

非广延和拟均匀黑洞热力学

Hernando Quevedo*

Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico
Dipartimento di Fisica and Icria, Università di Roma “La Sapienza” , Roma, Italy and
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

(10Dated: 2025 年 6 月 28 日)

摘要

我们研究黑洞的热力学性质，考虑到其熵在热力学和统计水平上的非广延性。为此，我们将 Rényi 熵解释为确定基本热力学方程的因素，该方程由一个拟齐次函数表示。因此，Rényi 参数成为必须在扩展热力学框架内处理的独立热力学变量。作为一个具体示例，我们使用几何热力学的形式主义来表明 Schwarzschild 黑洞对于某些 Rényi 参数值可以变得稳定。

关键词：非广延熵，扩展黑洞热力学，黑洞，几何热力学

arxiv:2506.21342v1 中译本

*Electronic address: quevedo@nucleares.unam.mx

I. 介绍

Bekenstein-Hawking 熵公式被认为是黑洞热力学发展的起点 [1, 2]。该公式确立了黑洞的熵完全由事件视界的面积决定，这与普通系统不同，在普通系统中，熵与系统的体积成正比。因此，熵最终成为一个非广延量。

另一方面，支持黑洞热力学有效性的主要结果之一是霍金的发现，在半经典引力理论中，一个黑洞像黑体一样辐射，并且相应的温度与从熵-面积关系得到的热力学温度一致。这一结果产生了一些怀疑，因为要推导出霍金的温度，假设了玻尔兹曼-吉布斯统计的有效性，然而这暗示熵是广延的。黑洞热力学中的一个额外不一致性在于假设为了探索非广延黑洞的性质，我们应用标准的经典广延热力学方法。这种方法的一个重要后果是，在爱因斯坦引力中静态黑洞在热力学上不稳定 [3]。

黑洞热力学中的不一致问题已经从不同角度得到了解决，包括庞加莱转折点方法 [4]，量子修正熵 [5]，非广泛的 Tsallis 熵 [6]，以及 Schwarzschild 时空中和 Schwarzschild-anti-de Sitter 时空中的非广泛 Rényi 熵 [7] 和 [8]。特别是在 [7] 中，已经证明在固定温度下，Schwarzschild 黑洞可以与周围的热辐射达到稳定平衡状态，而在 [8] 中，则假设宇宙常数和广泛参数作为热力学变量来展示稳定性。在这项工作中，我们将采用最后一种方法，在该方法中使用明显非广泛的 Rényi 熵代替 Bekenstein-Hawking 熵。我们将证明仅需广泛参数即可生成黑洞的稳定相。

本文组织如下。在第 II 节中，我们论证了为了避免不一致，采用非广延的 Rényi 熵在黑洞热力学中有其便利之处。此外，我们证明黑洞的准齐次性质意味着广泛参数应被视为扩展热力学框架中的一个独立热力学变量。在第 III 节中，我们回顾了几何热力学 (GTD) 的形式主义，该形式主义一致地应用了准齐次性和 Legendre 不变性来研究扩展热力学系统属性。在第 IV 节中，我们将 GTD 应用于分析扩展的史瓦西黑洞，其热力学性质在第 V 节中进行了调查，在那里我们展示了稳定状态的新相出现。最后，在第 VI 节中，我们讨论了我们的结果。

II. 非广延性和准齐次性

Bekenstein-Hawking 熵的非广延性，将熵 S_{BH} 与黑洞视界面积 A 相关联， $S_{BH} = \frac{A}{4}$ ，在黑洞热力学早期形成时变得明显，[2, 9–11] 表明可以应用普通经典热力学的标准程序来探讨黑洞的性质。发展热力学形式主义的出发点是将 Bekenstein-Hawking 熵视为系统 [12] 的基本方程，即 $S_{BH} = S_{BH}(E^a)$ 是一个从中可以推导出系统的全部热力学性质，并且特别满足第一定律的函数

$$dS_{BH} = I_a dE^a, \quad I_a = \frac{\partial S_{BH}}{\partial E^a}. \quad (1)$$

这里， E^a , $a = 1, 2, \dots, n$ 表示进入事件视界半径中的物理参数，如质量、角动量等。整数 n 被解释为黑洞的热力学自由度数量。变量 I_a 与 E^a 是对偶的，在普通经典热力学中被解释为强度变量。严格来说，在黑洞热力学中，由于贝肯斯坦-霍金熵不是其变量的齐次函数，这种识别不再有效。

熵的广延性 $S_{BH}(E^a)$ 意味着它必须满足齐次条件 $S_{BH}(\lambda E^a) = \lambda S_{BH}(E^a)$ ，其中 λ 是一个正定常数，代表对所有独立变量 E^a 作用相同的尺度因子。在广义相对论的情况下，爱因斯坦-麦克斯韦理论中最为一般的黑洞由克尔-纽曼时空描述，在该时空中，外部事件视界的半径可以表示为

$$r_h = M + \frac{1}{M} \sqrt{M^4 - J^2 - M^2 Q^2}, \quad (2)$$

其中 M 是质量， J 是角动量， Q 是黑洞的电荷。相应的贝肯斯坦-霍金熵给定为

$$S_{BH} = 2M^2 - Q^2 + 2\sqrt{M^4 - J^2 - M^2 Q^2}, \quad (3)$$

因此在这种情况下 $E^a = (M, J, Q)$ 。相应的熵表示中的第一条定律为 [10]

$$dS_{BH} = \frac{1}{T}dM - \frac{\Omega}{T}dJ - \frac{\phi}{T}dQ, \quad (4)$$

其中 ϕ 是电势, Ω 是视界上的角速度。

重新缩放熵 (3) 的所有变量为 $E^a \rightarrow \lambda E^a$, 可以看出齐次条件不满足, 这一结果可以与 Bekenstein-Hawking 熵与面积成正比而非像普通热力学系统那样与体积成正比的事实相关联。引入新的变量如 $M^2 \rightarrow m, Q^2 \rightarrow q, J \rightarrow j$, 有可能恢复齐次性为 $S_{BH}(\lambda m, \lambda j, \lambda q) = \lambda S_{BH}(m, j, q)$ 。然而, 这样的变量重新定义是不允许的, 因为它可能会极大地改变系统的热力学性质 [13]。由此得出黑洞不能被视为普通的齐次系统。

为了解决上述不一致性, 我们在 [13] 中提出了将黑洞视为准均匀系统的一般观点, 即对于每个独立的热力学变量都具有不同的缩放比例, 并满足关系

$$S_{BH}(\lambda^{\beta_a} E^a) = \lambda^{\beta_{S_{BH}}} S_{BH}(E^a), \quad (5)$$

其中实常数 β_a 称为准均匀性系数。在极限情况下 $\beta_a = 1$, 我们得到通常的均匀条件。

考虑克尔-纽曼黑洞 (3) 的熵, 可以看出若系数 $\beta_a = (\beta_M, \beta_J, \beta_{S_{BH}})$ 满足关系式

$$\beta_Q = \beta_M, \quad \beta_J = 2\beta_M, \quad \beta_{S_{BH}} = 2\beta_M. \quad (6)$$

, 则准齐次性条件 (5) 得以满足。由于准齐次性质, 欧拉恒等式明确依赖于系数 β_a 如下: [13]

$$\beta_M \frac{\partial S_{BH}}{\partial M} M + \beta_J \frac{\partial S_{BH}}{\partial J} J + \beta_Q \frac{\partial S_{BH}}{\partial Q} Q = \beta_{S_{BH}} S_{BH}, \quad (7)$$

这相当于斯马尔关系:

$$M = 2TS_{BH} + 2\Omega J + \phi Q. \quad (8)$$

如上所述, 从非广延熵 S_{BH} 得到的热力学温度 $T = (\frac{\partial S_{BH}}{\partial M})^{-1}$, 与在半经典重力中使用玻尔兹曼-吉布斯统计得到的统计霍金温度 T_H 相符, 后者用于广延系统。已提出几种方法来缓解这个问题。特别是, 熵 S_{BH} 可以识别为非广延的 Tsallis 熵 S_T , 根据定义, 在统计水平上也是非广延的。然而, Tsallis 熵与黑洞热力学第零定律相矛盾是众所周知的事实。但是, 已经表明可以使用 Rényi 熵

$$S_R = \frac{1}{r} \ln(1 + rS_{BH}), \quad (9)$$

解决这个问题, 其中 r 是一个参数, 可以解释为系统偏离广延系统的程度。此参数定义在区间 $r \in (-\infty, 1]$ 内, 特别地, 在极限 $r \rightarrow 0$ 下, 我们恢复了 Bekenstein-Hawking 熵。现在的主要观点是 Rényi 熵和统计都是非广延的。

根据方程 (3), Kerr-Newman 黑洞的 Rényi 熵由

$$S_R = \frac{1}{r} \ln \left[1 + \pi r \left(2M^2 - Q^2 + 2\sqrt{M^4 - J^2 - M^2 Q^2} \right) \right]. \quad (10)$$

给出为了与上述关于黑洞热力学的论证保持一致, 我们要求 Rényi 熵为准齐次的, 即 $S_R(\lambda^{\beta_a} E^a) = \lambda^{\beta_R} S_R(E^a)$ 。很容易看出这个条件意味着非广延参数 r 是一个热力学变量, 即 $E^a = (M, J, Q, r)$, 准齐次性参数之间的关系由

$$\beta_Q = \beta_M, \quad \beta_J = 2\beta_M, \quad \beta_r = -2\beta_M, \quad \beta_{S_R} = 2\beta_M. \quad (11)$$

给出。在带有宇宙常数的黑洞情况下, 准齐次性条件还意味着宇宙常数是与压力 [13] 相关的热力学变量, 这导致了爱因斯坦引力中黑洞的相变结构完全不同 [14]。在以下各节中, 我们将探讨将 Rényi 参数 r 视为热力学变量的后果。

III. 拟均匀几何热力学

GTD 的形式主义旨在使用几何概念 [15] 来描述热力学系统的性质。为此，任何热力学系统都被赋予了一个平衡空间 \mathcal{E} ，其点代表系统的平衡状态。此外，假设空间 \mathcal{E} 是微分的，因此可以装备黎曼度量 g 。配对 (\mathcal{E}, g) 构成了一个黎曼流形，其几何性质应与系统热力学性质相关。例如， \mathcal{E} 的测地线与准静态过程 [16] 相关，曲率奇点被解释为相变 [17]。

GTD 的另一个重要成分是它在 Legendre 变换下不变。这是经典热力学的一个重要对称性质，意味着系统的性质不依赖于所选择的热力学势的选择。实际上，在经典热力学中不同的热力学势通过 Legendre 变换 [12] 相关联。在 GTD 中，我们通过引入一个额外的辅助 $(2n+1)$ - 维空间 \mathcal{T} ，称为相空间，实现 Legendre 不变性，在其中 Legendre 变换被表示为微分同胚。这个相空间可以配备一个 Riemann 度量 G ，要求它在 Legendre 变换下保持不变。这种方法的细节涉及接触几何的几个方面，可以在 [15, 18] 中查阅。作为一个一般结果，我们观察到存在三类度量 G^I ， G^{II} ，和 G^{III} 在 Legendre 变换下是不变的。反过来，平衡空间 (\mathcal{E}, g) 被引入作为相空间 (\mathcal{T}, g) 的一个 n - 维子空间，它继承了勒让德不变性的性质。

为了更具体一些，我们用 E^a 表示平衡空间的坐标。我们用 $\Phi(E^a)$ 表示可以通过 Legendre 变换在熵或能量表示中得到的任何热力学势。这意味着集合 E^a 可以包含任何 n 个独立热力学变量及其对偶的组合。在这种意义上，GTD 的结果与所选的热力学势及它们的独立变量无关。此外，可以将任意一个热力学势视为描述相应系统的根本方程 $\Phi = \Phi(E^a)$ ，并满足第一定律

$$d\Phi = I_a dE^a, \quad I_a = \frac{\partial \Phi}{\partial E^a}. \quad (12)$$

如上所述，拟齐次性是获得黑洞热力学一致结果的重要条件。我们在势 $\Phi(E^a)$ 上施加同样的条件，即我们假设

$$\Phi(\lambda^{\beta_a} E^a) = \lambda^{\beta_\Phi} \Phi(E^a). \quad (13)$$

这个条件在 GTD 的表述中起着重要作用，因为拟齐次性系数进入平衡空间度量的具体形式作为 [18, 19]

$$g^I = \sum_{a,b,c=1}^n \left(\beta_c E^c \frac{\partial \Phi}{\partial E^c} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b, \quad (14)$$

$$g^{II} = \sum_{a,b,c,d=1}^n \left(\beta_c E^c \frac{\partial \Phi}{\partial E^c} \right) \eta_a^d \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^d} dE^a dE^b, \quad (15)$$

$$g^{III} = \sum_{a,b=1}^n \left(\beta_a E^a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b, \quad (16)$$

其中 $\eta_a^c = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ 。此外，为了进一步减少计算，我们可以使用拟齐次欧拉恒等式和吉布斯-杜亥姆关系 [13]，可以分别写为

$$\sum_{a=1}^n \beta_a I_a E^a = \beta_\Phi \Phi, \quad \sum_{a=1}^n [(\beta_a - \beta_\Phi) I_a dE^a + \beta_a E^a dI_a] = 0, \quad (17)$$

并简化为通常的齐次表达式 $\beta_a = \beta_\Phi = 1$ 。

为了以后使用，我们明确考虑情况 $n = 2$ ，其基本方程为 $\Phi = \Phi(E^1, E^2)$ 。然后，所得的线元素可以写为 [19]

$$g^I = \Sigma [\Phi_{,11}(dE^1)^2 + 2\Phi_{,12}dE^1dE^2 + \Phi_{,22}(dE^2)^2] \quad (18)$$

$$g^{II} = \Sigma [-\Phi_{,11}(dE^1)^2 + \Phi_{,22}(dE^2)^2], \quad (19)$$

$$g^{III} = \beta_1 E^1 \Phi_{,1} \Phi_{,11}(dE^1)^2 + \Sigma \Phi_{,12}dE^1dE^2 + \beta_2 E^2 \Phi_{,2} \Phi_{,22}(dE^2)^2, \quad (20)$$

其中 $\phi_{,a} = \frac{\partial\phi}{\partial E^a}$ 和 $\Sigma = \beta_1 E^1 \Phi_{,1} + \beta_2 E^2 \Phi_{,2}$. 如果我们应用欧拉恒等式 $\Sigma = \beta_{\Phi} \Phi$ 来分析相应的曲率标量, 我们得到曲率奇点由以下条件确定

$$I : \Phi_{,11} \Phi_{,22} - (\Phi_{,12})^2 = 0, \quad (21)$$

$$II : \Phi_{,11} \Phi_{,22} = 0, \quad (22)$$

$$III : \Phi_{,12} = 0, \quad (23)$$

分别与稳定性条件一致, 并决定具有两个热力学自由度的系统的相变结构 [12]. 这明确证明了相变与 GTD 中曲率奇点之间的联系。

IV. 施瓦西黑洞与 RÉNYI 缀饰熵

在本节中, 我们研究非广延的 Rényi 熵的使用如何影响静态 Schwarzschild 黑洞的热力学性质。回忆在这个情况下事件视界位于半径 $r_h = 2M$ 处, 并且视界的面积由 $A = 4\pi r_h^2 = 16\pi M^2$ 给出。然后, 使用 Bekenstein-Hawking 熵, 这个黑洞可以被认为是一个只有一个热力学自由度 ($n = 1$) 的系统。接着, 从第一定律 $dS_{BH} = \frac{1}{T} dM$ 以及比热的标准定义 $C_{BH} = T_{BH} \left(\frac{\partial S_{BH}}{\partial T} \right)$, 我们得出 Schwarzschild 黑洞的主要热力学性质由

$$S_{BH} = 4\pi M^2, \quad T_{BH} = \frac{1}{8\pi M}, \quad C_{BH} = -\frac{\left(\frac{\partial S_{BH}}{\partial M} \right)^2}{\frac{\partial^2 S_{BH}}{\partial M^2}} = -8\pi M^2. \quad (24)$$

给出。使用 Bekenstein-Hawking 熵的方法的一个特殊结果是, 由于比热的负值, 这个黑洞是一个完全不稳定的系统。

考虑现在由 Rényi 熵

$$S = \frac{1}{r} \ln(1 + 4\pi r M^2), \quad (25)$$

描述的史瓦西黑洞, 我们看到它对应于一个具有两个热力学自由度的系统 ($n = 2$), 因为如第 II 节所证明的, Rényi 参数 r 也是一个热力学变量。

我们将使用 GTD 以不变的方式研究这个黑洞的性质。如上所述, 对于基本方程 $\Phi = \Phi(E^a)$, 我们可以使用任何热力学势。为了简单起见, 我们将质量作为热力学势, 根据方程 (25) 可以表示为

$$M(S, r) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^{rS} - 1}{\pi r}} \quad (26)$$

并满足第一定律

$$dM = T dS + R dr, \quad T = \frac{\partial M}{\partial S}, \quad R = \frac{\partial M}{\partial r}, \quad (27)$$

其中我们引入了与 Rényi 参数 r 对偶的热力学变量 R 。

将拟齐次性条件应用于质量函数 (26), 我们得到

$$\beta_S = -\beta_r, \quad \beta_M = -\frac{1}{2}\beta_r. \quad (28)$$

然后, 欧拉恒等式 (17) 变为

$$S \frac{\partial M}{\partial S} - r \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{2} M, \quad (29)$$

一个可用于简化度量显式形式的表达式。事实上，使用记号 $\Phi = M$ 、 $E^1 = S$ 和 $E^2 = r$ ，度量 (18) – (20) 可以表示为

$$g^I = -\frac{\beta_r}{32\pi(e^{rS} - 1)} (F_1 dS^2 + 2F_2 dS dr + F_3 dr^2), \quad (30)$$

$$g^{II} = -\frac{\beta_r}{32\pi(e^{rS} - 1)} (-F_1 dS^2 + F_3 dr^2), \quad (31)$$

$$g^{III} = -\frac{\beta_r}{32\pi(e^{rS} - 1)} \left[\frac{Se^{rS}}{4\pi M} F_1 dS^2 + F_2 dS dr - \frac{1 + rS(e^{rS} - 1)}{4\pi M^2} F_3 dr^2 \right], \quad (32)$$

其中

$$F_1 = re^{rS}(e^{rS} - 2), \quad (33)$$

$$F_2 = \frac{e^{rS}}{r} [e^{rS}(1 + rS) - 2rS - 1], \quad (34)$$

$$F_3 = \frac{1}{r^3} [e^{rS}(e^{rS} - 2)(e^{rS} - rS + 3) - rSe^{rS} + 3]. \quad (35)$$

然后，可以直接计算奇点条件 (21) – (23)，可以简化为

$$CI: \quad \frac{e^{rS}}{r^3 M^4} [e^{rS}(1 - 2rS) - 4e^{rS}(1 - rS) + 3] = 0, \quad (36)$$

$$CII: \quad \frac{e^{rS}(e^{rS} - 2)}{r^4 M^6} [e^{2rS}(r^2 S^2 - 2rS + 3) - 2e^{rS}(r^2 S^2 - rS + 3) + 3] = 0, \quad (37)$$

$$CIII: \quad \frac{e^{rS}}{\lambda^2 M^3} [e^{rS}(1 + rS) - 2rS - 1] = 0. \quad (38)$$

在图 1 中，我们展示了上述条件的行为。我们看到只有非广延参数 r 的特定值才能满足条件 CII ，这表明存在曲率奇点，对应于二级相变。

V. 结果的解释

根据前几节中呈现的结果，为了在非广泛 Rényi 熵的框架内一致地考虑 Schwarzschild 黑洞，必须修改其热力学性质。实际上，现在的主热力学变量是质量 M ，温度 T ，以及与非广泛性参数 r 的对偶 R ，它们明确地由

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^{rS} - 1}{\pi r}}, \quad T = \frac{e^{rS}}{8\pi M}, \quad R = \frac{e^{rS}(rS - 1) + 1}{8\pi r^2 M}, \quad (39)$$

给出，并且通过 Euler 身份相互关联

$$2TS - 2rR = M. \quad (40)$$

霍金温度 $T_0 = \frac{1}{8\pi M}$ 经过因子 e^{rS} 的修正，变量 R 在概念上具有新的性质。这些变量的热力学行为通过图 2 用非广延性参数 r 来说明。我们可以看到所有变量都是正定的，在 $r \rightarrow 1$ 处达到最大值，并且随着 r 的减小而减少。区间 $r \in (0, 1]$ 中的质量和温度值大于相应的变量 M_0 和 T_0 ，参数 r 趋于零。然后，在区间 $r \in (-\infty, 0)$ 中，质量和温度分别小于 M_0 和 T_0 。

在前一节中，我们表明存在一个由与度量 g^{II} 相关的曲率奇点指示的二级相变。根据 22 对于 CII 的表达式，这个曲率奇点的位置通常对应于条件 $e^{rS} - 2 = 0$ 。在这种情况下，相变与黑洞的稳定性变化有关，这可以通过考虑热容

$$C := T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = T \left(\frac{\partial^2 M}{\partial S^2} \right)^{-1} = \frac{2(e^{rS} - 1)}{r(e^{rS} - 2)}, \quad (41)$$

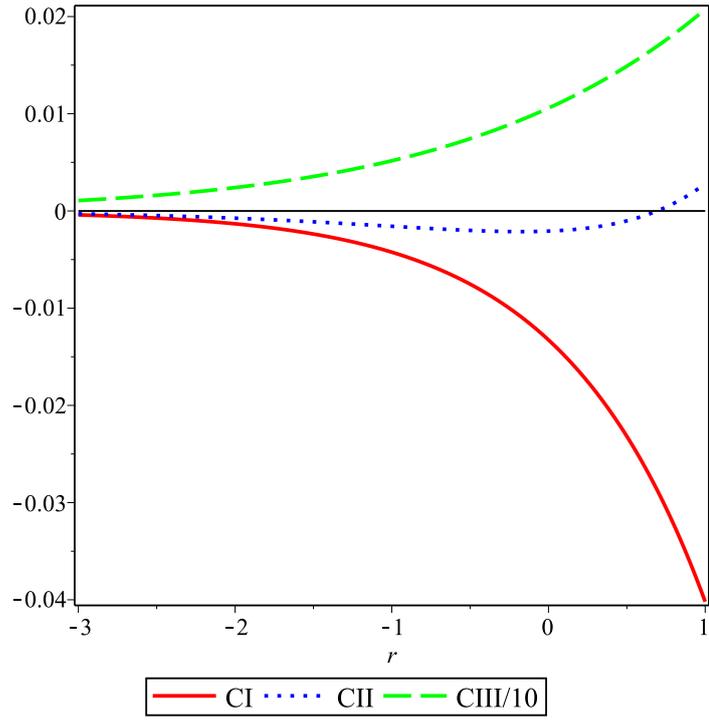


图 1: 奇异条件对于 $S = 1$ 作为非广延参数 r 的函数。仅曲线 CII 穿过零轴，其中度量的曲率 g^{II} 发散。

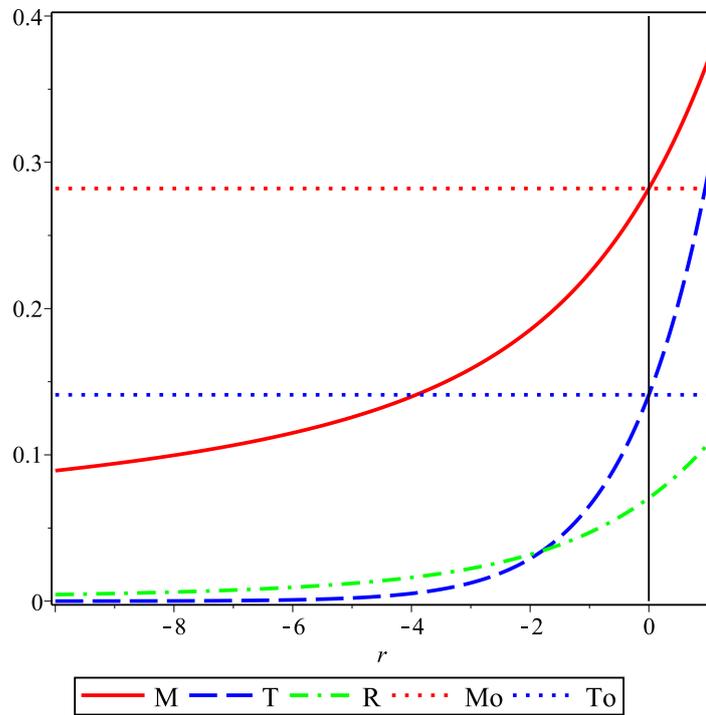


图 2: 质量 M 、温度 T 以及施瓦西黑洞的对偶非广延性 R 作为非广延性参数 r 的函数，其中熵固定为 $S = 1$ 。点线表示史瓦西黑洞的 M_0 质量和 T_0 温度，其中 $r \rightarrow 0$ 。

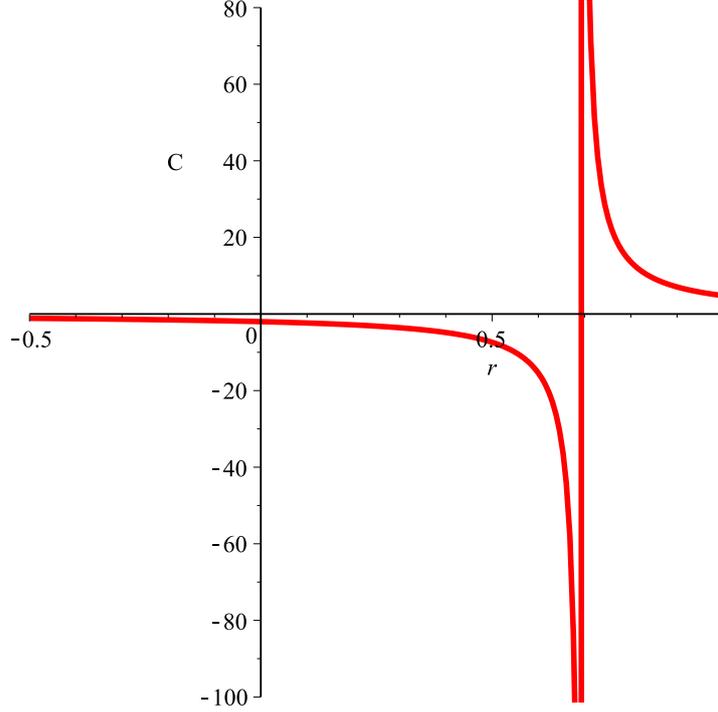


图 3: 施瓦茨黑洞的热容与 Rényi 熵对于 $S = 1$ 和不同的非广泛性参数 r 的值。

来展示, 该热容在 $e^{rS} = 2$. 处显示出发散。我们在图 3 中描绘了热容的行为, 其中发散显示从不稳定状态 ($C < 0$) 到稳定状态 ($C > 0$). 的转变。这表明非广延性极大地影响了史瓦西黑洞的热力学性质, 允许存在一种具有稳定状态的新相。稳定区域取决于非广延参数的值, 并位于区间 $r \in (\frac{\ln 2}{S}, 1]$ 内。

VI. 结论

在这项工作中, 我们研究了基于 Rényi 熵框架下的黑洞热力学, 这是一种与经典和统计热力学定律相一致的方法。主要观点是 Rényi 熵符合黑洞热力学的非广泛性特征。

此外, 我们在基本方程的层面上施加拟齐次性的属性以与熵的非广泛性和几何热力学的经典热力学方法相一致。结果, 我们得到非广泛性参数 r , 它在区间 $r \in (-\infty, 1]$ 内定义, 应被视为一个独立的热力学变量。

作为一个特定的例子, 我们在扩展热力学框架下详细研究了施瓦茨希黑洞的情况, 其中 Rényi 熵和非广延性参数作为独立的热力学变量。我们使用 GTD 的形式主义来获得不依赖于所选热力学表示或势的选择的不变结果。

分析 GTD 指标的行为, 我们确定了广义热力学中的史瓦西黑洞可以经历二级相变, 这改变了黑洞的稳定性特性, 引入了一种新的稳定状态相。一般来说, 我们展示了稳定的相态出现在非扩展性参数特定值区间内, 即 $r \in (\frac{\ln 2}{S}, 1]$ 。

这里, 为了简单起见, 我们仅分析了广义热力学中的静态黑洞。显然, 使用 GTD 方法, 可以将我们的结果推广到包括非静态黑洞。我们计划在未来的工作中分析这些以及其他更一般的黑洞构型。

致谢

本工作部分得到了 UNAM-DGAPA-PAPIIT, 资助号 108225, 以及 Conahcyt, 资助号 CBF-2025-I-243 的支持。

-
- [1] J. D. Bekenstein, *Nuovo Cimento* **4**, 99 (1972).
 - [2] S. W. Hawking, *Communications in mathematical physics* **43**, 199 (1975).
 - [3] P. C. Davies, *Reports on Progress in Physics* **41**, 1313 (1978).
 - [4] G. Arcioni and E. Lozano-Tellechea, *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* **72**, 104021 (2005).
 - [5] V. G. Czinner, *International Journal of Modern Physics D* **24**, 1542015 (2015).
 - [6] T. S. Biró and V. G. Czinner, *Physics Letters B* **726**, 861 (2013).
 - [7] V. G. Czinner and H. Iguchi, *Physics Letters B* **752**, 306 (2016).
 - [8] T. Anusonthi, P. Wongjun, and R. Nakarachinda, in *Journal of Physics: Conference Series* (IOP Publishing, 2025), vol. 2934, p. 012011.
 - [9] J. D. Bekenstein, *Physical Review D* **7**, 2333 (1973).
 - [10] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *Communications in mathematical physics* **31**, 161 (1973).
 - [11] S. W. Hawking, *Physical Review D* **13**, 191 (1976).
 - [12] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* (John Wiley & Sons, 1991).
 - [13] H. Quevedo, M. N. Quevedo, and A. Sánchez, *The European Physical Journal C* **79**, 1 (2019).
 - [14] D. Kubizňák, R. B. Mann, and M. Teo, *Classical and Quantum Gravity* **34**, 063001 (2017).
 - [15] H. Quevedo, *Journal of Mathematical Physics* **48**, 13506 (2007).
 - [16] H. Quevedo, A. Sánchez, and A. Vázquez, *General Relativity and Gravitation* **47**, 1 (2015).
 - [17] J. L. Alvarez, H. Quevedo, and A. Sánchez, *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* **77**, 084004 (2008).
 - [18] H. Quevedo and M. N. Quevedo, *Physics Letters B* **838**, 137678 (2023).
 - [19] H. Quevedo, M. N. Quevedo, and A. Sanchez, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*; arXiv preprint arXiv:2402.17782 (2025).