巴拿赫空间张量积中的级数表示

J. WENGENROTH

摘要. 我们通过一个极其简单的论证表明，对于向量空间的张量积 $X \otimes Y$ 上的任意范数 α，完备化 $X\hat{\otimes}_\alpha Y$ 中的每个元素 u 都可以表示为初等张量的一个收敛级数 $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$。

而所有像例如 [DF93, Jar81, Rya02] 这样的书在处理巴拿赫（或局部凸）空间的拓扑张量积时，都包括了 Grothendieck 的定理 [Gro55, chapitre I, page 51]，即完备的投射的张量积 $X\hat{\otimes}_\pi Y$ 中每个元素都可以表示为初等张量级数 (甚至是绝对收敛)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$$

但是它们对注入张量积 $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ 的明显相关问题却保持沉默。在 [Rya02, page 46] 中甚至声称了完备张量积的元素没有一般的表示形式 $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$。通过使用 Pełczyński[Peł71] 的一个简化技巧，作者从 [Joh] 那里学到了这一点，我们将展示这个声称是不正确的。

定理 1. 对于两个向量空间的张量积 $X \otimes Y$ 上的任意范数 α，其完备化中的每个元素 $u \in X\hat{\otimes}_\alpha Y$ 都有一个表示 $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$ 其中 $x_n \in X$ 和 $y_n \in Y$。

至少表面上，这类似于希尔伯特空间之间紧算子的施密特表示。

证明. 将 u 表示为 $X \otimes Y$ 元素的快速收敛序列的极限，我们可以形成一个望远级数以获得 $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $u_n \in X \otimes Y$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha(u_n) < \infty$。选择将 u_n 表示为 $k(n)$ 个初等张量的和，并依次排列这些和，会得到一个级数 s_m，其中子序列 $s_{k(1)+\cdots+k(n)}$ 收敛到 u。这当然并不意味着整个级数的收敛，但如果我们可以为所有 $k(n-1) < p \leq k(n)$ 找到表示

$$u_n = \sum_{\ell=k(n-1)+1}^{k(n)} x_\ell \otimes y_\ell \text{ such that } \alpha\left(\sum_{\ell=k(n-1)+1}^{p} x_\ell \otimes y_\ell\right) \leq 2\alpha(u_n)$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 46A23, 46B28, 46M05.
Key words and phrases. 拓扑张量积，巴拿赫空间，级数表示法.

，那就足够了。确实，对于 $\varepsilon > 0$，我们选择 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得对所有 $n \geq n_0$ 都有 $\alpha(s_{k(1)+\cdots+k(n)} - u) \leq \varepsilon$。如果然后 $m > k(1) + \cdots + k(n_0)$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 在 $k(1) + \cdots + k(n) < m$ 中是最大的，我们得到

$$\alpha(s_m - u) \leq \varepsilon + \alpha\left(\sum_{\ell=k(n)+1}^{m} x_\ell \otimes y_\ell\right) \leq \varepsilon + 2\alpha(u_{n+1})$$

这表明级数收敛。结果因此由下一个引理得出。 $\square$

引理 1. 对于两个向量空间的张量积 $X \otimes Y$ 上的任意范数 α，每个元素 $u \in X \otimes Y$ 都有一个表示 $u = \sum\limits_{\ell=1}^{N} x_\ell \otimes y_\ell$ 使得 $x_\ell \in X$ 和 $y_\ell \in Y$ 满足

$$\alpha\left(\sum_{\ell=1}^{p} x_\ell \otimes y_\ell\right) \leq 2\alpha(u) \textit{ for all } 1 \leq p \leq N \ .$$

对于两个赋范空间的射影范数 $\alpha = \pi$，引理显然适用于这样的表示 $u = \sum\limits_{\ell=1}^{N} x_\ell \otimes y_\ell$，使得 $\sum\limits_{\ell=1}^{N} \|x_\ell\|\|y_\ell\| \leq 2\pi(u)$。这给出了 Grothendieck 定理的一个非常初等的证明，包括级数的绝对收敛。

证明. 我们从一个任意表示 $u = \sum\limits_{k=1}^{m} e_k \otimes f_k$ 开始，带有 $e_k \in X$ 和 $f_k \in Y$。Pełczyński 的简单技巧是写出，对于适当选择的 $n \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u \\ &= \frac{1}{n}e_1 \otimes f_1 + \frac{1}{n}e_2 \otimes f_2 + \cdots + \frac{1}{n}e_m \otimes f_m \\ &+ \frac{1}{n}e_1 \otimes f_1 + \frac{1}{n}e_2 \otimes f_2 + \cdots + \frac{1}{n}e_m \otimes f_m \\ &\ \vdots \\ &+ \frac{1}{n}e_1 \otimes f_1 + \frac{1}{n}e_2 \otimes f_2 + \cdots + \frac{1}{n}e_m \otimes f_m \end{aligned}$$

其中每一行 n 都加到 $\frac{1}{n}u$。我们将 $N = nm$ 放入并逐行重命名基本张量为 $x_\ell \otimes y_\ell$。这给出了具有所需性质的 u 的表示。事实上，$p \in \{1, \ldots, N\}$ 可以唯一地写成 $p = qm + r$ 的形式，其中 $q, r \in \mathbb{N}_0$ 满足 $0 \leq r < m$。前 p 项之和 $x_\ell \otimes y_\ell$ 包含了上述矩阵的 q 行（这些行之和为 $\frac{q}{n}u$）以及接下来一行的前 r 项。这表明

$$\begin{aligned} \alpha\left(\sum_{\ell=1}^{p} x_\ell \otimes y_\ell\right) = \alpha\left(\frac{q}{n}u + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{n} e_k \otimes f_k\right) &\leq \frac{q}{n}\alpha(u) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r} \alpha(e_k \otimes f_k) \\ &\leq \alpha(u) + \frac{m}{n}\max\{\alpha(e_k \otimes f_k) : 1 \leq k \leq m\}. \end{aligned}$$

对于足够大的 $\alpha(u) \neq 0$ 和 n，最后一个表达式是 $\leq 2\alpha(u)$。如果 $\alpha(u) = 0$，我们有 $u = 0$，因此可以将 u 表示为空的基本张量之和。(如果 α 只是一个半范数且 $\alpha(u) = 0$ 我们可以得到一个表示对于任意给定的 ε 使用 $\alpha\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \otimes y_k\right) \leq \varepsilon$) □

我们并不声称定理中的级数表示具有实际相关性，特别是因为对于逼近的部分和的秩没有控制。然而，我们有如下应用，这是由 Grothendieck 的另一个结果 [Gro55, chapitre I, page 90] 关于注入张量积所暗示的，即 $C(K)\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ 同构于紧拓扑空间 K 上的 Banach 空间值函数的 Banach 空间 $C(K, Y)$（具有一致范数），自然同构将基本张量 $f \otimes y$ 映射到函数 $t \mapsto f(t)y$。

> *每个在紧致拓扑空间上取值于 Banach 空间 Y 的连续函数 $F \in C(K, Y)$ 都有一个一致收敛的表示*
>
> $$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) y_n$$
>
> *其中包含 $f_n \in C(K)$ 和 $y_n \in Y$。*

将定理推广到局部凸拓扑空间 $X \otimes Y$ 的可度量化情况并不困难(引理中 u_n 的表示是根据生成拓扑的半范数递增序列 α_n 中的第 n 个半范数 α_n 在 $X \otimes Y$ 上选择的，引理证明中的最后一条备注涉及的可能性 $\alpha_n(u_n) = 0$，然后应该应用于例如 $\varepsilon = 1/n^2$)。从未使用张量积任何性质的论证实际上显示了以下结果。

命题 1. *设 A 是具有稠密线性包的度量可局部凸空间 X 的子集。X 的完备化 $\hat{X}$ 的每个元素 u 都有一个表示*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \ \text{with}\ \lambda_n \in \mathbb{K} \ \text{and}\ a_n \in A\ .$$

本文回答的问题相当幼稚。一个或许更好的问题则要求表示为一个无条件地收敛级数。对于两个希尔伯特空间 X, Y，紧算子 $T \in \mathscr{K}(X', Y) = X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ 的施密特表示确实给出了无条件的表示。更一般地，对于两个巴拿赫空间的完备注入张量积而言，其中一个具有无条件基就足够了。但对于一般情况，本文作者并不知道答案。只要在上述引理中有一个更强的条件 $\alpha\left(\sum_{k \in J} x_k \otimes y_k\right) \leq c\alpha(u)$ 对于常数 c 和所有子集 $J \subseteq \{1, \ldots, N\}$ 就足够了。

References

[DF93] Andreas Defant and Klaus Floret, *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 176, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993. MR 1209438

[Gro55] Alexander Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), Chapter 1: 196 pp.; Chapter 2: 140. MR 75539

[Jar81] Hans Jarchow, *Locally convex spaces*, Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1981. MR 632257

[Joh] Bill Johnson, *Series representation in injective tensor products*, MathOverflow, URL:https://mathoverflow.net/q/134391 (version: 2013-06-21).

[Peł71] A. Pełczyński, *Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis*, Studia Math. **40** (1971), 239–243. MR 308753

[Rya02] Raymond A. Ryan, *Introduction to tensor products of Banach spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2002. MR 1888309

Universität Trier, FB IV – Mathematik, 54286 Trier, Germany
Email address: `wengenroth@uni-trier.de`