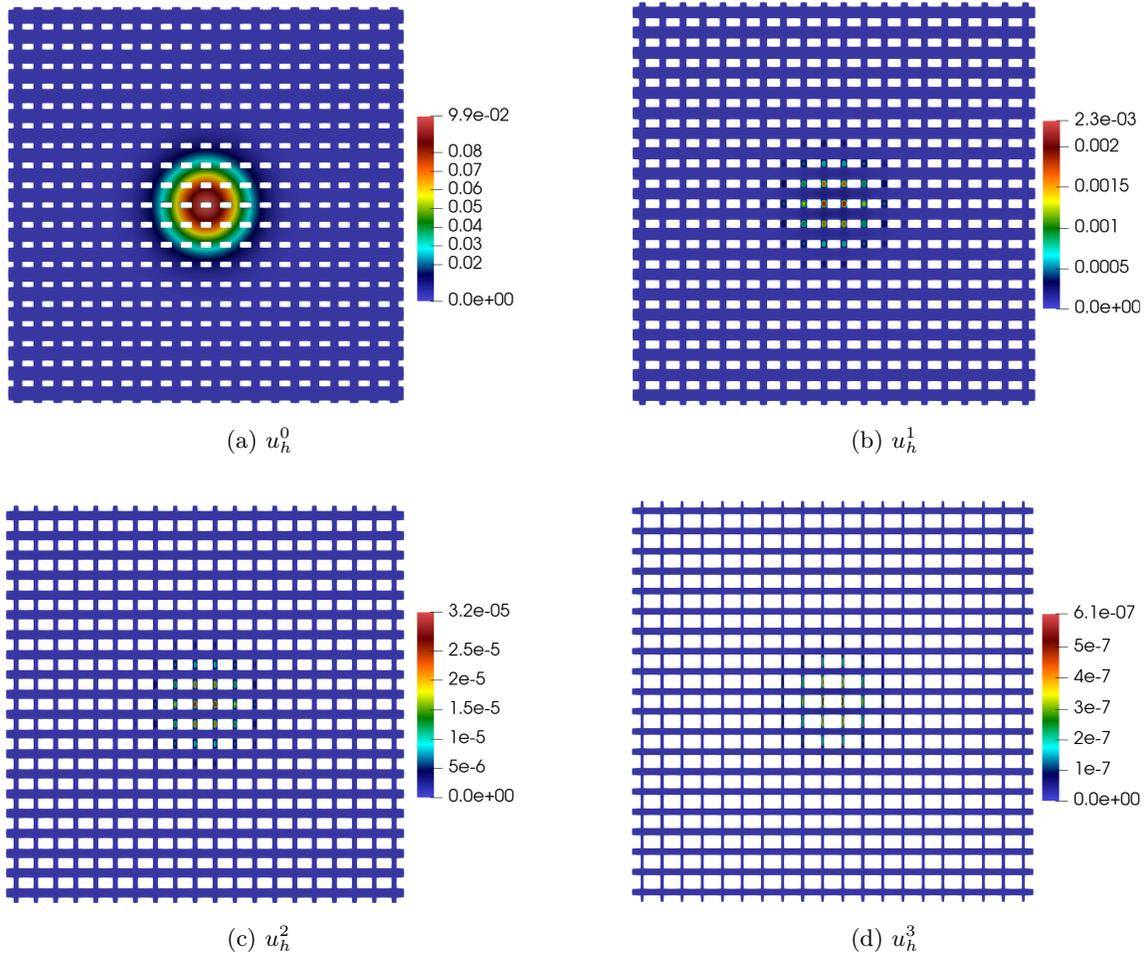


图 3: 示例 1 中不同时间步长的精细网格解。

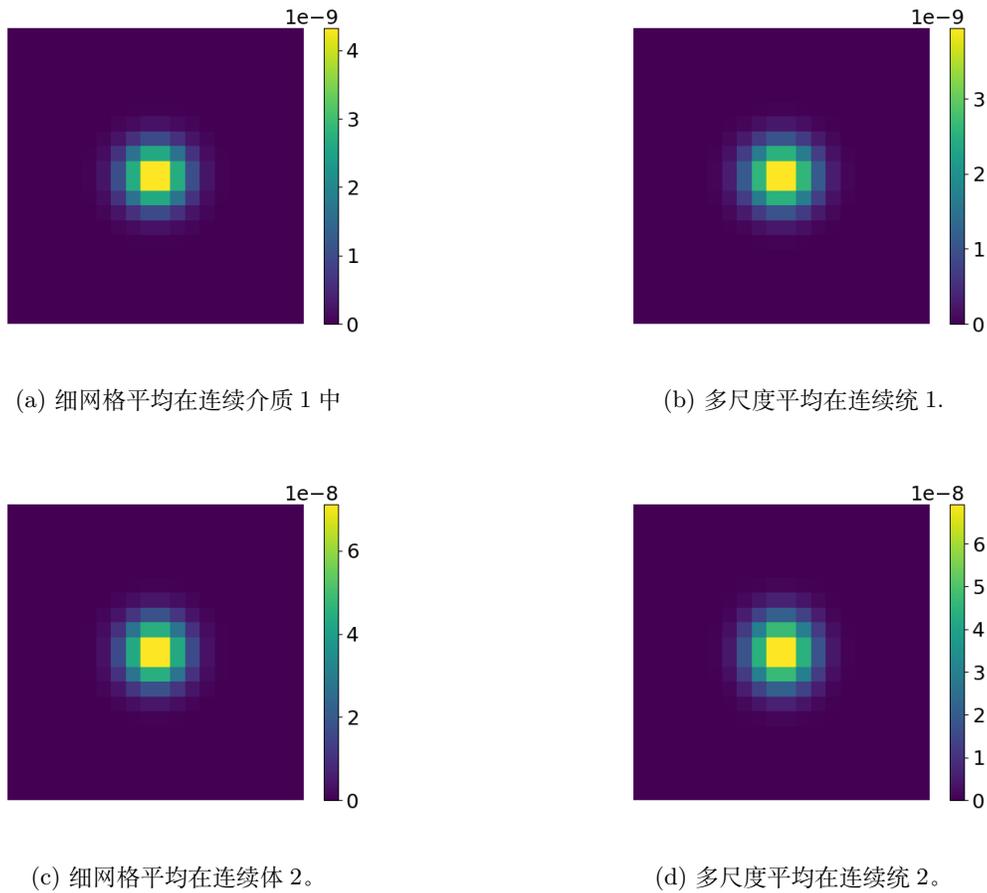


图 4: 示例 1 中最终时刻的平均解比较。

## 4.2 示例 2

此示例考虑了第二种连续体  $\kappa_2$  在整个域中逐渐变化的情况。对应不同粗网格大小的数值误差见表 2。随着粗网格细化，误差系统性降低，表明预期的收敛行为。此外，该方法的准确性在整个模拟时间内始终得到保持。

图 5 显示了所有时间步长的细网格解。解主要局限于狭窄、低渗透性的通道内，其中导电性降低限制了传输。相比之下，高渗透性的厚通道促进了更快的流体移动，导致解在这些区域更快消散。

为了评估多尺度方法的性能，图 6 对比了从细网格和多尺度模拟中获得的平均解。两个结果显示密切相似性，未观察到显著差异。这表明所提出的方法在平滑变化系数场下可靠

运行。

$H = 1/10$			$H = 1/20$		
t	$e_2^{(1)}$	$e_2^{(2)}$	t	$e_2^{(1)}$	$e_2^{(2)}$
0	7.90e-02	8.58e-02	0	1.97e-02	2.51e-02
1	4.45e-02	9.79e-02	1	1.97e-02	2.82e-02
2	5.38e-02	7.03e-02	2	3.05e-02	8.58e-03
3	5.85e-02	5.38e-02	3	5.25e-03	3.97e-03

表 2: 示例 2 中不同粗网格的误差

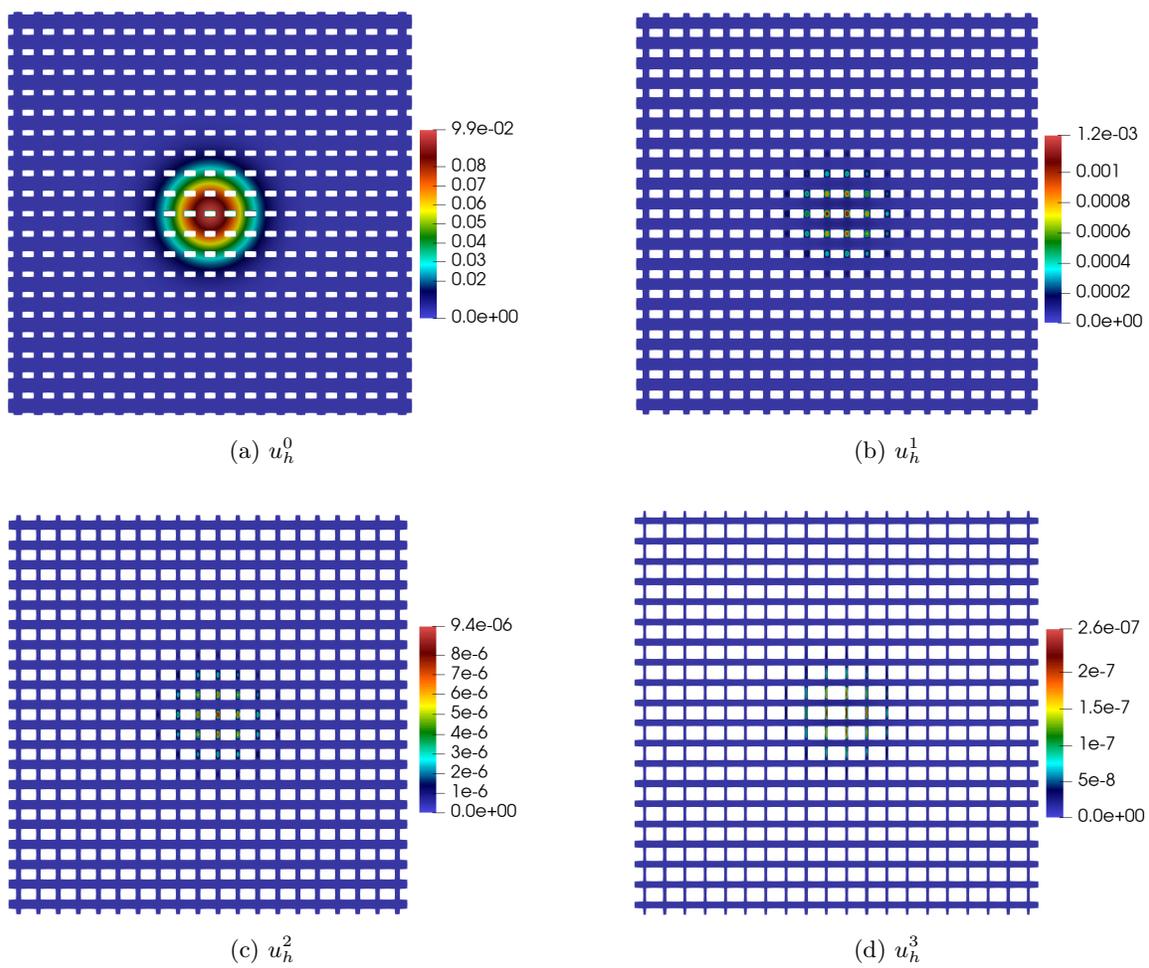


图 5: 示例 2 中不同时间步长的精细网格解

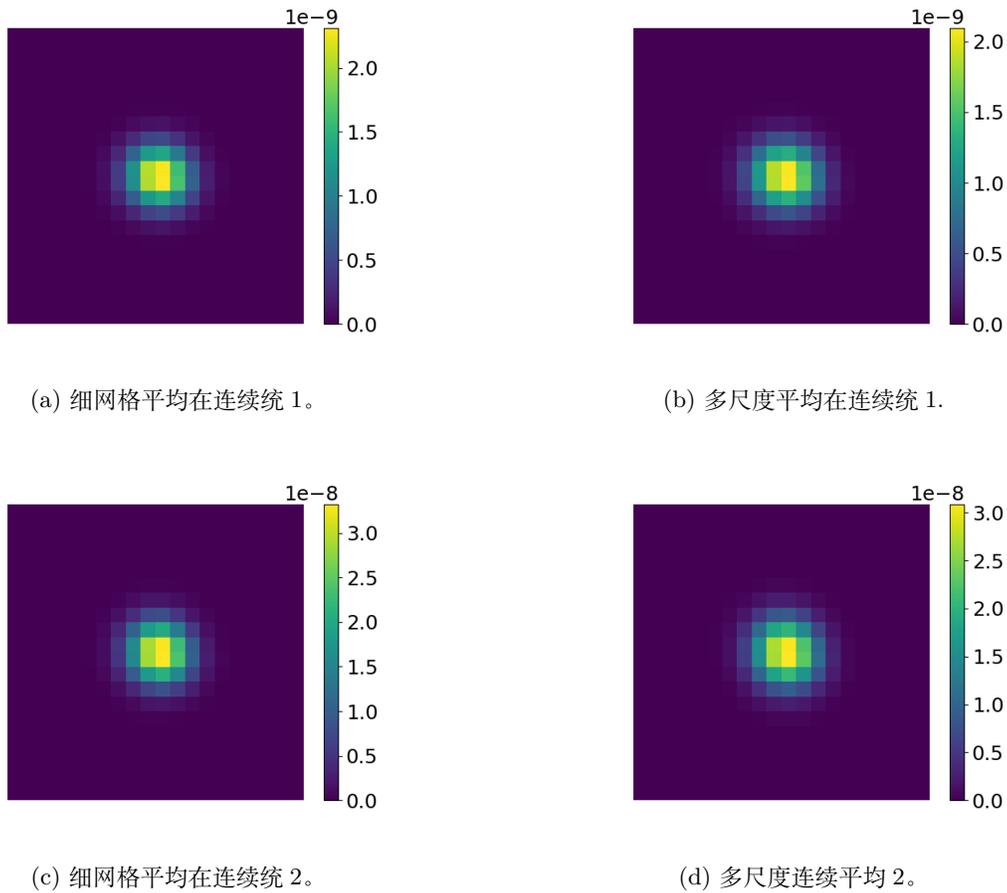


图 6: 示例 2 中最终时刻的平均解比较

### 4.3 示例 3

所考虑情况下的数值误差汇总于表 3 中。如所示，随着粗网格尺寸  $H$  的细化，误差一致减小。值得注意的是，整个模拟时间间隔内解的精度得到了很好的保持。

各个时间步长的精细解如图 7 所示。可以观察到，非零值主要局限于狭窄通道中，在这些地方渗透率明显低于较宽通道的渗透率。这种行为反映了该区域内的特征渗透率差异。

图 8 比较了从细网格和多尺度方法获得的平均解。结果显示差异可忽略，进一步证实了所提出的多尺度方法的有效性和准确性。

$H = 1/10$			$H = 1/20$		
t	$e_2^{(1)}$	$e_2^{(2)}$	t	$e_2^{(1)}$	$e_2^{(2)}$
0	8.55e-02	9.49e-02	0	1.99e-02	2.52e-02
1	4.49e-02	8.67e-02	1	2.33e-02	2.58e-02
2	5.36e-02	4.95e-02	2	3.50e-02	8.17e-03
3	4.98e-02	4.54e-02	3	3.96e-03	3.72e-03

表 3: 不同粗网格在示例 3 中的误差

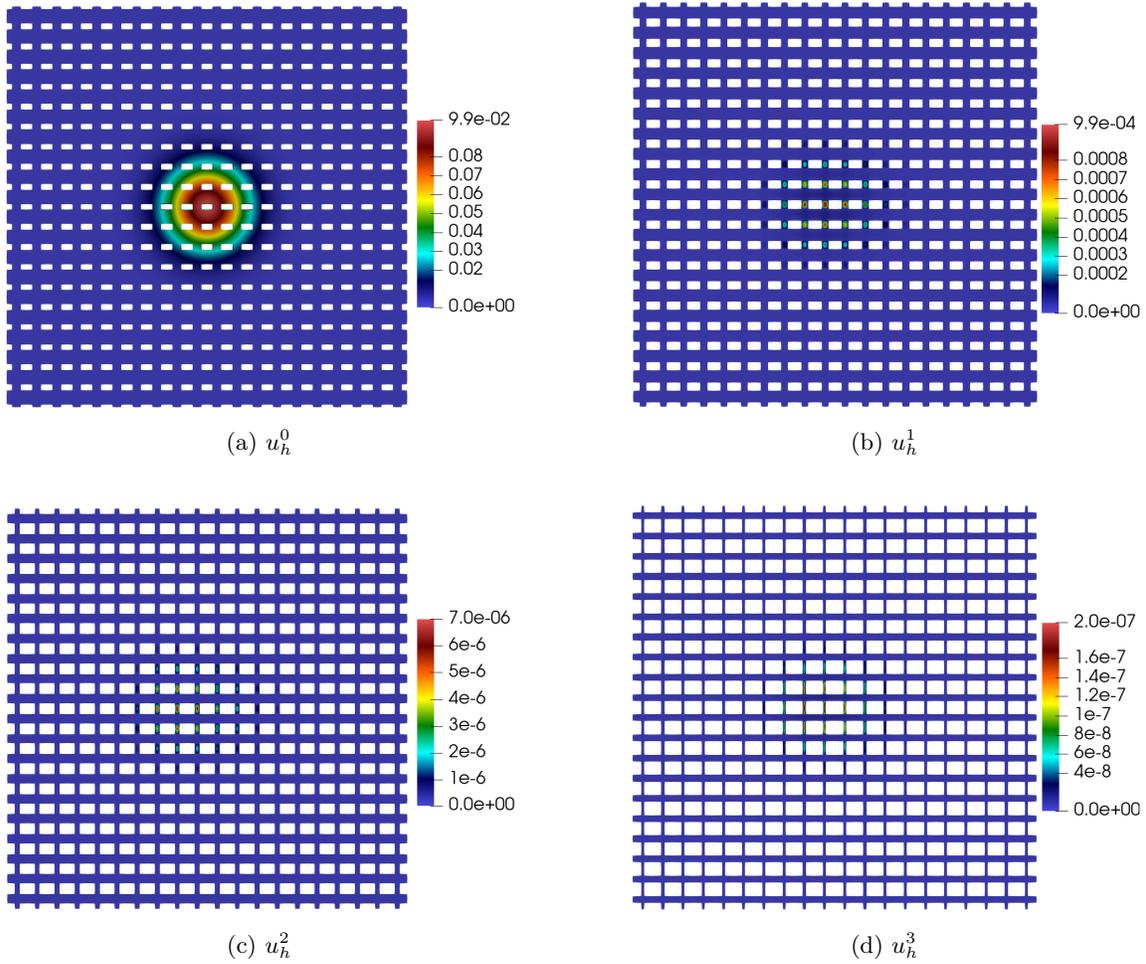


图 7: 示例 1 中不同时间步的精细网格解。

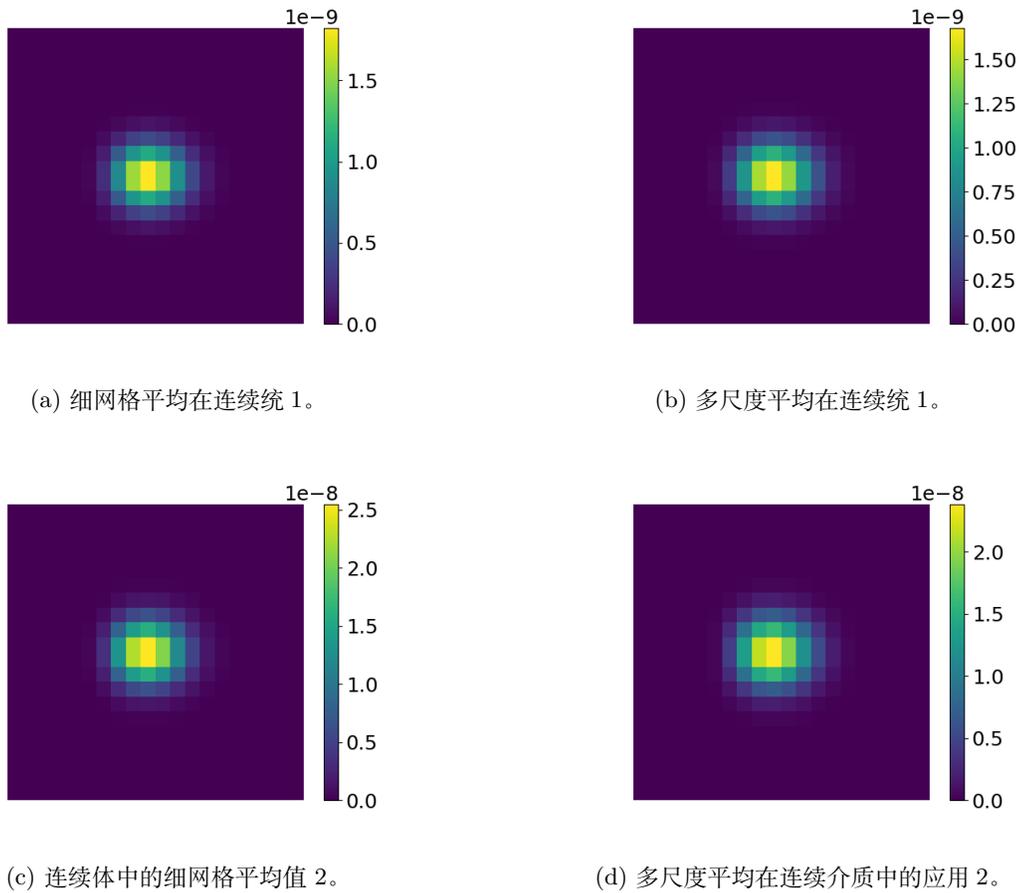


图 8: 示例 1 中最终时刻的平均解对比。

## 5 结论

在这项工作中，我们开发了一种适用于涉及动态演变穿孔域问题的时空尺度放大方法。所提出的方法基于多连续体同质化，并不依赖于尺度分离假设。根据穿孔的宽度识别出不同的连续体，并在代表性体积元上制定了包含时间导数的相关单元问题。为了说明该方法，我们考虑了抛物型问题，在这种情况下，提出的框架给出了一个由多个连续体上的时空方程耦合系统构成的粗网格模型。数值实验表明，即使在空间变化复杂的情况下，该方法也能准确捕捉到解的多尺度行为。结果证实了该方法在处理动态变化微观结构方面的鲁棒性。

## 致谢

谢伟衷心感谢中国国家留学基金委 (CSC, 项目 ID: 202308430231) 资助其访问新加坡南洋理工大学 (NTU)。

胡维哈受到新加坡教育部颁发的 T2EP20123-0047 二级资助的支持。

杨国得到中国国家自然科学基金项目 (编号 12261131501)、湖南省科技厅科学研究基金项目 (编号 2023GK2029, 编号 2024JC1003, 编号 2024JJ1008) 以及“数学基础算法研究”湖南省高校科技创新团队项目的资助, 并受到 111 计划 (编号 D23017) 的支持。

## 参考文献

- [1] A. Abdulle, E. Weinan, B. Engquist, and E. Vanden-Eijnden. The heterogeneous multi-scale method. *Acta Numerica*, 21:1–87, 2012.
- [2] A. Alikhanov, H. Bai, J. Huang, A. Tyrylgina, and Y. Yang. Multiscale model reduction for the time fractional thermoporoelasticity problem in fractured and heterogeneous media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 455:116157, 2025.
- [3] R. Altmann, P. Henning, and D. Peterseim. Numerical homogenization beyond scale separation. *Acta Numerica*, 30:1–86, 2021.
- [4] H. Bai, D. Ammosov, Y. Yang, W. Xie, and M. A. Kobaisi. Multicontinuum modeling of time-fractional diffusion-wave equation in heterogeneous media. *arXiv preprint arXiv:2502.09428*, 2025.
- [5] C. Bringedal, L. Von Wolff, and I. S. Pop. Phase field modeling of precipitation and dissolution processes in porous media: Upscaling and numerical experiments. *Multiscale Modeling & Simulation*, 18(2):1076–1112, 2020.
- [6] E. Chung, Y. Efendiev, J. Galvis, and W. T. Leung. Multicontinuum homogenization. general theory and applications. *Journal of Computational Physics*, 510:112980, 2024.
- [7] E. Chung, Y. Efendiev, W. T. Leung, and S. Ye. Generalized multiscale finite element methods for space–time heterogeneous parabolic equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 76(2):419–437, 2018.
- [8] E. Chung, Y. Efendiev, and Y. Li. Space-time gmsfem for transport equations. *GEM-International Journal on Geomathematics*, 9(2):265–292, 2018.

- [9] E. Chung, J. Hu, and S.-M. Pun. Convergence of the cem-gmsfem for stokes flows in heterogeneous perforated domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 389:113327, 2021.
- [10] E. T. Chung, Y. Efendiev, and W. T. Leung. Constraint energy minimizing generalized multiscale finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 339:298–319, 2018.
- [11] E. T. Chung, Y. Efendiev, W. T. Leung, M. Vasilyeva, and Y. Wang. Non-local multi-continua upscaling for flows in heterogeneous fractured media. *Journal of Computational Physics*, 372:22–34, 2018.
- [12] V. M. Devigne, I. S. Pop, C. Van Duijn, and T. Clopeau. A numerical scheme for the pore-scale simulation of crystal dissolution and precipitation in porous media. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(2):895–919, 2008.
- [13] Y. Efendiev, J. Galvis, and T. Y. Hou. Generalized multiscale finite element methods (gmsfem). *Journal of Computational Physics*, 251:116–135, 2013.
- [14] Y. Efendiev and W. T. Leung. Multicontinuum homogenization and its relation to non-local multicontinuum theories. *Journal of Computational Physics*, 474:111761, 2023.
- [15] Y. Efendiev, W. T. Leung, B. Shan, and M. Wang. Multicontinuum splitting scheme for multiscale flow problems. *arXiv preprint arXiv:2410.05253*, 2024.
- [16] Y. Efendiev and A. Pankov. Numerical homogenization of nonlinear random parabolic operators. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2(2):237–268, 2004.
- [17] S. Fu, E. Chung, and G. Li. Edge multiscale methods for elliptic problems with heterogeneous coefficients. *Journal of Computational Physics*, 396:228–242, 2019.
- [18] S. Fu, G. Li, R. Craster, and S. Guenneau. Wavelet-based edge multiscale finite element method for helmholtz problems in perforated domains. *Multiscale Modeling & Simulation*, 19(4):1684–1709, 2021.
- [19] T. Y. Hou and X.-H. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of Computational Physics*, 134(1):169–189, 1997.

- [20] J. Hu, W. T. Leung, and E. Chung. Space–time non-local multi-continua multiscale method for channelized-media parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, page 116669, 2025.
- [21] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] C. Le Bris, F. Legoll, and A. Lozinski. An msfem type approach for perforated domains. *Multiscale Modeling & Simulation*, 12(3):1046–1077, 2014.
- [23] W. T. Leung. Some convergence analysis for multicontinuum homogenization. *arXiv preprint arXiv:2401.12799*, 2024.
- [24] W. T. Leung, E. T. Chung, Y. Efendiev, M. Vasilyeva, and M. Wheeler. Space-time nonlinear upscaling framework using nonlocal multicontinuum approach. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 17(5), 2019.
- [25] C. Miehe and S. Mauthe. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. part iii. crack driving forces in hydro-poro-elasticity and hydraulic fracturing of fluid-saturated porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 304:619–655, 2016.
- [26] P. Ming, P. Zhang, et al. Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems. *Journal of the American Mathematical Society*, 18(1):121–156, 2005.
- [27] G. A. Pavliotis and A. Stuart. *Multiscale methods: averaging and homogenization*, volume 53. Springer Science & Business Media, 2008.
- [28] S. Wang, H. Li, R. Wang, R. Tian, Q. Sun, and Y. Ma. Numerical simulation of flow behavior of particles in a porous media based on cfd-dem. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 171:140–152, 2018.
- [29] W. Xie, Y. Efendiev, Y. Huang, W. T. Leung, and Y. Yang. Multicontinuum homogenization in perforated domains. *Journal of Computational Physics*, 530:113845, 2025.
- [30] W. Xie, J. Galvis, Y. Yang, and Y. Huang. Multiscale modeling of wave propagation with exponential integration and gmsfem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, page 108825, 2025.

- [31] W. Xie, V. H. Hoang, Y. Yang, and Y. Huang. A hierarchical approach for multicontinuum homogenization in high contrast media. *arXiv preprint arXiv:2503.01276*, 2025.
- [32] W. Xie, Y. Yang, E. Chung, and Y. Huang. Cem-gmsfem for poisson equations in heterogeneous perforated domains. *Multiscale Modeling & Simulation*, 22(4):1683–1708, 2024.
- [33] C. Ye and E. T. Chung. Constraint energy minimizing generalized multiscale finite element method for inhomogeneous boundary value problems with high contrast coefficients. *Multiscale Modeling & Simulation*, 21(1):194–217, 2023.