关于矩阵代数和具有一般作用的代数的 PI 指数

THIAGO CASTILHO DE MELLO AND FELIPE YUKIHIDE YASUMURA

献给 César Polcino Milies 教授八十岁生日。

摘要. 我们计算系数在一个结合代数中的矩阵环的 PI 指数。作为结果, 我们证明了以下结论。设 $\mathcal{R}$ 是一个具有正 PI 指数的 PI-代数。如果 $M_n\mathcal{R}$ 和 $M_m\mathcal{R}$ 满足相同的多项式恒等式集, 则 $n = m$ 。我们提供了该结果在 $\mathcal{R}$ 不是 PI 或零指数时失效的例子。对于某些定义在特征为零的代数闭域上的广义作用下的有限维代数, 我们也得到了相同的结果。

1. 介绍

我们旨在回答在 [4] 中提出的问题: 给定一个结合代数 $\mathcal{R}$, 如果 $M_n(\mathcal{R})$ 和 $M_m(\mathcal{R})$ 满足相同的多项式恒等式, 那么是否为真 $m = n$? 为了给出肯定的回答, 我们依赖于 Giambruno 和 Zaicev 关于 PI-代数指数的开创性理论。

令 $\mathcal{A}$ 是一个在特征为零的代数闭域上的结合 PI-代数。 $\text{Id}(\mathcal{A})$ 表示自由结合代数 $\mathbb{F}\langle X \rangle$ 中 $\mathcal{A}$ 的所有多项式恒等式的集合。我们定义了通过

$$c_m(\mathcal{A}) = \dim(P_m/P_m \cap \text{Id}(\mathcal{A})), \quad m \in \mathbb{N}.$$

的 $\mathcal{A}$ 的余维数序列。 $\mathcal{A}$ 的 PI-指数是

$$\exp(\mathcal{A}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{c_m(\mathcal{A})}.$$

Giambruno 和 Zaicev 在 20 世纪初的一个著名结果 (见 [5], 也可参考专著 [6]) 计算了有限维结合的 $\mathbb{Z}_2$ -分次代数的 PI 指数。更准确地说, 设 $\mathcal{B}$ 是一个有限维的关联 $\mathbb{Z}_2$ -分次代数。 $\mathcal{B}$ 的格拉斯曼包络是 $G(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_0 \otimes G_0 \oplus \mathcal{B}_1 \otimes G_1$, 其中 $G = G_0 \oplus G_1$ 是赋予自然 $\mathbb{Z}_2$ -分次的无限维 Grassmann 代数。令 $\mathcal{B} = \mathcal{S} + J(\mathcal{B})$ 为 $\mathcal{B}$ 的 Wedderburn-Malcev 分解,

This work is supported by São Paulo Research Foundation (FAPESP), grant 2025/02457-5, and by CNPq, grant 405779/2023-2.

即 $J(\mathcal{B})$ 是其 Jacobson 根基, 并且 $\mathcal{S}$ 是一个半单的 $\mathbb{Z}_2$ -分次代数, 使得 $\mathcal{S} \cap J(\mathcal{B}) = 0$. 写出 $\mathcal{S} = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_r$, 其中每个 $\mathcal{B}_i$ 都是一个分级简单的 $\mathbb{Z}_2$ -分级代数. 一个介于 1 和 r 之间的不同整数序列, 比如说 $I = (i_1, \dots, i_s)$, 是可容许的如果 $\mathcal{B}_{i_1} J(\mathcal{B}) \mathcal{B}_{i_2} J(\mathcal{B}) \cdots J(\mathcal{B}) \mathcal{B}_{i_s} \neq 0$. 然后 (见 [6, Proposition 6.5.1])

$$\exp(G(\mathcal{B})) = \max \{ \dim(\mathcal{B}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_{i_s}) \mid I = (i_1, \dots, i_s) \text{ is admissible} \}.$$

最后, Kemer 的理论指出, 对于每个结合 PI-代数 $\mathcal{A}$, 都存在一个有限维的 $\mathbb{Z}_2$ -分次代数 $\mathcal{B}$ 使得 $\text{Id}(\mathcal{A}) = \text{Id}(G(\mathcal{B}))$ (见 [10], 另见 [1]). 因此, 特征为零的域上的任何结合代数的 PI 指数存在且是一个整数.

值得一提的是, 上述结果被推广到几个情境中. 例如, 我们提及 [8, 7], 其中在具有广义作用的代数 (见下定义) 背景下获得了相同类型的结果, 这包括分级代数和带有对合的代数.

在这篇论文中, 我们证明了对于一个结合的 PI-代数 $\mathcal{R}$, 有 $\exp(M_n(\mathcal{R})) = n^2 \exp(\mathcal{R})$. 作为结果, 如果 $\mathcal{R}$ 是一个具有正指数的 PI-代数, 则对在 [4] 中提出的问题给出了肯定的回答. 此外, 我们还证明了 $\exp^{H \otimes K}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{S}) = \exp^H(\mathcal{A}) \cdot \dim \mathcal{S}$, 其中 $\mathcal{A}$ 是一个赋予广义 H -作用的有限维代数, 在一些附加条件下, 而 $\mathcal{S}$ 是一个具有单位中心的 K -单有限维代数.

2. 主要结果

每个向量空间和代数都定义在一个特征为零的固定域上 $\mathbb{F}$.

以下已知结果将是必要的:

引理 1 ([1, Theorem 7.2.3]). 令 $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i$ 为满足 $\text{Id}(\mathcal{A}_i) = \text{Id}(\mathcal{B}_i)$ 的 $\mathbb{F}$ -代数, 对于 $i = 1, 2$. 然后 $\text{Id}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) = \text{Id}(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$. 特别是对于每个 $n \in \mathbb{N}$, $\text{Id}(M_n(\mathcal{A}_1)) = \text{Id}(M_n(\mathcal{B}_1))$.

我们的主要结果如下:

定理 2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个结合代数, $n \in \mathbb{N}$. 那么

$$\exp(M_n(\mathcal{A})) = n^2 \exp(\mathcal{A}).$$

证明. 如果 $\mathcal{A}$ 不是 PI-代数, 那么 $M_n(\mathcal{A})$ 也不是 PI-代数, 因为它包含了一个 $\mathcal{A}$ 的副本通过 $a \mapsto \text{diag}(a, a, \dots, a)$. 因此, 在这种情况下, 我们得到了指数的相等性. 因此, 我们可以假设 $\mathcal{A}$ 是一个 PI-代数.

令 $\mathcal{B}$ 是一个有限维的 $\mathbb{Z}_2$ -分次代数, 使得 $\text{Id}(\mathcal{A}) = \text{Id}(G(\mathcal{B}))$ 。令 $\mathcal{B} = \mathcal{B}^0 \oplus \mathcal{B}^1$ 是其在齐次子空间中的分解。代数 $M_n(\mathcal{B})$ 是通过

$$M_n(\mathcal{B})^i = M_n(\mathcal{B}^i).$$

进行 $\mathbb{Z}_2$ -分级的注意 $G(M_n(\mathcal{B})) = M_n(G(\mathcal{B}))$ 。此外, 从定理 1 可知

$$\text{Id}(M_n(\mathcal{A})) = \text{Id}(M_n(G(\mathcal{B}))) = \text{Id}(G(M_n(\mathcal{B}))).$$

设 $\mathcal{B} = \mathcal{S} + J(\mathcal{B})$ 为其 Wedderburn-Malcev 分解, 其中 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{Z}_2$ -分级半单的。由于 $\mathcal{B}$ 是有限维的, 其 Jacobson 根是一个幂零理想。因此, $J := M_n(J(\mathcal{B}))$ 是一个幂零分级理想。此外,

$$M_n(\mathcal{B})/J \cong M_n(\mathcal{S}) \cong M_n(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{S}$$

是半单的。因此, J 是 $M_n(\mathcal{B})$ 的雅各布森根。因此,

$$M_n(\mathcal{B}) = M_n(\mathcal{S}) + J$$

是 $M_n(\mathcal{B})$ 的 Wedderburn-Malcev 分解。令

$$\mathcal{S} = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_t$$

为作为 $\mathbb{Z}_2$ -分级单代数的直和分解的 $\mathcal{S}$ 。令 $\mathcal{B}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_{i_r} \subseteq \mathcal{S}$ 满足 $\mathcal{B}_{i_1}J(\mathcal{B}) \cdots J(\mathcal{B})\mathcal{B}_{i_r} \neq 0$ 。这意味着我们可以找到 $b_j \in \mathcal{B}_{i_j}$ 和 $u_1, \dots, u_{r-1} \in J(\mathcal{B})$ 使得 $u' = b_1u_1 \cdots u_{r-1}b_r \neq 0$ 。注意 $M_n(\mathcal{B}_{i_1}) \oplus \cdots \oplus M_n(\mathcal{B}_{i_r}) \subseteq M_n(\mathcal{S})$ 。现在,

$$(b_1e_{11})(u_1e_{11}) \cdots (u_{r-1}e_{11})(b_re_{11}) = ue_{11} \neq 0.$$

因此, $M_n(\mathcal{B}_{i_1})J \cdots JM_n(\mathcal{B}_{i_r}) \neq 0$ 。从而,

$$\exp(G(M_n(\mathcal{B}))) \geq n^2 \exp(G(\mathcal{B})).$$

另一方面, 从 [6, Theorem 4.2.5] 可知

$$c_m(M_n(G(\mathcal{B}))) \leq c_m(M_n(\mathbb{F}))c_m(G(\mathcal{B})),$$

对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 。这意味着,

$$\exp(M_n(G(\mathcal{B}))) \leq \exp(M_n(\mathbb{F}))\exp(G(\mathcal{B})) = n^2 \exp(G(\mathcal{B})).$$

结合这两个不等式，我们得到

$$\exp(M_n(\mathcal{A})) = \exp(G(M_n(\mathcal{B}))) = n^2 \exp(G(\mathcal{B})) = n^2 \exp(\mathcal{A}).$$

证明完毕。 $\square$

一般而言，两个 PI-代数的张量积的指数并不等于它们各自指数的乘积。

示例 1. 设 $\mathcal{A} = \text{UT}_2(\mathbb{F})$ 。我们知道 $\exp(\mathcal{A}) = 2$ 。此外， $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \cong I(X)$ ，其中 $I(X)$ 是偏序集 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 的关联代数，其中 $1 \leq 2, 3 \leq 4$ 。换句话说，

$$\text{UT}_2 \otimes \text{UT}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & * & 0 & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{pmatrix} \right\}.$$

一方面， $J(\text{UT}_2 \otimes \text{UT}_2)^3 = 0$ ，所以 $\exp(\text{UT}_2 \otimes \text{UT}_2) \leq 3$ 。另一方面， $\text{UT}_2 \otimes \text{UT}_2$ 的半单部分是对角矩阵的集合，这与基域四个副本的和同构。此外， $e_{11}e_{12}e_{22}e_{24}e_{44} \neq 0$ ，因此序列 $I = (1, 2, 4)$ 是可容许的。因此， $\exp(\text{UT}_2 \otimes \text{UT}_2) = 3$ 。

作为我们的结果的推论，我们得到：

推论 3. 设 $\mathcal{R}$ 是一个 PI-代数，带有 $\exp(\mathcal{R}) \geq 1$ (例如， $\mathcal{R}$ 是单位的)。那么 $\text{Id}(M_r(\mathcal{R})) \subseteq \text{Id}(M_s(\mathcal{R}))$ 当且仅当 $r \geq s$ 。特别地， $\text{Id}(M_r(\mathcal{R})) = \text{Id}(M_s(\mathcal{R}))$ 当且仅当 $r = s$ 。

证明. 如果 $r \leq s$ ，则可以通过

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

将 $M_r(\mathcal{R})$ 嵌入到 $M_s(\mathcal{R})$ 中。因此， $\text{Id}(M_s(\mathcal{R})) \subseteq \text{Id}(M_r(\mathcal{R}))$ 。另一方面，如果 $\text{Id}(M_s(\mathcal{R})) \subseteq \text{Id}(M_r(\mathcal{R}))$ ，那么我们有 $\exp(M_r(\mathcal{R})) \leq \exp(M_s(\mathcal{R}))$ 。从之前的定理可知，有 $r^2 \exp(\mathcal{R}) \leq s^s \exp(\mathcal{R})$ 。由于 $\exp(\mathcal{R}) \neq 0$ ，从而得到 $r \leq s$ 。 $\square$

接下来的两个示例表明声明中提出的条件是必不可少的。

示例 2. 条件 $\exp(\mathcal{R}) > 0$ 在定理 3 中是必不可少的。事实上, 设 $\mathcal{R}$ 是一个无限维向量空间, 并在 $\mathcal{R}$ 上定义零乘积, 即 $\mathcal{R}^2 = 0$ 。由于 $\mathcal{R}$ 是幂零的, 显然有 $\exp(\mathcal{R}) = 0$ 。然后, $M_n(\mathcal{R})$ 是一个无限维代数其中 $M_n(\mathcal{R})^2 = 0$ 。两个赋有零乘积的代数之间的代数同构只是向量空间同构。 $M_n(\mathcal{R})$ 的维度与 $\mathcal{R}$ 的维度相同。因此, 对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, 有一个 $M_n(\mathcal{R}) \cong \mathcal{R} \cong M_m(\mathcal{R})$ 。

示例 3. $\mathcal{R}$ 是定理 3 中的 PI-代数的条件也是必不可少的。例如, 设 $\mathcal{V}$ 是一个具有可数基底的无限维向量空间, 并且设 $\mathcal{R} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \subseteq \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{V})$ 是有限秩线性算子的子代数。那么, 对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有

$$M_n(\mathcal{R}) \cong \mathcal{R} \cong M_m(\mathcal{R}).$$

备注 1. 令 $\mathcal{R}$ 为一个单位 PI-代数。注意 $\mathcal{R}$ 具有正的 PI 指数。然后, 定理 3 告诉我们 $M_n(\mathcal{R}) \cong M_m(\mathcal{R})$ 蕴含 $m = n$ 。

鉴于定理 3, 我们得到:

推论 4. 令 $\mathcal{R}$ 是一个有单位元的 PI-代数。那么 $\mathcal{R}$ 是一个 IBN (不变基数) 环。

证明. 假设 $\mathcal{R}^m \cong \mathcal{R}^n$ 作为 $\mathcal{R}$ 模, 对于某个 $m, n \in \mathbb{N}$ 。回忆一下, $\mathcal{R}$ 模的同构 $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ 意味着代数同构 $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{W})$ 。此外, 由于 $\mathcal{R}$ 是单位的, 我们得到一个代数同构 $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}^n) \cong M_n(\mathcal{R})$ 。因此,

$$M_m(\mathcal{R}) \cong \text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}^m) \cong \text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}^n) \cong M_n(\mathcal{R}).$$

从定理 3, 我们得到 $n = m$ 。故, $\mathcal{R}$ 是一个 IBN 环。 $\square$

备注 2. 先前的结果是已知的: 设 $\mathcal{R}$ 是一个具有一元的 PI-环。那么, 存在一个极大理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$ 。因此, $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ 是一个简单的 PI-环。根据 Kaplansky 定理, 每个简单的 PI-环都是一个简单的 Artinian 环。从而, $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ 是一个 IBN 环。由于我们有一个具有一元的同态 $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/\mathcal{I}$, 我们得到 $\mathcal{R}$ 是一个 IBN 环 (参见例如 [11, Remark 1.5])。

3. 主要结果的推广

在本节中, 我们将上一节的构造扩展到赋予了一般化 H -作用的有限维结合代数的背景下。

3.1. **广义的 H -作用.** 令 H 是一个结合代数。我们说一个结合代数 $\mathcal{A}$ 被赋予了一个广义的 H -作用, 如果存在一个 (单位) 代数同态 $H \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, 使得对于每个 $h \in H$, 存在 $h'_i, h''_i, h'''_i, h''''_i \in H$ 满足

$$h(ab) = \sum_i h'_i(a)h''_i(b) + h'''_i(b)h''''_i(a), \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

H -作用的例子包括群的分级、对合和 Hopf 代数的作用 (参见例如 [2])。

H -理想是 $\mathcal{A}$ 在 H 作用下的理想不变量。我们说 $\mathcal{A}$ 是 H -简单, 如果它是 $\mathcal{A}^2 \neq 0$ 并且不包含任何非平凡的 H -理想。我们说, 如果两个非零 H -理想的乘积仍然是非零的, 则 $\mathcal{A}$ 是 H -素的。显然每个 H -单代数都是 H -素的。一个 H -代数 $\mathcal{A}$ 被称为中央, 如果它是单位的并且 $Z(\mathcal{A}) = \mathbb{F}$ 。

我们继续提供自由 H -代数的构造。设 $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ 并考虑由 $\{x_i^h \mid h \in H, i \in \mathbb{N}\}$ 自由生成的自由结合代数。我们将商记为 $\mathbb{F}_H\langle X \rangle$, 其中包含所有形式为 $x_i^{\lambda h_1 + h_2} - \lambda x_i^{h_1} - x_i^{h_2}$ 的关系。然后, 给定一个赋有广义 H -作用和映射 $X \rightarrow \mathcal{A}$ 的代数 $\mathcal{A}$, 存在唯一的代数同态 $f: \mathbb{F}_H\langle X \rangle \rightarrow \mathcal{A}$ 使得 $f(x_i^h) = h \cdot f(x_i)$, $\forall h \in H$ 和 $i \in \mathbb{N}$ 。我们记

$$\text{Id}_H(\mathcal{A}) = \bigcap_{\psi \in \text{Hom}(\mathbb{F}_H\langle X \rangle, \mathcal{A})} \text{Ker } \psi,$$

为 $\mathcal{A}$ 的所有 H -多项式恒等式。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$P_n^H = \text{Span}\{x_{\sigma(1)}^{h_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{h_n} \mid h_1, \dots, h_n \in H, \sigma \in \mathcal{S}_n\},$$

为所有多重线性 H -多项式的空间。然后, 我们设置

$$c_n^H(\mathcal{A}) = \dim P_n^H / P_n^H \cap \text{Id}_H(\mathcal{A}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

H 指数被定义为

$$\exp^H(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^H(\mathcal{A})},$$

只要极限存在。 H -指数的存在性由 Gordienko 证明 (见 [7]), 在以下情况下。设 $\mathcal{A}$ 是一个有限维非幂零代数, 其上有一个广义的 H 作用, 并且该代数定义在一个特征为零的代数闭域上。假设 $J = J(\mathcal{A})$ 是 H -

不变的, 并且是 $\mathcal{A} = \mathcal{B} + J(\mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_q$ 是 H -简单代数的直和。然后, [7, Theorem 5] 告诉我们 $\exp^H(\mathcal{A})$ 存在并且与

$$(1) \quad \max \{ \dim(\mathcal{B}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_{i_r}) \mid \mathcal{B}_{i_1} J \cdots J \mathcal{B}_{i_r} \neq 0 \}.$$

一致

3.2. 一些引理. 在本节中, 我们的目标是证明一个中心 H -单代数与一个带单位的 K -单代数的张量积是 $H \otimes K$ -单的。这是经典理论的一个推广, 我们将以书籍 [3] 为基础建立我们的理论。

我们用 $\hat{H}$ 表示 H 的单位化, 即如果 H 是单体的, 则为 $\hat{H} = H$, 如果是非单体的 H , 则为 $\hat{H} = \mathbb{F}1 \oplus H$, 其中 1 作为单位元作用。很明显, 每个带有广义 H -作用的代数都有一个自然的广义 $\hat{H}$ -作用。此外, 理想是 H -理想当且仅当它是 $\hat{H}$ -理想。此外, 很明显一些性质得以保持, 例如, H -简单性等价于 $\hat{H}$ -简单性; H -素性等价于 $\hat{H}$ -素性, 等等。

引理 5. 令, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, H, K$ 为结合代数, 并假设 $\mathcal{A}$ 具有广义 H -作用且 $\mathcal{B}$ 具有广义 K -作用。然后, $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$ 有一个广义的 $\hat{H} \otimes_{\mathbb{F}} \hat{K}$ -作用。

证明. 注意, 我们有一个由两个同态的张量积和自然嵌入组成的代数同态:

$$\hat{H} \otimes_{\mathbb{F}} \hat{K} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{F}} \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}).$$

容易验证这个组合满足获得广义 $\hat{H} \otimes \hat{K}$ 作用在 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 上的条件。□

特别地, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 具有一个广义的 $H \otimes K$ -作用, 并且 H 和 K 分别通过 $H \otimes \text{Id}_{\mathcal{B}}$ 和 $\text{Id}_{\mathcal{A}} \otimes K$ 作用于 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 。

引理 6. 设 $\mathcal{A}$ 是在代数闭域 $\mathbb{F}$ 上一个 H -单模, 并且 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{A}$ -双模的 H -线性同态。然后, 存在一个 $\lambda \in \mathbb{F}$, 使得 $f(x) = \lambda x$, 对于每个 $x \in \mathcal{A}$ 。

证明. 令 $\mathcal{E} \subseteq \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ 为由 $\mathcal{A}$ 的所有左乘和右乘以及 H 的像生成的子代数。然后, $\mathcal{A}$ 是一个简单的 $\mathcal{E}$ -模, 而 f 是一个 $\mathcal{E}$ -自同态。由于 $\mathcal{A}$ 是有限维的且 $\mathbb{F}$ 是代数闭合的, Schur 引理给出 $f \in \mathbb{F}$ 。□

引理 7. 设 $\mathcal{A}$ 是在代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的有限维 H -单代数。令 $a, b \in \mathcal{A}$ 满足 $(h \cdot a)xb = (h \cdot b)xa$, 对于所有的 $x \in \mathcal{A}$ 和 $h \in H \cup \{\text{Id}_{\mathcal{A}}\}$ 。那么, $\{a, b\}$ 是线性相关的。

证明. 假设 $a \neq 0$, 并考虑由

$$\sum x_i(h_i \cdot a)y_i \mapsto \sum x_i(h_i \cdot b)y_i, \quad x_i, y_i \in \mathcal{A}.$$

给出的映射 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 。该映射是良定义的。事实上, 假设 $\sum x_i(h_i \cdot a)y_i = 0$ 。然后, 对于每个 $x \in \mathcal{A}$, 都有

$$0 = \sum x_i(h_i \cdot a)y_i x b = \sum x_i(h_i \cdot b)y_i x a = \left(\sum x_i(h_i \cdot b)y_i \right) x a.$$

由于 $\mathcal{A}$ 是 H -素元, 得到 $\sum x_i(h_i \cdot b)y_i = 0$ 。现在, 很明显 f 是一个 H -线性双模同态。因此, $f(x) = \lambda x$, $\forall x \in \mathcal{A}$ 对于某些 $\lambda \in \mathbb{F}$ (定理 6)。特别是对于任意的 $x, y \in \mathcal{A}$,

$$xby = f(xay) = \lambda xay.$$

这给出了 $b = \lambda a$ 。 □

以下对我们而言并非必要; 然而, 它本身是有趣的, 并且是经典情形到广义 H -作用情况的直接推广。

命题 8. 设 $\mathcal{A}$ 是在代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的一个有限维 H -单代数, 并且 $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个 $\mathbb{F}$ -线性无关集。设 $b_1, \dots, b_m \in \mathcal{A}$ 满足

$$\sum_{i=1}^m a_i x(h \cdot b_i) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{A}, h \in H \cup \{\text{Id}_{\mathcal{A}}\}.$$

然后, $b_1 = \dots = b_m = 0$ 。

证明. 证明将通过归纳法进行, 基数为 m 。如果 $m = 1$, 则结果成立, 因为 $\mathcal{A}$ 是 H -素数。所以, 设 $m > 1$ 并假设 $b_m \neq 0$ 。然后,

$$\sum_{i=1}^m a_i (x(h \cdot b_m)y)b_i = 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{A}, \forall h \in H \cup \{\text{Id}_{\mathcal{A}}\}.$$

然而, 对于每个 $x \in \mathcal{A}$, 都有 $a_m x(h \cdot b_m) = -\sum_{i=1}^{m-1} a_i x(h \cdot b_i)$ 。因此,

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i x((h \cdot b_m)yb_i - (h \cdot b_i)yb_m), \quad \forall x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{A}.$$

通过归纳, 对于每个 $i = 1, 2, \dots, m-1$, 都有 $(h \cdot b_m) y b_i - (h \cdot b_i) y b_m = 0$, $\forall y \in \mathcal{A}$. 从定理 7, $b_i = \lambda_i b_m$, 对于某个 $\lambda_i \in \mathbb{F}$, 对于每个 $i = 1, \dots, m-1$. 设 $\lambda_m = 1$. 因此, 得到 $\sum_{i=1}^m (\lambda_i a_i) x b_m = 0$, 对于每个 $x \in \mathcal{A}$. 由于 $b_m \neq 0$ 和 $\mathcal{A}$ 是 H -素数, 从而得到 $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0$, 这产生了矛盾. $\square$

定理 9. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限维的 H -单代数, 而 $\mathcal{S}$ 是一个中心的 K -单代数, 它们都是定义在一个代数闭域 $\mathbb{F}$ 上. 然后, $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}$ 是一个 $H \otimes_{\mathbb{F}} K$ -单代数.

证明. 令 $I \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{S}$ 是一个非零 $H \otimes K$ -理想. 令 $0 \neq x = \sum_{i=1}^k a_i \otimes s_i \in I$ 使得 k 是极小的. 我们可以假设 $\{s_1, \dots, s_k\}$ 是 $\mathbb{F}$ -线性无关的. 然后,

$$\begin{aligned} I \ni (a_k r \otimes 1) & ((h \otimes \text{Id}_{\mathcal{S}}) \cdot x) - x(r(h \cdot a_k) \otimes 1) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (a_k r(h \cdot a_i) - a_i r(h \cdot a_k)) \otimes s_i, \quad \forall r \in \mathcal{A}, \forall h \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

由 k 的最小性, 这样的元素必须是 0. 由于 $\{s_1, \dots, s_{k-1}\}$ 是线性无关的, $a_i r(h \cdot a_k) = a_k r(h \cdot a_i), \forall r \in \mathcal{A}, \forall h \in H$, 并且对于每个 $i = 1, \dots, k-1$. 从定理 7 可知, 对于某个 $\lambda_i \in \mathbb{F}$, 有 $a_i = \lambda_i a_k$. 因此, 我们得到 $k = 1$. 从而存在一个非零元素 $a_0 \otimes s_0 \in I$.

现在, 我们将证明 $I = \mathcal{A} \otimes \mathcal{S}$. 由于 $\mathcal{A}$ 是 H -单的, 从而有 $\hat{\mathcal{A}}(H \cdot a)\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, 其中 $\hat{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 的单位化. 因此,

$$(2) \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad a \otimes s_0 \in (\hat{\mathcal{A}} \otimes 1) ((H \otimes \text{Id}_{\mathcal{S}}) \cdot (a_0 \otimes s_0)) (\hat{\mathcal{A}} \otimes 1) \subseteq I.$$

现在, 由于 $\mathcal{S}$ 是单值的且 K -单的, 我们可以找到 $u_i, v_i \in \mathcal{S}$ 和 $k_i \in K$ 使得 $\sum_{i=1}^n u_i(k_i \cdot s_1)v_i = 1$. 由于 $\mathcal{A}$ 是 H -单的, $\mathcal{A}a_0\mathcal{A} \neq 0$. 因此, 我们可以找到 $x, y \in \mathcal{A}$ 使得 $xa_0y \neq 0$. 最后,

$$\begin{aligned} I \ni \sum_{i=1}^n (x \otimes u_i) & ((\text{Id}_{\mathcal{A}} \otimes k_i) \cdot (a_0 \otimes s_0)) (y \otimes v_i) \\ &= xa_0y \otimes \left(\sum_{i=1}^n u_i(k_i \cdot s_0)v_i \right) = xa_0y \otimes 1. \end{aligned}$$

从 (2), 我们得到 $a \otimes 1 \in I$, 对于所有 $a \in \mathcal{A}$. 这给出了 $I = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}$. 证明完毕. $\square$

3.3. **广义主要结果.** 我们已经完成了所有步骤来陈述我们的主要结果的一个（部分）推广。

定理 10. 我们令 H 和 K 为酉结合代数，令 $\mathcal{A}$ 为具有广义 H -作用的有限维结合代数， $\mathcal{S}$ 为具有广义 K -作用的酉有限维结合代数，其中 $\mathcal{S}$ 是中心化的， K 是单的，所有这些都特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上。假设 $J(\mathcal{A})$ 是 H 不变的，并且 $\mathcal{A}$ 是其 H 半单部分与 $J(\mathcal{A})$ 之和。那么，

$$\exp^{H \otimes_{\mathbb{F}} K}(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}) = \dim \mathcal{S} \cdot \exp^H(\mathcal{A}).$$

证明. 存在 $\mathcal{A} = (\mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_m) + J(\mathcal{A})$ ，其中每个 $\mathcal{B}_i$ 都是 H -单且有限维的。从定理 5， $\mathcal{A} \otimes \mathcal{S}$ 有一个 $H \otimes K$ 作用。此外，有

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{S} = (\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{S} \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_m \otimes \mathcal{S}) + J(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{S}.$$

显然每个 $\mathcal{B}_i \otimes \mathcal{S}$ 都是一个 $H \otimes K$ -子代数，并且它是 $H \otimes K$ -单的（定理 9）。另外， $J(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{S}$ 是一个 $H \otimes K$ -理想并且它是幂零的。因此，证明步骤与定理 2 的证明相同，即 $\mathcal{B}_{i_1} J(\mathcal{A}) \cdots J(\mathcal{A}) \mathcal{B}_{i_t} \neq 0$ 当且仅当 $(\mathcal{B}_{i_1} \otimes \mathcal{S})(J(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{S}) \cdots (J(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{S})(\mathcal{B}_{i_t} \otimes \mathcal{S}) \neq 0$ 。然后，我们使用公式 (1)。□

作为前面定理的特例，我们有：

推论 11. 令 $\mathcal{A}$ 是一个在特征为零的代数闭域上的有限维结合代数。

- (1) 设 G 是一个阿贝尔群，并考虑一个有限维的单位 G -分级单代数 $\mathcal{S}$ 和在 $\mathcal{A}$ 上的一个 G -分级。然后， $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}$ 通过 $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{S})_g = \sum_{g_1 g_2 = g} \mathcal{A}_{g_1} \otimes \mathcal{S}_{g_2}$ 是 G 阶的，且

$$\exp^G(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}) = \dim \mathcal{S} \cdot \exp^G(\mathcal{A}).$$

- (2) 设 G_1 和 G_2 是（不一定是交换的）群，并考虑一个 G_1 -分级在 $\mathcal{A}$ 上和有限维单位 G_2 -分级单代数 $\mathcal{S}$ 。然后， $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}$ 通过 $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{S})_{(g_1, g_2)} = \mathcal{A}_{g_1} \otimes \mathcal{S}_{g_2}$ 被赋予 $G_1 \times G_2$ 级，且

$$\exp^{G_1 \times G_2}(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}) = \dim \mathcal{S} \cdot \exp^{G_1}(\mathcal{A}).$$

- (3) 设 $\mathcal{S}$ 是一个有限维的带有单位元的 $*$ -单结合代数，并且带有对合，而 $\mathcal{A}$ 被赋予了一个使得 $\mathcal{A} = \mathcal{B} + J(\mathcal{A})$ 成立的对合，其

中 $\mathcal{B}$ 是 $*$ -半单的。然后, $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}$ 通过 $(a \otimes s)^* = a^* \otimes s^*$ 有一个对合, 并且

$$\exp^*(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}) = \dim \mathcal{S} \cdot \exp^*(\mathcal{A}).$$

- (4) 设 H 是一个霍普夫代数, 其反同态的平方是恒等映射。假设 $\mathcal{A}$ 配备了一个 H -作用, 并且 $\mathcal{S}$ 是一个有限维单位结合代数, 配备了一个 H -作用, 在这个作用下它是 H -单的。然后, $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}$ 有一个 H -作用, 并且

$$\exp^H(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{S}) = \dim \mathcal{S} \cdot \exp^H(\mathcal{A}).$$

证明. 为了应用定理 10, 只需证明 $J(\mathcal{A})$ 在额外结构下是不变的。情况 (1) 和 (2) 由 [8, Corollary 3.3] 得出 (也由 [9, Theorem 2.1] 得出)。情况 (3) 是显然的。情况 (4) 是 [8, Theorem 3.2]。□

对于系数在一个代数中的矩阵代数的特殊情况, 我们有:

推论 12. 令 $\mathcal{A}$ 是一个在特征为零的代数闭域上的有限维结合代数和 $n \in \mathbb{N}$ 。

- (1) 假设 G 是一个交换群, 且 $\mathcal{A}$ 和 $M_n(\mathbb{F})$ 被赋予了 G -分级。然后, $M_n(\mathcal{A})$ 是 G -阶的并且

$$\exp^G(M_n(\mathcal{A})) = n^2 \exp^G(\mathcal{A}).$$

- (2) 假设 $\mathcal{A}$ 和 $M_n(\mathbb{F})$ 装备有对合, 使得 $\mathcal{A} = \mathcal{B} + J(\mathcal{A})$ 中 $\mathcal{B}$ 是 $*$ -半单。然后, $M_n(\mathcal{A})$ 有一个对合, 并且

$$\exp^*(M_n(\mathcal{A})) = n^2 \exp^*(\mathcal{A}).$$

- (3) 设 H 是一个霍普夫代数, 其反元素的平方是恒等变换, 并假设 $\mathcal{A}$ 和 $M_n(\mathbb{F})$ 被赋予了 H 作用。然后, $M_n(\mathcal{A})$ 具有一个 H -作用, 并且

$$\exp^H(M_n(\mathcal{A})) = n^2 \exp^H(\mathcal{A}).$$

证明. 注意 $\mathcal{S} = M_n(\mathbb{F})$ 是一个中心单结合代数。因此, 当赋予额外结构时, 它将保持为中心且单的。结果是前一推论的一个特例。□

致谢

我们感谢 Javier Sánchez Serdà 博士指出了 [11] 的备注 1.5。

REFERENCES

- [1] E. Aljadeff, A. Giambruno, C. Procesi, A. Regev, *Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras*. American Mathematical Society Colloquium Publications 66. American Mathematical Society, Providence, RI, 2020.
- [2] A. Berele, *Cocharacter sequences for algebras with Hopf algebra actions*, Journal of Algebra **185** (1996), 869–885.
- [3] M. Brešar, *Introduction to noncommutative algebra*. Universitext. Springer, Cham, 2014.
- [4] T. de Mello, *If $M_n(R)$ and $M_m(R)$ satisfy the same polynomial identities is it true that $m = n$?*, <https://mathoverflow.net/q/116698> URL (version: 2013-05-13).
- [5] A. Giambruno, M. Zaicev, *Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate*, Advances in Mathematics **142** (1999), 221–243.
- [6] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [7] A. Gordienko, *Amitsur’s conjecture for associative algebras with a generalized Hopf action*, Journal of Pure and Applied Algebra **217** (2013), 1395–1411.
- [8] A. Gordienko, *Co-stability of radicals and its applications to PI-theory*, Algebra Colloquium **23** (2016), 481–492.
- [9] A. Kelarev, J. Okniński, *The Jacobson radical of graded PI-rings and related classes of rings*, Journal of Algebra **186** (1996), 818–830.
- [10] A. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 87, American Mathematical Society, 1991.
- [11] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*. Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, NY, 2012.

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO, SP, BRAZIL

Email address: `tcmello@unifesp.br`

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, SP, BRAZIL

Email address: `fyyasumura@ime.usp.br`