

无穷多个对 Lovász 猜想的反例

Aida Abiad^{*†} Frederik Garbe[‡] Xavier Povill[§]
Christoph Spiegel[¶]

Abstract

受 Ryser 著名猜想的启发, 该猜想将最大匹配与 r 分部 r 一致超图中的最小顶点覆盖联系起来, Lovász 提出一个更强的猜想。它指出, 通过移除 $r - 1$ 个顶点, 总是可以减少匹配数。Clow、Haxell 和 Mohar 最近利用一个阶数为 102 的 3 正则图的线图, 反驳了该猜想在 $r = 3$ 上的成立。在此基础上, 我们描述了一个基于广义彼得森图的简单无穷反例族, 针对 $r = 3$ 的情况, 并给出了 $r = 4$ 的具体反例。

1 介绍

令 H 为一个 r -一致的超图。匹配数 $\nu(H)$ 是成对不相交边的最大数量, 而顶点覆盖数 $\tau(H)$ 是与 H 的每条边都相交的顶点集的最小基数。此外, 我们说如果存在一个划分顶点集的 H , $V_H = V_1 \cup \dots \cup V_r$, 使得对于每一个 $e \in E_H$ 和 $1 \leq i \leq r$ 都有 $|e \cap V_i| = 1$ 成立, 则 H 是 r -部分的。从上述定义立即得出

$$\nu(H) \leq \tau(H) \leq r \nu(H).$$

一般而言, 这两个不等式很容易被证明是紧的。然而, 在特定情况下, 对于 r -部 H , Ryser 猜想 (首次明确陈述于 Henderson 1971 年的论文 [19] 中) 为

$$\tau(H) \leq (r - 1) \nu(H).$$

^{*}a.abiad.monge@tue.nl, Department of Mathematics and Computer Science, Eindhoven University of Technology, The Netherlands

[†]Department of Mathematics and Data Science, Vrije Universiteit Brussel, Belgium

[‡]garbe@informatik.uni-heidelberg.de, Institute of Computer Science, Heidelberg University, 69120 Heidelberg, Germany.

[§]xavier.povill@upc.edu, Department of Mathematics, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain

[¶]spiegel@zib.de, AI in Society, Science, and Technology, Zuse Institute, Germany

对于 $r = 2$ ，这是由于 König 定理成立的。除此之外，该猜想仅知对情况 $r = 3$ [2] 以及超图的特殊族 [15, 5] 成立。

Ryser 猜想的一个潜在证明策略包括通过迭代移除 $r - 1$ 个顶点来构造顶点覆盖，以减少匹配数。Lovász 在他 1975 年的博士论文 [24] 中以及后来通过 Füredi 在 1988 年的一篇综述 [16] 中普及的观点认为，实际上应该可以实现这一点。

猜想 1. (Lovász) 如果 H 是一个 r 部 r 均匀超图，并且包含至少一条边，那么存在一组 $r - 1$ 个顶点，删除这组顶点可以减少其匹配数。

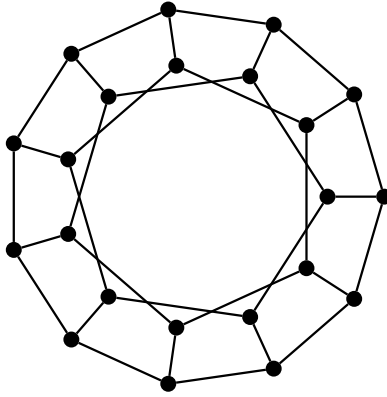


Figure 1: 3-正则广义彼得森图 $GP(11, 2)$ ，该图有 22 个顶点，其线超图是 Lovász 猜想的反例对于 $r = 3$ 。它推广到无限族图 $GP(5k + 11, 2)$ ，其线超图是 Lovász 猜想的反例对于 $r = 3$ 和任何 $k \geq 0$ 。

情况 $r = 2$ 也遵循 König 定理，因为从最小顶点覆盖中移除任何顶点都会创建一个具有减少一个顶点覆盖数的图，因此匹配数也会减少一个。

然而，尽管 Aharoni[2] 的结果如此，这个猜想直到最近对于 $r = 3$ 仍然悬而未决。事实证明，理由充分：Clow、Haxell 和 Mohar [8] 找到了两个针对情况 $r = 3$ 的反例，即 Biggs-Smith 图和 $F168D^1$ 的线超图，这两个三次图的阶数分别为 102 和 168。几个自然的问题随之产生：

1. 是否可以构造一个无限的反例族? [8, Question 4.1]
2. 是否存在任何 $r \geq 4$ 的反例? [8, Question 4.2]
3. 这两个图的性质，特别是它们不是凯莱图这一点，与此应用相关吗? [8, Question 4.4]。

我们对第一个问题给出了肯定的回答，通过证明广义彼得森图的线超图 $GP(5k + 11, 2)$ 构成了这样一个无限族系，对于任意的 $k \geq 0$ 。请注意，这个家族中的最小

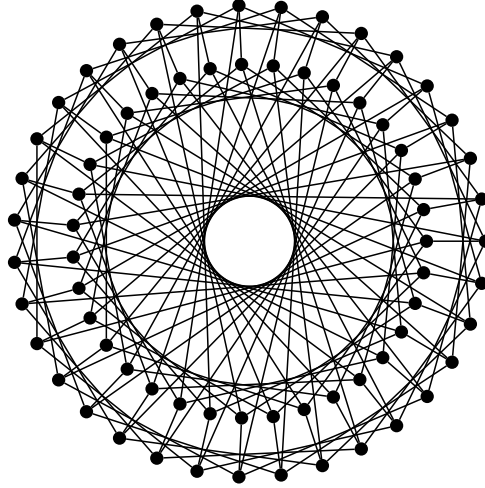


Figure 2: 4-正则图 $\text{CGP}(2, \mathbb{Z}_{35}; 5, 7; 15, 0)$ 在 70 个顶点上, 其线超图是针对 $r = 4$ 的 Lovász 猜想的反例。

反例是来自一个阶数为 22 的三次图的阶数 33, 参见图 1, 这使得它比大吉斯-史密斯图的线超图显著更小且更容易分析。

定理 2. 存在一个无限的三次图族, 其线超图是 Lovász 猜想对于 $r = 3$ 的反例。

我们也对第二个问题给出了初步的回答, 通过提供几种具体的反例来说明下一个情况 $r = 4$, 这些反例如同来源于正则图的线超图一样得出。这些构造要描述起来复杂得多, 并且其中最小的一个阶数为 140, 源自一个四次图的阶数 70, 请参见 Figure 2。

定理 3. 存在四次图的线超图是 Lovász 猜想对于 $r = 4$ 的反例。

我们还可以回答第三个问题: 虽然我们使用的广义彼得森图不是凯莱图, 但我们确实找到了一个具体的顶点数为 36 的三次凯莱图的例子, 见图 3, 以及一个顶点数为 96 的四次凯莱图。此外, 虽然 Biggs-Smith 图和 F168D 都是边传递的 (而且 Biggs-Smith 图也是距离传递的), 我们的例子都不是这样的。Biggs-Smith 图和 F168D 也是哈密顿图, 而我们无限族中的成员 $\text{GP}(5k + 11, 2)$ 在 $k \equiv 0 \pmod 6$ 时不是哈密顿图。

最后, 我们注意到我们找到的所有示例都不与 Ryser 的猜想矛盾, 甚至都不是其极端情况, 这个问题本身也是相关的 [1, 18]。对于 $r = 3$ 而言这是不足为奇的, 因为在这种情况下 Haxell、Narins 和 Szabó [18] 证明了 Ryser 猜想的所有极端图也满足 Lovász 的猜想。我们对 $r = 4$ 的反例仍然成立这一事实表明, 这种现象可能适用于任何均匀性。

¹一个图表 6 字符串和 F168D 图的一些性质可以在 <http://atlas.gregas.eu/graphs/65> 找到。

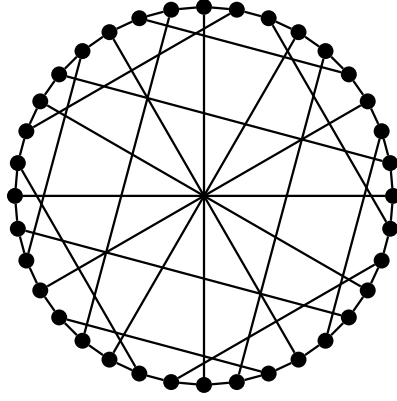


Figure 3: 一个 3 正则的凯莱图在 $\mathbb{Z}_{36}$ 中，其线超图是 Lovász 猜想在 $r = 3$ 上的反例。

概述。第 2 节回顾了关于 r -一致超图、线超图以及我们将广泛使用的关键独立数引理的基本概念。第 3 节介绍了广义 Petersen 图的家族 $GP(n, 2)$ ，并证明了它们的线超图形成了无穷多对 Lovász 猜想在 $r = 3$ 上的反例，从而建立了定理 2。第 4 节构造了第一个四次反例，建立了定理 3，并解释了用于找到这些反例的计算搜索方法。最后，第 5 节提供了简短的结论性评论和开放问题。

2 预备知识

一个线超图 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$ 的 r -正则图 G 被定义为一个 r -一致超图，其顶点集是 E_G ，且其超边对应于在 G 中的关联集合，即 $V_{\mathcal{L}} = E_G$ 和 $e_v = \{e_1, \dots, e_r\} \in E_{\mathcal{L}}$ 当且仅当 $\{e_1, \dots, e_r\}$ 是一个顶点 $v \in V_G$ 的所有相关联的边的集合。注意 $\nu(\mathcal{L}) = \alpha(G)$ ，其中 $\alpha(G)$ 表示独立数的 G 。

建立我们结果所需的主要工具是以下引理，该引理首次隐含地陈述于案例 $r = 3$ 中，在 [8, Lemma 2.2]，并给出了条件 G ，在此条件下线超图 $\mathcal{L}$ 是对 Lovász 猜想的一个反例。我们为了完整性包括了一个简短的证明。

引理 4. 设 G 是一个满足以下两个性质的 r -正则图：

- (i) G 是 r -边可着色的。
- (ii) 删除任何 $r - 1$ 边及其顶点不会减少独立数。

那么图 G 的线超图 $\mathcal{L}$ 是对猜想 1 的一个 r -一致反例。

Proof. 首先注意，对于任何 r -正则图 G

$$\nu(\mathcal{L}) \leq \alpha(G). \quad (1)$$

为了证明这一点, 设 $S(v) = \{e \in E_G \mid v \in e\}$ 表示给定顶点 v 的所有关联边的集合。根据线超图的定义, $\mathcal{L}$ 中的任何匹配 $M \subseteq E_{\mathcal{L}}$ 都可以写成 $M = \{S(v) \mid v \in I\}$ 的形式, 其中 $I \subseteq V_G$ 是 G 中的一些顶点集合。由于 M 是一个匹配, 因此这些 $S(v)$ 两两不相交, 并且 I 因此在 G 中是一个独立集。

假设现在 G 满足性质 (i) 和 (ii)。注意, $\mathcal{L}$ 是 r 部的, 因为 G 可以通过 (i) 进行 r 边着色。令 $S \subseteq V_{\mathcal{L}} = E_G$ 和 $|S| = r - 1$ 是任意但固定的, 并考虑 $G' = G - (\bigcup_{e \in S} e)$ 以及 $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(G')$, 并观察到 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L} - S$ 。

我们声称

$$\nu(\mathcal{L}') \geq \alpha(G). \quad (2)$$

为了证明这一点, 设 $I \subseteq V_G$ 是在 G 中由 (ii) 给出的对于 S 的最大独立集, 即 $I \cap (\bigcup_{e \in S} e) = \emptyset$ 。对于任意两个不同的顶点 $v_1, v_2 \in I$, 两条关联边的集合 $S(v_1)$ 和 $S(v_2)$ 是不相交的, 因此 $M = \{S(v) \mid v \in I\}$ 在 $\mathcal{L}$ 中形成一个匹配。此外, 由于 $I \cap (\bigcup_{e \in S} e) = \emptyset$, 每个 $S(v)$, $v \in I$, 都作为超边出现在 $\mathcal{L}(G')$ 中, 因此 $|M| = |I|$ 。结合 (1) 和 (2), 我们得到

$$\nu(\mathcal{L} - S) \geq \nu(\mathcal{L}') \stackrel{(2)}{\geq} \alpha(G) \stackrel{(1)}{\geq} \nu(\mathcal{L}),$$

因此 $\mathcal{L}$ 是对 Lovász 猜想的一个反例。 $\square$

3 Theorem 2 的证明

广义佩特森图于 1950 年由 Coxeter [13] 引入, 并在 1969 年由 Watkins [31] 命名。

定义 5. 给定 $n \geq 3$ 和 $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, 广义佩特森图 $\text{GP}(n, k)$ 是一个连通三次图, 其顶点集为 $V_{\text{GP}(n, k)} = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$, 边集为

$$E_{\text{GP}(n, k)} = \{a_i b_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{a_i a_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{b_i b_{i+k} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

对于给定的 $i \in \mathbb{Z}_n$, 我们称 $R_i := \{a_i, b_i\}$ 为第 i 级阶梯。对于 $i, \ell \in [n]$, 我们定义 $S_{i, \ell} := \bigcup_{j=i}^{i+\ell-1} R_j$ 为从 i 开始的 ℓ 个连续梯级的并集。

为了证明 Theorem 2, 只需构造一组满足来自引理 4 的假设的无限族三次图。我们将展示广义彼得森图 $\text{GP}(5k+11, 2)$, 其中 $k \geq 0$, 构成这样的一个无限族。我们将使用关于 $\text{GP}(n, 2)$ 的独立数的以下两个已知结构结果。

定理 6. [14, Theorem 2.5] 如果 $n \geq 5$, 那么 $\alpha(\text{GP}(n, 2)) = \lfloor 4n/5 \rfloor$ 。特别是, $\alpha(\text{GP}(5k+11, 2)) = 4k+8$ 。

引理 7. [14, Lemma 2.4] $\alpha(\text{GP}(n, 2)[S_{i,5}]) \leq 4$ 对任意的 $1 \leq i \leq n$ 。

主要步骤封装在以下定理中，该定理验证了 (ii) 条件的引理 4。

定理 8. 令 $n = 5k + 11$ 对于 $k \geq 0$ 。然后，对于任意两条边 $uv, wx \in E_{\text{GP}(n, 2)}$ ， $\alpha(\text{GP}(n, 2) - \{u, v, w, x\}) = \alpha(\text{GP}(n, 2))$ 。

Theorem 8 的证明将通过 k 进行归纳来完成。 $n = 11, 16, 21$ 的基本情况可以通过计算轻易验证。

引理 9. 如果 $n \geq 26$ ，对于任意两条边 $uv, wx \in E_{\text{GP}(n, 2)}$ ，存在一个指标 $i \in [n]$ 使得 $\{u, v, w, x\} \cap S_{i,10} = \emptyset$ 。

这个引理背后的直觉很简单： $\text{GP}(n, 2)$ 的每条边都包含在最多 3 个连续梯级（在 $[n]$ 的循环顺序中）的片段中，因此在移除 2 条边后，我们至少剩下 $n - 6$ 个梯级，这些梯级被分成两个连续的片段（或者只有 1 个，如果这两条边重叠了梯级）。因此，如果 $n - 6 \geq 19$ ，其中一个片段的长度至少为 10。现在我们将提供一个更严谨的证明。

Proof. 给定一个顶点 $z \in \text{GP}(n, 2)$ ，令 $r(z)$ 表示 “ z 的步”，即满足 $z \in R_i$ 的 $i \in [n]$ 。由 $\text{GP}(n, 2)$ 的对称性，我们可以假设 w.l.o.g. $r(u) = \min\{r(s) \mid s \in \{u, v, w, x\}\} = 1$ 。然后 $r(v) \in \{1, 2, 3\}$ 。此外，我们可以假设 w.l.o.g., $r(w) \leq r(x)$ 。

1. 情形： $r(w) > n/2$ 。那么 $r(x) > n/2$ 和 $I \cap \{r(s) \mid s \in \{u, v, w, x\}\} = \emptyset$ 对于 $I := \{4, \dots, n/2\}$ 。因此，我们可以取 $i = 4$ 作为所需的指数，因为 $|I| \geq 10$ 对于 $n \geq 26$ 。

2. 情形： $r(w) \leq n/2$ 。然后 $r(x) \leq n/2 + 2$ 并且进而 $I \cap \{r(s) \mid s \in \{u, v, w, x\}\} = \emptyset$ 对于 $I := \{n/2 + 3, \dots, n\}$ 。因此，我们可以取 $i = n/2 + 3$ 作为所需的指标，因为 $|I| \geq 10$ 对于 $n \geq 26$ 。□

Theorem 8 的证明。 $k = 0, 1, 2$ 的情况通过计算搜索得到验证。假设对于某个 $k \geq 2$ 该陈述为真，我们将证明该陈述对于 $k + 1$ 也为真。设 $n = 5(k + 1) + 11$ ，并选择两条任意的边 $uv, wx \in E_{\text{GP}(n, 2)}$ 。由于 $n \geq 26$ ，由引理 9 我们可以找到一个 $i \in [n]$ 使得 $\{u, v, w, x\} \cap S_{i,10} = \emptyset$ 。通过循环地移动梯级的标签，我们可以假设 $i = n - 9$ 。

考虑图 $\tilde{G}$ ，其顶点为 $V(\tilde{G}) := \bigcup_{i=1}^{n-5} R_i$ ，并由 $\text{GP}(n, 2)$ 诱导的边以及边 $a_{n-5}a_1$ 、 $b_{n-5}b_2$ 和 $b_{n-6}b_1$ 组成。由于 $\tilde{G} \cong \text{GP}(5k + 11, 2)$ 并且根据归纳假设，存在一个独立集 $\tilde{I} \subseteq V(\tilde{G})$ ，使得 $\{u, v, w, x\} \cap \tilde{I} = \emptyset$ 和 $|\tilde{I}| = 4k + 8$ 。

由引理 7， $\tilde{I}$ 最多只能与 $R_{n-9}, \dots, R_{n-5}$ 中的 4 个相交。令 $i_0 \in [n - 9, n - 5]$ 为这样的，使得 $R_{i_0} \cap \tilde{I} = \emptyset$ 。我们将按照以下方式构造一个大小为 $|I| = 4k + 12$ 的独立集 $I \subseteq V(G)$ ：

- (i) 对于所有满足 $z \in S_{1,i_0}$ 的 $z \in \tilde{I}$, 将 z 添加到 I 。
- (ii) 对所有满足 $i > i_0$ 的 $a_i \in \tilde{I}$, 将 a_{i+5} 加到 I 上。
- (iii) 对所有满足 $i > i_0$ 的 $b_i \in \tilde{I}$, 将 b_{i+5} 加到 I 上。
- (iv) 将 a_{i_0+1} 、 b_{i_0+2} 、 b_{i_0+3} 和 a_{i_0+4} 加到 I 中。

由于 $\{u, v, w, x\} \subseteq S_{1,i_0}$, $\tilde{I} \cap \{u, v, w, x\} = \emptyset$ 和 $I \cap S_{1,i_0} = \tilde{I} \cap S_{1,i_0}$, 我们有 $I \cap \{u, v, w, x\} = \emptyset$ 。此外, I 是 G 中的一个独立集。确实, $I \cap S_{1,i_0}$ 是 $G[S_{1,i_0}]$ 中的一个独立集, 因为它仅包含在 (i) 中选择的顶点。 $I \cap S_{i_0,5}$ 是 $G[S_{i_0,5}]$ 中的一个独立集, 因为它只包含在 (iv) 中选择的顶点。 $I \cap S_{i_0+5,(n-i_0-5+1)}$ 是 $G[S_{i_0+5,(n-i_0-5+1)}]$ 中的一个独立集, 因为它只包含在 (ii) 和 (iii) 中选择的顶点。因此, 剩下的唯一需要检查的重要边是连接这三个段落的九条边。由于 $R_{i_0} \cap I = \emptyset$ 和 $b_{i_0+1} \notin I$, 三条边中的任意一条 $a_{i_0}a_{i_0+1}$, $b_{i_0}b_{i_0+2}$ 和 $b_{i_0-1}b_{i_0+1}$ 都不包含在 I 中。类似地, 由于 $R_{i_0+5} \cap I = \emptyset$ 和 $b_{i_0+4} \notin I$ 中没有三条边 $a_{i_0+5}a_{i_0+6}$, $b_{i_0+5}b_{i_0+7}$ 以及 $b_{i_0+4}b_{i_0+6}$ 包含在 I 中。最后, 由 (ii) 和 (iii) 可知, 边 $a_n a_1$, $b_{n-1} b_1$ 和 $b_n b_2$ 均不包含在 I 中, 否则边 $a_{n-5} a_1$ 、 $b_{n-6} b_1$ 和 $b_{n-5} b_2$ 之一将包含在 $\tilde{I}$ 中, 这与 $\tilde{I}$ 在 $\tilde{G}$ 中是独立的相矛盾。因此 $\alpha(\text{GP}(n, 2) - \{u, v, w, x\}) \geq |I| = 4k + 12 = \alpha(\text{GP}(n, 2))$ 。由于删除顶点只能减少独立数, 我们得出结论 $\alpha(\text{GP}(n, 2) - \{u, v, w, x\}) = \alpha(\text{GP}(n, 2))$ 。 $\square$

Theorem 2 的证明。我们需要验证, 对于 $k \geq 0$, $\text{GP}(5k + 11, 2)$ 的线超图是猜想 1 的一个有效反例。从引理 4 可知, 只需证明 $\text{GP}(5k + 11, 2)$ 是三边可着色的, 并且它满足条件 (ii)。3-边可着色性自 20 世纪 70 年代以来就已经为人所知 [6], 条件 (ii) 跟随于 Theorem 8。 $\square$

4 额外的反例

现在我们来描述上一节中未提到的额外反例。所有图的性质已经通过计算得到了验证。为了描述它们, 让我们定义以下一组 3-和 4-正则图。

定义 10. 给定 $m \geq 2$, 某个有限乘法群 G , 元素 $k_i \in G \setminus 0$ 满足 $k_i \neq (k_i)^{-1}$, 以及对于 $i \in \mathbb{Z}_m$ 的 $c_i \in \mathbb{Z}_m$, 凯莱广义彼得森图 $\text{CGP}(m, G; k_i; c_i)$ 具有顶点集 $\mathbb{Z}_m \times G$ 并连接顶点 (i, j) 到 $(i, j k_i)$ 和 $(i + 1, j c_i)$ 对于任意的 $i \in \mathbb{Z}_m$ 和 $j \in G$ 。

使用此定义, 我们可以列出在 Table 1 中的 $r = 3$ 的结果以及在 Table 2 中的 $r = 4$ 的结果。注意我们用 $G_i^{(n)}$ 表示阶为 n 的第 i 个小群, 并以乘法形式写它。

我们也为定义 10 提供一些额外的动力以及我们如何基于它计算探索构造的描述。Clow、Haxell 和 Mohar [8] 使用自同构群工具 [25, 26] 验证了没有在最 多 20 个顶点上的三次图产生 Lovász 猜想的反例。他们还检查了所有阶数不超过 300 [9,

Table 1: $r = 3$ 的反例概述。 $\mathbf{G}_3^{(36)}$ 的生成元有 f_1 阶为 4, f_2 阶为 3, f_3 阶为 2, 以及 f_4 阶为 3。

描述	属性
Biggs-Smith [8]	order 102, diameter 7, girth 9, edge- and distance-transitive, Hamiltonian
F168D [8]	order 168, diameter 9, girth 7, edge-transitive, Hamiltonian
see Figure 3	order 36, diameter 5, girth 7, Cayley graph in $\mathbf{G}_{39}^{(36)}$, Hamiltonian
GP(19, 7)	order 38, diameter 5, girth 7, Hamiltonian
GP(20, 6)	order 40, diameter 6, girth 7, Hamiltonian
GP(25, 9)	order 50, diameter 6, girth 7, Hamiltonian
GP(26, 8)	order 52, diameter 7, girth 7, Hamiltonian
GP(31, 11)	order 62, diameter 7, girth 7, Hamiltonian
GP(32, 10)	order 64, diameter 8, girth 7, Hamiltonian
CGP(2, $\mathbf{G}_3^{(36)}$; $f_2 f_3 f_4, f_1 f_2; f_2^2, f_2$)	order 72, diameter 6, girth 6, Hamiltonian
GP(37, 17)	order 74, diameter 8, girth 7, Hamiltonian
GP(38, 12)	order 76, diameter 9, girth 7, Hamiltonian
GP(43, 15)	order 86, diameter 9, girth 7, Hamiltonian
GP(44, 14)	order 88, diameter 10, girth 7, Hamiltonian
GP($5k + 11, 2$)	order $10(k + 2) + 2$, Hamiltonian iff $n \not\equiv 5 \pmod 6$ [3, Theorem 1]

Table 2: 反例概述对于 $r = 4$ 。群 $\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{35}$ 和 $\mathbb{Z}_{51}$ 以加法形式书写。群 $\mathbf{G}_3^{(42)}$ 是 $C_7 \times S_3$ 并具有生成元 f_1 阶为 2, f_2 阶为 7, 以及 f_3 阶为 3。群 $\mathbf{G}_4^{(42)}$ 是 $C_3 \times D_{14}$, 并且有生成元 f_1 阶为 2, f_2 阶为 3, 以及 f_3 阶为 7。群 $\mathbf{G}_{29}^{(48)}$ 是 $GL(2, 3)$, 其生成元有 f_1 阶为 2, f_2 阶为 3, f_3 阶为 4, f_4 阶为 4, 以及 f_5 阶为 2。群 $\mathbf{G}_{32}^{(48)}$ 是 $C_2 \times GL(2, 3)$ 并有生成元 f_1 阶为 2, f_2 阶为 3, f_3 阶为 4, f_4 阶为 4 以及 f_5 阶为 2。

描述	属性
$CGP(2, \mathbb{Z}_{35}; 5, 7; 15, 0)$, see Figure 2	order 70, diameter 5, girth 5, Hamiltonian
$CGP(2, \mathbf{G}_3^{(42)}; f_2 f_3, f_2^2 f_3; f_1 f_2, 1)$	order 84, diameter 5, girth 5, Hamiltonian
$CGP(2, \mathbf{G}_4^{(42)}; f_2 f_3, f_2 f_3^2; f_1 f_2, 1)$	order 84, diameter 5, girth 5, Hamiltonian
$CGP(3, \mathbb{Z}_{28}; 18, 19, 5; 18, 0, 14)$	order 84, diameter 6, girth 5, Hamiltonian
$CGP(2, \mathbf{G}_{29}^{(48)}; f_2 f_5, f_2 f_4; f_1 f_4, 1)$	order 96, diameter 5, girth 6, Cayley graph in $\mathbf{G}_{193}^{(96)}$, Hamiltonian
$CGP(2, \mathbf{G}_{32}^{(48)}; f_1 f_2, f_1 f_2 f_4; f_1 f_2 f_2^2 f_3)$	order 96, diameter 5, girth 6, Cayley graph in $\mathbf{G}_{200}^{(96)}$, Hamiltonian
$CGP(2, \mathbb{Z}_{51}; 3, 26; 47, 0)$	order 102, diameter 6, girth 5, Hamiltonian

[10, 11] 的三次边传递图, 并确定 Bigs-Smith 图和 F168D 是唯一两个满足引理 4 要求的此类图。我们最初验证了边传递性是否相关, 并检查基于凯莱图的反例是否存在, 通过核查最多有 47 [20] 个顶点的顶点传递图库, 这产生了给出在 Figure 3 中的三次 36-顶点示例。

该库不包含四次幂的示例。阶为 48 的顶点传递图已经被确定 [21], 但不容易获得。然后我们使用自同构群工具检查了阶为 22 的三次图, 这给出了在 Figure 1 中给出的具有 22 顶点的三次示例。Graphs 数据库 [12] 将其识别为 $GP(11, 2)$, 并通过搜索广义 Petersen 图提出在 section 3 中描述的族, 但也给出了进一步的例子, 请参见 Table 1。

基于此, 进一步寻找反驳 $r = 3$ 的例子以及更高统一性的反例的自然场所是彼得森图的替代和更广泛的推广。文献中最值得注意的是置换图和超级广义彼得森图。

定义 11 (置换图 [7, 28]). 对于给定的图 G 及其顶点的一个置换 α , 排列图 $P(G, \alpha)$ 由两个不相交的副本 G_1 和 G_2 组成, 这两个副本来自于 G , 其中顶点 $v \in G_1$ 通过一条边与 $\alpha(v) \in G_2$ 相连。如果 G 是一个在 n 个顶点上的循环, 那么得到的图被称为循环置换图, 并用 $CP(n, \alpha)$ 表示。

定义 12 (超级广义 Petersen 图 [29]). 给定整数 $m \geq 2$, $n \geq 3$ 和 $k_i \in \mathbb{Z}_n \setminus 0$, 对于 $k_i \neq -k_i$ 的 $i \in \mathbb{Z}_m$, 超级广义彼得森图 $\text{SGP}(m, n; k_i)$ 具有顶点集 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, 并将顶点 (i, j) 连接到 $(i, j + k_i)$ 和 $(i + 1, j)$, 对于任意的 $i \in \mathbb{Z}_m$ 和 $j \in \mathbb{Z}_n$.

备注 13. 请注意, 对于 d -正则的 G 以及任何置换, 置换图是 $(d + 1)$ -正则的。特别是, 循环置换图是 3-正则的。超级广义 Petersen 图要么是 3 或 4-正则的, 如果 $m = 2$ 和 4 对于 $m \geq 3$ 是正则的。显然 $\text{GP}(n, k) = \text{SGP}(2, n; 1, k)$ 对任何 n 和 k 以及 $\text{GP}(n, k) = \text{CP}(n, \alpha)$ 成立, 当 $\alpha(x) = kx$ 如果 k 和 n 是互质的。

置换图可能是洛瓦兹猜想反例的一个非常好的来源, 但已被证明在没有额外假设的情况下计算上过于昂贵而无法探索。超级广义彼得森图可以很容易地进行计算探索, 但被证明过于严格, 并且没有产生任何未被广义彼得森图涵盖的反例。定义 10 构成了两者之间的中间地带, 我们通过在 Python 中实现这些结构的详尽生成来探索它, 给定 m 和 G , 依赖于 SageMath [30], 特别是间隙 [17] 中的小群库 [4] 以及单击 [27] 来检查引理 4 的条件和幸福 [22, 23] 用于图规范化。我们主要探索了阶数达到大约 50 的 $m = 2$ 群以及阶数达到大约 30 的 $m = 3$ 群。² 简单的探索性搜索未发现有关 $m = 4$ 和 $m = 5$ 的有趣内容。

5 结论与展望

Clow、Haxell 和 Mohar [8, Conjecture 4.2] 已经询问了该猜想的一个较弱版本是否成立, 该版本仍然可以推导出 Ryser 猜想, 即是否可以始终找到 $k(r - 1)$ 个顶点用于某些 $1 \leq k \leq r - 1$, 其移除会使匹配数减少至少 k 。目前尚不清楚这里描述的任何反例是否与 Lovász 猜想的这个较弱版本相矛盾。我们通过计算验证了它仍然适用于一些较小阶的反例 $r = 3$ 。转向更高阶的图或考虑 $r = 4$ 的反例可能会产生不同的结果, 但通过计算进行此操作似乎不可行, 并且我们目前对这些构造的理解不足以纯粹从理论上确定该猜想是否适用于它们。

致谢

我们感谢 Patrick Morris 提醒我们注意这个问题。本研究部分得到了西班牙科学、创新和大学部拨款 PID2023-147202NB-I00 的支持。Aida Abiad 得到了 NWO (荷兰科学研究委员会) 通过 VL.Vidi.213.085 和 OCENW.KLEIN.475 拨款的支持。Frederik Garbe 的研究部分得到了 Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, 德国研究基金会) 通过项目编号 428212407 的支持。Xavier Povill 获得了由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的 Grant

²撰写时计算尚未完全完成, 因此我们无法保证较大结构的完整性。

PID2023-147202NB-I00, 以及 Universitat Politècnica de Catalunya 和 Banco Santander 提供的 FPI-UPC 奖学金。

References

- [1] A. Abu-Khazneh, J. Barát, A. Pokrovskiy, and T. Szabó. “A family of extremal hypergraphs for Ryser’s conjecture”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 161 (2019), pp. 164–177.
- [2] R. Aharoni. “Ryser’s conjecture for tripartite 3-graphs”. In: *Combinatorica* 21.1 (2001), pp. 1–4.
- [3] B. Alspach. “The classification of hamiltonian generalized Petersen graphs”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 34.3 (1983), pp. 293–312.
- [4] H. U. Besche, B. Eick, E. A. O’Brien, and M. Horn. *SmallGrp: The GAP Small Groups Library, Version 1.5.4*. <https://gap-packages.github.io/smallgrp/>. GAP package. 2024.
- [5] A. Bishnoi, S. Das, P. Morris, and T. Szabó. “Ryser’s Conjecture for t -intersecting hypergraphs”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 179 (2021), p. 105366.
- [6] F. Castagna and G. Prins. “Every generalized Petersen graph has a Tait coloring”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 40.1 (1972), pp. 53–58.
- [7] G. Chartrand and F. Harary. “Planar permutation graphs”. In: *Annales de l’institut Henri Poincaré. Section B. Calcul des probabilités et statistiques*. Vol. 3. 4. 1967, pp. 433–438.
- [8] A. Clow, P. Haxell, and B. Mohar. “A Counterexample to a Conjecture of Lovász”. In: *arXiv:2505.05339* (2025).
- [9] M. Conder and P. Dobcsanyi. “Trivalent symmetric graphs on up to 768 vertices”. In: *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 40 (2002), pp. 41–64.
- [10] M. Conder, A. Malnič, D. Marušič, and P. Potočnik. “A census of semisymmetric cubic graphs on up to 768 vertices”. In: *Journal of Algebraic Combinatorics* 23 (2006), pp. 255–294.
- [11] M. Conder and P. Potočnik. “Edge-transitive cubic graphs: Cataloguing and Enumeration”. In: *arXiv preprint arXiv:2502.02250* (2025).

- [12] K. Coolsaet, S. D’hondt, and J. Goedgebeur. “House of Graphs 2.0: A database of interesting graphs and more”. In: *Discrete Applied Mathematics* 325 (2023), pp. 97–107.
- [13] H. S. M. Coxeter. “Self-dual configurations and regular graphs”. In: *Bull. Am. Math. Soc.* 56 (1950), pp. 413–455.
- [14] J. Fox, R. Gera, and P. Stănică. “The Independence Number for the Generalized Petersen Graphs”. In: *Ars Combinatoria* 103 (2011).
- [15] N. Francetić, S. Herke, B. D. McKay, and I. M. Wanless. “On Ryser’s conjecture for linear intersecting multipartite hypergraphs”. In: *European Journal of Combinatorics* 61 (2017), pp. 91–105.
- [16] Z. Füredi. “Matchings and covers in hypergraphs”. In: *Graphs and Combinatorics* 4.1 (1988), pp. 115–206.
- [17] *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.14.0*. <https://www.gap-system.org>. The GAP Group. 2024.
- [18] P. Haxell, L. Narins, and T. Szabó. “Extremal hypergraphs for Ryser’s Conjecture”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 158 (2018), pp. 492–547.
- [19] J. R. Henderson. “Permutation decomposition of $(0,1)$ -matrices and decomposition transversals”. PhD thesis. California Institute of Technology, 1971.
- [20] D. Holt and G. Royle. “A census of small transitive groups and vertex-transitive graphs”. In: *Journal of Symbolic Computation* 101 (2020), pp. 51–60.
- [21] D. Holt, G. Royle, and G. Tracey. “The transitive groups of degree 48 and some applications”. In: *Journal of Algebra* 607 (2022), pp. 372–386.
- [22] T. Junttila and P. Kaski. “Engineering an efficient canonical labeling tool for large and sparse graphs”. In: *Proceedings of the Ninth Workshop on Algorithm Engineering and Experiments and the Fourth Workshop on Analytic Algorithms and Combinatorics*. Ed. by D. Applegate, G. S. Brodal, D. Panario, and R. Sedgewick. SIAM, 2007, pp. 135–149.
- [23] T. Junttila and P. Kaski. “Conflict Propagation and Component Recursion for Canonical Labeling”. In: *Theory and Practice of Algorithms in (Computer) Systems – First International ICST Conference, TAPAS 2011, Rome, Italy, April 18–20, 2011. Proceedings*. Ed. by A. Marchetti-Spaccamela and M. Segal. Vol. 6595. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2011, pp. 151–162.

- [24] L. Lovász. “On minimax theorems of combinatorics (Doctoral thesis, in Hungarian)”. In: *Math. Lapok* 26.3-4 (1975), pp. 209–264.
- [25] B. D. McKay et al. “Practical graph isomorphism”. In: (1981).
- [26] B. D. McKay and A. Piperno. “Practical graph isomorphism, II”. In: *Journal of symbolic computation* 60 (2014), pp. 94–112.
- [27] S. Niskanen and P. R. J. Östergård. *Cliquer User’s Guide, Version 1.0*. Tech. rep. T48. Espoo, Finland: Communications Laboratory, Helsinki University of Technology, 2003.
- [28] R. D. Ringeisen. “On cycle permutation graphs”. In: *Discrete mathematics* 51.3 (1984), pp. 265–275.
- [29] M. L. Saražin, W. Pacco, and A. Previtali. “Generalizing the generalized Petersen graphs”. In: *Discrete mathematics* 307.3-5 (2007), pp. 534–543.
- [30] The Sage Developers. *SAGEMATH, the Sage Mathematics Software System, Version 10.6*. <https://www.sagemath.org>. The Sage Developers. 2025.
- [31] M. E. Watkins. “A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs”. In: *Journal of Combinatorial Theory* 6.2 (1969), pp. 152–164.