勒贝格加法平方问题变体

INGRID VUKUSIC

摘要. 我们证明对于每一个勒贝格可测函数 $f\colon \mathbb{R} \to \{v_1, \ldots, v_t\} \subseteq \mathbb{R}$，存在 $x \in \mathbb{R}$,$y > 0$ 使得

$$\int_x^{x+y} f \, d\lambda = \int_{x+y}^{x+2y} f \, d\lambda.$$

这可以被视为有限字母表上无限单词的经典加法平方问题的一个变体。换句话说，我们在勒贝格框架下证明了无法避免加法平方。

1. 介绍

加性平方问题是在词组合领域相对著名的开放问题：是否存在一个无限单词在有限字母表 $A \subseteq \mathbb{N}$ 上，使得没有两个相同长度的连续块具有相同的和？换句话说，我们能否避免形如

$$a_1 a_2 \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_k, \quad \text{with } \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

的因素（即，单词内的符号连续块）？上述形状的因素被称为*加性平方*，因为它可以被视为平方的一种推广，后者只是形如 $a_1 a_2 \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_k = ww$ 的因素。1906 年，Thue[14] 构造了一个在三字母表上避免平方的无限单词。从那时起，类似的以及其他可避免性问题受到了广泛关注。例如，Erdős [9] 询问了避免*交换平方*的可能性，即形式为 $w\widetilde{w}$ 的因子，其中 $\widetilde{w}$ 是 w 的一个排列。（这个问题已经完全解决 [11]。）

加法平方问题由几位作者独立提出过 [5, 12, 10]，相关的变体和问题也被考虑过，例如在 [1, 2, 4, 8] 中。特别是，Rao[13] 使用了 Cassaigne 等人 [7] 的构造方法来证明可以避免加法立方（即形式为 $ww'w''$ 的因素，其中每个块具有相同的长度和总和）在特定大小为 3 的字母表中。然而，目前还不知道是否可以避免加法平方。

在本文中，我们考虑加性平方问题的勒贝格版本。注意，有限字母表上的无限词可以解释为函数 $g\colon \mathbb{N} \to \{a_1, \ldots, a_t\} \subseteq \mathbb{N}$，其中 $\mathbb{N}$ 表示正整数。在这种

2020 *Mathematics Subject Classification.* 26A42, 68R15.

Key words and phrases. 加性平方问题，词组合，勒贝格积分.

意义上，函数 g 避免加法平方如果

$$\sum_{i=m}^{m+k-1} g(i) \neq \sum_{i=m+k}^{m+2k-1} g(i) \quad \text{for all } m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}.$$

因此，加法平方问题的自然勒贝格变体如下：是否存在一个勒贝格可测函数 $f\colon \mathbb{R} \to \{v_1, \dots, v_t\} \subseteq \mathbb{R}$ 使得

$$\int_x^{x+y} f\, d\lambda \neq \int_{x+y}^{x+2y} f\, d\lambda \quad \text{for all } x \in \mathbb{R} \text{ and } y > 0? \tag{1}$$

这里，我们可以将 f 解释为一个“不可数词组”，定义在有限字母表 $\{v_1, \dots, v_t\}$ 上并由 $\mathbb{R}$ 索引。其他超限单词在 [3, 6] 中进行了研究，其中单词是根据可数序数进行索引的（这些也构成了一个不可数集）。在这篇注记中，我们证明了在勒贝格框架下无法避免加性平方；即，涉及 (1) 的问题的答案是否定的。

在我们展示证明之前，先给出一个简短的直观解释。假设我们有一个函数 $f\colon \mathbb{R} \to \{v_1, \dots, v_t\} \subseteq \mathbb{R}$，它避免了加性平方的意义下的 (1)。那么显然 f 在任何区间上都不能是常数。这意味着原像 $A_1, \dots, A_t$ 的 $v_1, \dots, v_t$ 不能包含（勒贝格零集以外的）任何区间。此外，从某种意义上说，这些“密度”必须“不断变化”。但这与勒贝格测度的性质相矛盾：勒贝格密度定理指出，每个勒贝格可测集几乎处处有密度 1。

2. 结果与证明

定理 1. 设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个勒贝格可测函数，它在 $\mathbb{R}$ 中仅取有限个值。那么存在 $x \in \mathbb{R}$,$y > 0$ 使得

$$\int_x^{x+y} f\, d\lambda = \int_{x+y}^{x+2y} f\, d\lambda.$$

我们首先论证如果所有“连续积分”的值都不同，那么它们要么必须从左到右严格递增，要么严格递减。

引理 1. 设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个勒贝格可测且有界的函数。假设

$$\int_x^{x+y} f\, d\lambda \neq \int_{x+y}^{x+2y} f d\lambda \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R} \textit{ and } y > 0.$$

则要么

$$\int_x^{x+y} f\, d\lambda < \int_{x+y}^{x+2y} f\, d\lambda \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R} \textit{ and } y > 0$$

要么

$$\int_x^{x+y} f\, d\lambda > \int_{x+y}^{x+2y} f\, d\lambda \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R} \textit{ and } y > 0.$$

证明. 这可以通过一个简单的连续性论证得出。为了精确起见，假设相反的情况，即

$$\int_x^{x+y} f\,d\lambda \neq \int_{x+y}^{x+2y} f\,d\lambda \quad \text{for all } x \in \mathbb{R} \text{ and } y > 0 \tag{2}$$

并且存在 $a, c \in \mathbb{R}$,$b, d > 0$ 使得

$$\int_a^{a+b} f\,d\lambda < \int_{a+b}^{a+2b} f d\lambda \quad \text{and} \quad \int_c^{c+d} f\,d\lambda > \int_{c+d}^{c+2d} f d\lambda. \tag{3}$$

考虑函数

$$F(t) := \int_{a+t(c-a)}^{a+b+t(c+d-a-b)} f\,d\lambda - \int_{a+b+t(c+d-a-b)}^{a+2b+t(c+2d-a-2b)} f\,d\lambda, \quad \text{for } t \in [0,1].$$

注意到通过 (3)，我们有 $F(0) < 0$ 和 $F(1) > 0$。此外，由于 f 是有界的，F 是连续的。因此，存在 $t_0 \in (0,1)$ 使得 $F(t_0) = 0$。但这意味着

$$\int_{a+t_0(c-a)}^{a+t_0(c-a)+b+t_0(d-b)} f\,d\lambda = \int_{a+t_0(c-a)+b+t_0(d-b)}^{a+t_0(c-a)+2(b+t_0(d-b))} f\,d\lambda,$$

这与假设 (2) 相矛盾，因为 $a + t_0(c-a) \in \mathbb{R}$ 和 $b + t_0(d-b) = (1-t_0)b + t_0 d > 0$。 □

接下来，我们回顾勒贝格密度定理；对于一个初等证明，请参见，例如，[15, Appendix D]。

引理 2 (勒贝格密度定理)**.** *设 $A \subset \mathbb{R}$。则对于几乎所有 $a \in A$（在勒贝格测度意义上）我们有*

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\lambda(A \cap (a-r, a+r))}{2r} = 1.$$

现在我们准备好证明在勒贝格设置中加性平方是无法避免的。

定理 1 的证明. 证明是对 f 的值的数量进行归纳。如果 $f\colon \mathbb{R} \to \{v_1\}$，就没有需要做的事情。现在假设对于某些 $t \geq 2$ 的所有 $f\colon \mathbb{R} \to \{v_1, \ldots, v_{t-1}\}$ 该定理已被证明。设 $f\colon \mathbb{R} \to \{v_1, \ldots, v_t\}$。经过一个线性变换，我们可以假设 $0 = v_1 < v_2 < \cdots < v_t = 1$。令 $A_1, \ldots, A_t$ 为 $v_1, \ldots, v_t$ 的原像。我们可以假设 $\lambda(A_i) > 0$ 对所有 i 成立，否则我们可以使用归纳假设。我们想要证明存在 $x \in \mathbb{R}$,$y > 0$，使得

$$\int_x^{x+y} f\,d\lambda = \int_{x+y}^{x+2y} f\,d\lambda. \tag{4}$$

假设对于所有 x,y,(4) 不成立。那么根据引理 1，我们可以不加一般性地假设

$$\int_x^{x+y} f\,d\lambda > \int_{x+y}^{x+2y} f\,d\lambda \quad \text{for all } x\in\mathbb{R} \text{ and } y>0. \tag{5}$$

由于 $\lambda(A_1)>0$，必须存在 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $\lambda(A_1\cap[n,n+1])>0$。假设 w.l.o.g. 为 $n=0$，即 $\lambda(A_1\cap[0,1])>0$。由 (5) 我们有 $\int_1^2 f\,d\lambda>\int_2^3 f\,d\lambda\geq 0$, 所以我们设

$$\int_1^2 f\,d\lambda =: c>0.$$

由于 $\lambda(A_1\cap[0,1])>0$，引理 2 表明存在 $x\in(0,1)$ 和 $r>0$ 使得

$$\lambda(A_1\cap(x-r,x+r))\geq 2r(1-\frac{c}{6}).$$

现在令 $I=[a,b]:=[x-r,x+r]$。然后上述不等式变为 $\lambda(A_1\cap I)\geq |I|(1-\frac{c}{6})$，由于 A_1 是 0 的原像，我们得到

$$\int_I f\,d\lambda\leq 0\cdot\lambda(A_1\cap|I|)+1\cdot(|I|-\lambda(A_1\cap|I|))\leq\frac{c}{6}\cdot|I|.$$

设 $d:=|I|$ 并考虑由 $I_k:=[a+kd,b+kd]$ 给出的区间 I 的平移，对于 $k=0,1,2,\ldots$。由 (5)，我们有

$$\int_I f\,d\lambda=\int_{I_0} f\,d\lambda>\int_{I_1} f\,d\lambda>\int_{I_2} f\,d\lambda>\ldots.$$

令 N 为与 $[1,2]$ 相交的区间 I_k 的数量。然后

$$N\leq\lceil 1/|I|\rceil+1\leq\frac{3}{|I|}.$$

假设 $I_{k_0},I_{k_0+1},\ldots,I_{k_0+N-1}$ 是与 $[1,2]$ 相交的区间。那么我们有

$$\begin{aligned} c=\int_1^2 f\,d\lambda &\leq \int_{I_{k_0}} f\,d\lambda+\cdots+\int_{I_{k_0+N-1}} f\,d\lambda\\ &\leq N\cdot\int_I f\,d\lambda\leq\frac{3}{|I|}\cdot\frac{c\cdot|I|}{6}=\frac{c}{2}; \end{aligned}$$

一个矛盾。 □

致谢

作者感谢 Jeffrey Shallit 提出的这个问题，他的鼓励，以及他对英语语法细微之处的几条宝贵的评论。这项工作得到了 NSERC 在拨款 2024-03725 下的支持。

References

[1] H. Ardal, T. Brown, V. Jungić, and J. Sahasrabudhe. On abelian and additive complexity in infinite words. *Integers*, 12(5):795–804, 2012. doi:10.1515/integers-2012-0005.

[2] Y.-H. Au, A. Robertson, and J. Shallit. van der Waerden's theorem and avoidability in words. *Integers*, 11:A7, 15, 2011. doi:10.1515/INTEG.2011.007.

[3] L. Boasson and O. Carton. Transfinite Lyndon words. *Log. Methods Comput. Sci.*, 16(4):Paper No. 9, 38, 2020.

[4] T. Brown. Approximations of additive squares in infinite words. *Integers*, 12(5):805–809, 2012. doi:10.1515/integers-2012-0006.

[5] T. C. Brown and A. R. Freedman. Arithmetic progressions in lacunary sets. *Rocky Mountain J. Math.*, 17(3):587–596, 1987. doi:10.1216/RMJ-1987-17-3-587.

[6] O. Carton and C. Choffrut. Periodicity and roots of transfinite strings. *Theor. Inform. Appl.*, 35(6):525–533, 2001. doi:10.1051/ita:2001102. A tribute to Aldo de Luca.

[7] J. Cassaigne, J. D. Currie, L. Schaeffer, and J. Shallit. Avoiding three consecutive blocks of the same size and same sum. *J. ACM*, 61(2):Art. 10, 17, 2014. doi:10.1145/2590775.

[8] C. F. Du, H. Mousavi, E. Rowland, L. Schaeffer, and J. Shallit. Decision algorithms for Fibonacci-automatic words, II: Related sequences and avoidability. *Theoret. Comput. Sci.*, 657:146–162, 2017. doi:10.1016/j.tcs.2016.10.005.

[9] P. Erdős. Some unsolved problems. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 6:221–254, 1961.

[10] L. Halbeisen and N. Hungerbühler. An application of van der Waerden's theorem in additive number theory. *Integers*, 0:A7, 5, 2000.

[11] V. Keränen. Abelian squares are avoidable on 4 letters. In *Automata, languages and programming (Vienna, 1992)*, volume 623 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 41–52. Springer, Berlin, 1992. doi:10.1007/3-540-55719-9_62.

[12] G. Pirillo and S. Varricchio. On uniformly repetitive semigroups. *Semigroup Forum*, 49(1):125–129, 1994. doi:10.1007/BF02573477.

[13] M. Rao. On some generalizations of abelian power avoidability. *Theoret. Comput. Sci.*, 601:39–46, 2015. doi:10.1016/j.tcs.2015.07.026.

[14] A. Thue. Über unendliche Zeichenreihen. Christiana Vidensk. Selsk. Skr. 1906. Nr. 7. 22 S. Lex. 8° (1906)., 1906. Reprinted in Selected Mathematical Papers of Axel Thue, edited by T. Nagell, Universitetsforlaget, Oslo (1977) 413-478.

[15] A. C. M. van Rooij and W. H. Schikhof. *A second course on real functions*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982.

I. Vukusic, University of Waterloo, 200 University Ave W, Waterloo, ON N2L 3G1, Canada

Email address: `ingrid.vukusic@uwaterloo.ca`