

膜阻泄漏积分发放神经元电路的规范量子化

Dean Brand,^{1,2,*} Domenica Dibenedetto,^{3,†} and Francesco Petruccione^{2,4,‡}

¹*Department of Physics, Stellenbosch University, Stellenbosch, 7604, South Africa*

²*National Institute for Theoretical and Computational Sciences (NITheCS), Stellenbosch, 7604, South Africa*

³*Department of Advanced Computing Sciences, Maastricht University, Maastricht, Netherlands*

⁴*School of Data Science and Computational Thinking,
Stellenbosch University, Stellenbosch, 7604, South Africa*

(10Dated: 2025 年 6 月 28 日)

我们提出了一种量化忆阻泄漏积分与火 (LIF) 神经元的理论框架, 结合了神经形态工程和开放量子系统的原则。从经典的忆阻 LIF 电路出发, 我们应用规范量子化技术来推导一个基于电路量子电动力学的量子模型。数值模拟展示了弱耦合和绝热条件下量化忆阻器和 LIF 神经元的关键动态特性, 包括记忆效应和尖峰行为。这项工作为量子神经形态计算奠定了基础模型, 提供了一条通向生物启发的量子尖峰神经网络和新的量子机器学习范式的途径。

现代计算正面临基础物理和架构上的极限。在物理层面, 持续的晶体管微型化正在接近原子尺度, 在此量子隧穿效应导致不可接受的错误率, 威胁到经典处理器 [1] 的可靠性。从架构上看, 冯诺依曼瓶颈通过要求数据在内存和处理器之间不断传输 [2], 对性能和能效施加了硬性约束。相比之下, 生物大脑在同一基质中无缝集成了记忆与计算, 实现了高度并行性和无与伦比的能效 [3–5]。

这两个限制推动了替代计算范式的开发。量子计算通过利用叠加和纠缠来执行某些任务时实现指数级加速, 从而绕过了对更密集电路的需求。另一方面, 神经拟态计算从生物神经系统中汲取灵感以克服架构低效的问题。通过将内存和处理单元集成在一起并使用脉冲神经元和可塑性突触, 神经拟态架构提供了低功耗、大规模并行的信息处理能力。一个关键的使能组件是忆阻器, 这是一种具有记忆功能的电阻器, 支持局部学习和高效连接 [6]。

然而, 量子计算和神经形态计算通常追求不同的发展路径: 前者在计算能力上表现出色但缺乏架构效率, 而后者提供了高效的结构但通用速度提升有限。这种互补性推动了向量子神经形态计算的融合, 这是一个新兴且有前景的领域, 旨在统一量子动力学与大脑启发的架构 [7–9]。尽管这一领域的范围广阔, 包括硬件实现、计算原语和学习模型, 但它仍然很大程度上未被探索。

最近的贡献涵盖了量子水库计算 [10–12]、量子忆阻器 [13–15] 以及各种量子神经元提案 [16–18]。特别

地, 开发既能平衡计算效率又能保持生物真实性的受生物学启发的量子神经元模型仍存在差距。在经典神经科学和人工智能中, 神经元模型从高度高效但抽象的人工神经网络到基于生物物理的霍奇金-赫胥黎模型 [19] 不等。

虽然两种极端都经历了一定程度的量化, 一个重要中间模型——泄漏整合与发放 (LIF) 神经元——尚未被正式量化。LIF 模型提供了一个生物学上合理的、计算负担轻的脉冲框架, 非常适合时间依赖任务和神经形态硬件 [20, 21]。虽然最近提出了 LIF 神经元的现象学量子模拟 [22], 但正式的量子表述仍然缺失。开发这样的模型对于建立未来量子神经形态架构可以系统构建的理论基础至关重要。

在这项工作中, 我们展示了一个忆阻泄漏积分火神经元电路的直接量化, 引入了一个基于显式浴模式耦合和开放量子系统框架的量子忆阻器模型。受到对生物学基础模型如 Hodgkin-Huxley 神经元 [23, 24] 的先前量化的启发, 我们的方法产生了一个具有内在记忆编码在其电路动力学中的全量子脉冲神经元。我们推导出一个 LC (电感-电容) 振荡器的微观哈密顿量——代表神经元膜——与捕捉忆阻行为的状态依赖传输线相互作用。在绝热和弱耦合极限下, 我们分析地展示了该模型如何恢复带有忆阻泄漏项的经典 LIF 动力学。

信件的其余部分结构如下。我们回顾了 LIF 神经元仿生电路的经典公式及其忆阻器公式。在此之后, 我们开始量化过程, 通过拉格朗日和哈密顿形式来处理

电路元件，在严格的电路量子电动力学原则上，从而得到一个完全量化的忆阻器 LIF 电路模型。接下来，我们通过数值模拟验证推导结果，并展示它们如何与经典对应物的特征相匹配。最后，我们总结了我们的发现并讨论了这一模型作为进一步探索和发展量子仿生计算基础的作用。

我们首先介绍支撑我们的量子神经形态框架的经典模型：LIF 神经元和忆阻器。我们将展示这两个组件如何自然地结合形成一个紧凑的、受生物启发的电路，作为我们量子模型的经典对应物。

LIF 神经元是计算神经科学和神经形态工程中的基础模型。它使用一个简单的电路来捕捉生物神经元的基本行为。在其标准形式中，LIF 神经元被建模为一个电阻-电容 (RC) 低通滤波器，其中： C_m 是膜电容， R 是泄漏电阻， $V(t)$ 是膜电位， $I_{in}(t)$ 是输入电流。其控制方程为：

$$C_m \frac{dV(t)}{dt} = -\frac{V(t)}{R} + I_{in}(t). \quad (1)$$

这里，电容器对输入的电流进行时间积分，而电阻则导致电位“泄漏”回到静息状态。当 $V(t)$ 达到阈值 V_{th} 时，神经元发出一个尖峰并且电位被重置。尽管其简单性，这个模型捕捉到了核心的尖峰行为，并且作为许多硬件实现的基础。

为了引入自适应行为和记忆，我们使用忆阻器，这是一种非线性、依赖历史的电阻器，由蔡少棠在 1971 年提出 [25, 26]。它完成了基本无源电路元件（电阻器、电容器、电感器、忆阻器）的集合，并且特别适用于神经拟态应用。忆阻器的电阻根据通过它的总电荷 $q(t)$ 进化，使其能够编码过去活动的记忆。其行为可以用广义欧姆定律来描述：

$$V(t) = M(q(t)) I(t), \quad (2)$$

其中， $M(q)$ 是忆阻器的忆阻，这是一种依赖于电荷的电阻函数。当受到周期信号驱动时，忆阻器的电流-电压 $I-V$ 曲线会显示出一个被挤压的滞回环，这是忆阻行为的一个关键实验特征 [27]，如图 Figure 1 所示。

为了更真实的描述，Strukov 模型考虑了使用薄层二氧化钛 (TiO_2) 器件实现的忆阻器 [28]。在这个模型中，该设备由两个区域组成：一个低电阻的掺杂区 (R_{on}) 和一个高电阻的未掺杂区 (R_{off})。这两个区域

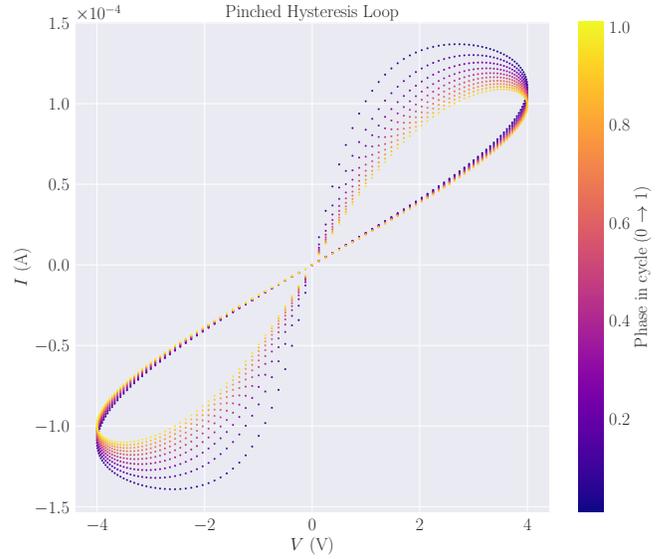


图 1: 在由周期性输入电流 $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ 驱动的忆阻器的 $I-V$ 平面上的一个捏缩的磁滞回线。参数是 $D = 1 \times 10^{-9}$, $w = 0.5 \times 10^{-9}$, $R_{on} = 1 \times 10^3$, $R_{off} = 1 \times 10^5$, $V_0 = 4.0$, $\omega = 2\pi \times 10^3$, 跨越 2000 时间步。

之间的边界由掺杂区的宽度 $w(t)$ 定义，而整个器件的总厚度是 D 。

忆阻器两端的电压由以下公式给出：

$$V(t) = \left(R_{on} \frac{w(t)}{D} + R_{off} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right) I(t). \quad (3)$$

这里，总电阻是两个区域电阻的加权和，权重取决于每个区域在器件中所占的比例。因此，作为电荷函数的记忆电阻可以表示为：

$$M(q(t)) = \left(R_{on} \frac{w(t)}{D} + R_{off} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right). \quad (4)$$

这种方法捕捉了随着边界 $w(t)$ 响应电荷流动而移动时，器件电阻如何动态变化的现象，反映了 TiO_2 忆阻器中的基本离子漂移机制。

通过在 LIF 电路中用忆阻器替换泄漏电阻，我们获得了一个忆阻 LIF 神经元。这种混合模型引入了一个关键改进：泄漏电导变得依赖于状态，从而使神经元能够根据过去的输入进行适应。

将电阻器替换为方程 Equation (1) 中的忆阻器 $R \rightarrow M(q(t))$ 可得：

$$C_m \frac{dV(t)}{dt} = -\frac{V(t)}{M(q(t))} + I_{in}(t), \quad (5)$$

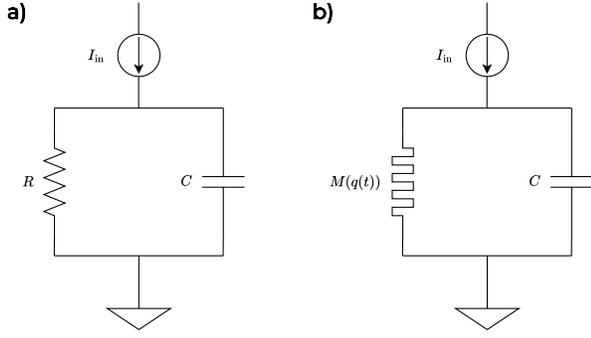


图 2: 泄漏积分发射 (LIF) 神经元被建模为低通滤波 RC 电路。a) 使用电阻构建的 LIF 电路。b) 使用忆阻器代替电阻构建的 LIF 电路。忆阻器依赖于之前通过电路的电荷 $q(t)$ 的历史。

而忆阻器状态通过

$$\frac{dq}{dt} = I(t) = \frac{V(t)}{M(q(t))}. \quad (6)$$

此电路形成了我们量化程序的经典起点。它既捕捉了生物神经元的尖峰行为，也捕捉到了生物突触和离子通道的记忆样适应性。相应的电路如图 Figure 2 所示。

为了量化忆阻 LIF 神经元，我们解决了一个关键挑战：诸如忆阻器之类的电阻元件本质上是耗散的，因此与量子系统的么正可逆演化不兼容。尽管存在各种量子忆阻器模型，但我们在此追求在 LIF 框架内基于物理基础的量化，通过将忆阻泄漏建模为一个有效的环境。

我们用由耦合的 LC 振荡器组成的半无限、无损耗传输线 (TL) 替换了耗散忆阻器，采用了 Caldeira-Leggett 模型的方法 [29]。该线路充当吸收浴，其特征阻抗 $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ 编码了有效电阻。通过绝热调制 $Z_0(t)$ ，我们模拟了忆阻器的记忆依赖行为，使我们在弱耦合、低频极限下能够恢复经典的忆阻动态。

为了将 LIF 节点与该 TL 环境耦合，我们引入了一个小的耦合电容 C_C ，如图 Figure 3 所示。这确保了相互作用保持微扰，并不会主导系统的动力学。

系统由拉格朗日量描述：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}C_m\dot{\phi}_0^2 + \frac{1}{2}C_C(\dot{\phi}_0 - \dot{\phi}_1)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}C_0\dot{\phi}_i^2 - \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)^2}{2L_0} \right], \quad (7)$$

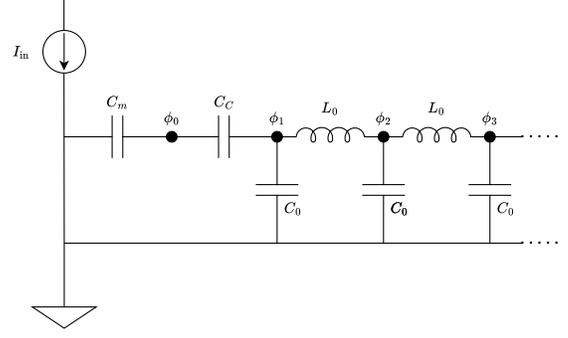


图 3: 忆阻 LIF 电路：膜节点由交流电流源 $I_{in}(t) = I_0 \sin(\omega t)$ 驱动，并通过电容 C_C 与半无限传输线弱耦合。传输线中的每个节点 ϕ_i 具有电容 C_0 和电感 L_0 ，而 C_m 是膜电容。

其中 ϕ_0 是膜节点的通量， $\dot{\phi}_0 = V_0$ 是膜电压。

取间距为 $\Delta x \rightarrow 0$ 的连续极限，定义通量场 $\phi(x, t)$ ，有：

$$C_0\Delta x \rightarrow \mathfrak{C}, \quad \frac{L_0}{\Delta x} \rightarrow \mathfrak{L}, \quad (8)$$

导出 TL 拉格朗日量：

$$\mathcal{L}_{TL} = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2}\mathfrak{C}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2\mathfrak{L}}(\partial_x\phi)^2 \right] dx. \quad (9)$$

对于 TL 场的波动方程变为：

$$\mathfrak{C}\partial_t^2\phi(x, t) = \frac{1}{\mathfrak{L}}\partial_x^2\phi(x, t). \quad (10)$$

关于波形式及其物理解释的深入讨论见附录。在膜边界 $x = 0$ 处，欧拉-拉格朗日方程给出：

$$C_m\ddot{\phi}_0 - C_C \left[\ddot{\phi}_0 - \partial_{tt}\phi(0, t) \right] - \frac{\phi_0}{L_m} = I_{in}(t), \quad (11)$$

其中 L_m 是一个有效电感，捕捉内在的膜泄漏。

在弱耦合 $C_C \ll C_m$ 下，膜惯性的修正可以忽略不计，给出：

$$C_m\ddot{\phi}_0 + \frac{1}{Z_0}\dot{\phi}_0 = I_{in}(t), \quad (12)$$

其中 $Z_0 \equiv \sqrt{\mathfrak{L}/\mathfrak{C}}$ 。识别出 $\dot{\phi}_0 = V(t)$ ，我们得到经典的忆阻 LIF 方程。

我们现在通过识别规范动量来构建一个微观哈密顿量：

$$Q_0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_0} \approx C_m\dot{\phi}_0, \quad (13)$$

$$\Pi(x) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_t\phi)} = \mathfrak{C}\partial_t\phi(x, t). \quad (14)$$

哈密顿量是通过勒让德变换获得的：

$$H = Q_0 \dot{\phi}_0 + \int \Pi(x) \partial_t \phi(x, t) dx - \mathcal{L}. \quad (15)$$

这给出了总哈密顿量：

$$H(t) = \frac{Q_0^2}{2C_m} + \int_0^\infty \left[\frac{\Pi^2}{2\mathcal{E}} + \frac{(\partial_x \phi)^2}{2\mathcal{L}} \right] dx - C_C \frac{Q_0}{C_m} \Pi(0) - \phi_0 I_{\text{in}}(t). \quad (16)$$

将 ϕ_0 和 Q_0 提升为带有 $[\phi_0, Q_0] = i\hbar$ 的操作符，我们得到了电路的完全量子描述。交互项耦合膜通量到 TL 环境，使能量交换和有效耗散成为可能。

在经典极限下，哈密顿方程再现了预期的动力学：

$$\dot{\phi}_0 = \frac{\partial H}{\partial Q_0} \approx \frac{Q_0}{C_m}, \quad (17)$$

$$\dot{Q}_0 = -\frac{\partial H}{\partial \phi_0} = I_{\text{in}}(t) - \frac{V(t)}{Z_0}. \quad (18)$$

结合这些结果得到：

$$C_m \dot{V}(t) + \frac{V(t)}{Z_0(t)} = I_{\text{in}}(t), \quad (19)$$

这识别出有效的忆阻泄漏为 $Z_0(t) = M(q(t))$ 。

我们通过用半无限传输线浴替换耗散忆阻器，推导出了忆阻 LIF 神经元的完全量子化模型。在绝热、弱耦合极限下，该量子模型恢复了具有状态依赖泄漏电导的经典 LIF 神经元。这为未来探索量子仿生系统提供了严格的微观基础。

通过一个完全量化的忆阻 LIF 神经元电路描述，我们可以验证在经典输入驱动下， $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ ，预期的行为，并调查输出的有效性。这是为了获得忆阻器的特征特性，以确认量化过程确实是忆阻性的。为此，我们将研究在周期输入驱动下的量化忆阻器的电压和电流期望值，这应该重现忆阻器的夹缩回线圈特性 [27]。在此之后，我们将调查完整的 LIF 神经元电路，适当地包含阈值、发射和重置机制，以恢复一致的尖峰神经元。

忆阻器的特征是，在周期性驱动电流下，其忆阻响应在 I - V 平面中呈现出夹紧的滞后曲线。为了验证量子模型确实是一个忆阻器，它需要表现出这种特征行为。

为了生成磁滞回线的 I - V 平面，我们可以提取测量电路时得到的电压期望值 $V(t) = \langle \hat{\phi}_0 \rangle$ 和电流期

望值 $I(t) = \langle \hat{\phi} \rangle / Z_0(t)$ 。为了模拟这一点，我们整合了一个时间依赖的 Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad (GKSL) 主方程 [30]，同时在密度矩阵演化 [31] 的每个 2000 时间步长中更新电导率 $Z_0(t) = M(q(t))$ 。

观察膜节点的单模振荡器，就创建/湮灭算符 a^\dagger/a 而言，我们有

$$\hat{\phi}_0 = \sqrt{\frac{\hbar Z_0}{2}} (a + a^\dagger), \quad (20)$$

$$\hat{Q}_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2Z_0}} (a^\dagger - a). \quad (21)$$

在这种情况下，约化哈密顿量为

$$H(t) = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - \hat{\phi}_0 I_0 \sin(\omega t). \quad (22)$$

我们将忆阻泄漏表示为 Lindbladian 耗散子的形式，用湮灭算符 a 表示为

$$\mathcal{D}[a]\rho = a\rho a^\dagger - \frac{1}{2} \{a^\dagger a, \rho\}. \quad (23)$$

相关的衰减率

$$\gamma(q) = \frac{1}{C_m M(q)} \quad (24)$$

直接与瞬时忆阻 $M(q)$ 相关联，因此耗散通道的强度跟随忆阻状态而不引入虚假动力学。

GKSL 主方程表示为

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho] + \gamma(t) \mathcal{D}[a]\rho, \quad (25)$$

其中主方程的坍塌因子是 $\gamma(t) = 1/(Z_0(t)C_m)$ 。

状态更新忆阻器定律是从 Equation (3) 的线性漂移改编而来的，我们现在有

$$q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\langle \hat{\phi}_0 \rangle}{Z_0(\tau)} d\tau, \quad (26)$$

$$Z_0(t) = M(q(t)) \quad (27)$$

$$M(q(t)) = R_{\text{on}} \left(\frac{q}{q_{\text{max}}} \right) + R_{\text{off}} \left(1 - \frac{q}{q_{\text{max}}} \right). \quad (28)$$

数值求解该主方程并满足指定条件后，得到 Figure 4 中的夹钳回滞环。

与经典滞后回线 Figure 1 相比，我们注意到它具有非常相似的结构和行为。量子模型中记忆电阻的变化不那么平滑且持续漂移的原因在于，在绝热和弱耦

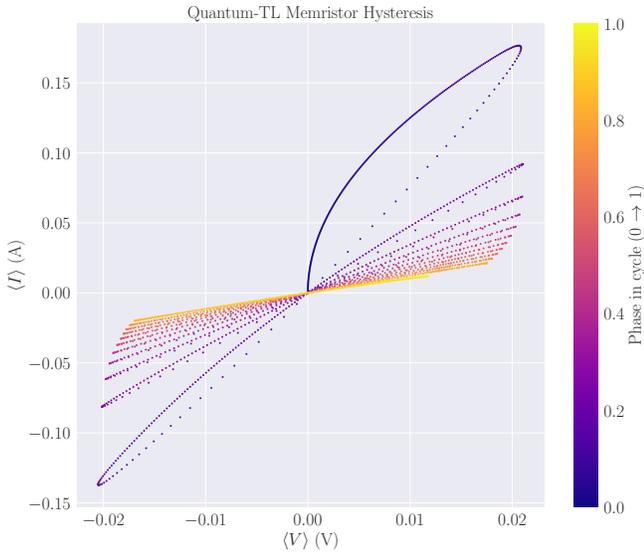


图 4: 在由周期性输入电流 $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ 驱动的量子忆阻器的 I - V 平面上出现了一个压榨型滞回环。参数是 $C_m = 1.0, R_{\text{on}} = 1 \times 10^3, R_{\text{off}} = 1 \times 10^5, q_{\text{max}} = 1.0, I_0 = 1.0, \omega = \pi$, 超过 2000 时间步。

合的经典极限中的近似处理，正如在这种限制下的任何量化模型所预期的那样。另一个原因是主方程形式中存在的量子波动，其中创建算子和湮灭算子是系统能量的量子基础。尽管如此，量子 I - V 平面上明显受压的滞后回线形式清楚地验证了该模型作为真正具有非零记忆的量子忆阻器的有效性。与其他量子忆阻器公式相比，此模型基于马尔可夫主方程，并从规范量化视角出发，而非现象学建模。

为了将量子忆阻器模型扩展到完整的忆阻量子泄漏积分火 (LIF) 神经元，我们必须融入 LIF 动态的关键特征。具体而言，该模型不仅要整合输入驱动电流，还要实现一个阈值机制，触发输出脉冲并重置膜电位。在我们的方法中，阈值监控是通过电压算符的期望值以经典方式进行的。在数值模拟中，这是通过中断求解器并将状态 $\rho \rightarrow |0\rangle\langle 0|$ 替换为真空态，然后继续进行实现的。

LIF 神经元的另一个关键特征是不应期——在输出尖峰后的短暂时间段内，神经元暂时对进一步刺激无响应。在模拟中，这是通过暂停输入驱动和忆阻器更新一段时间 τ_{ref} 来实现的。

忆阻量子泄漏积分火 (LIF) 神经元的操作如 Figure 5 所示，其中正弦输入电流通过阈值和不应期机制

驱动量子电路生成输出尖峰，模仿经典 LIF 神经元的行为。

取决于系统参数，尖峰神经元表现出各种行为。然而，Figure 5 中的例子特别具有说明性。该图展示了膜电位对正电流的清晰整合，并且对于负电流有类似抑制的行为，反映了来自生物启发模型所预期的兴奋性和抑制性动力学 [32, 33]。不应期表现为没有更新膜电位或忆阻器状态的时间间隔。

这个示例的一个显著特征是输出尖峰序列中的不对称性，这是驱动电流的时间和幅度相互作用的结果。有时电流的幅度不足以达到阈值，允许频率依赖的振荡调制膜电位，而忆阻耗散则抑制了振幅。当电流符号反转时，膜电位再次向阈值增长。

此示例展示了完全量子模型中忆阻 LIF 神经元电路的所有特征，除了经典输入电流外，这部分对于实际量子设备建模仍然是相关的。

我们提出了一个完全微观的、电路量化漏积分发射神经元的推导，其中包含忆阻泄漏。通过将膜振荡器 LC 与特征阻抗 Z_0 跟踪设备电荷历史的半无限传输线耦合，我们构建了完整的拉格朗日和哈密顿量，执行了勒让德变换，并展示了在弱耦合、绝热极限下哈密顿方程简化为 Equation (5)，恢复了经典的 LIF 方程。这一推导为理解忆阻可塑性和量化浴模式如何塑造尖峰神经元动力学提供了原则性的基础。

我们推导出了一个量子忆阻 LIF 神经元电路的完整哈密顿量，包括所有必要的耗散电路元件处理，并表明它在适当的极限下可以简化为经典的 LIF 动力学。这导致了除 LIF 电路外，首次从原理上推导出量子忆阻器，在讨论量子忆阻器方面做出了新颖的贡献。将这一成果纳入具有可展示尖峰行为的量化尖峰神经元电路中，提供了一个统一框架，可以在此基础上构建更为复杂的量子神经网络，并包括进一步的量子属性以及一个新的研究方向，用于探索在量子电路中的可用内存。

在整个研究中，我们展示了在 Born-Markov 和绝热 (弱耦合) 极限下，量化 LIF 忆阻器忠实地再现了经典动力学。然而，如果不维持这些限制，例如让系统-环境耦合 γ 接近核心模式频率 ω_0 ，或者允许忆阻阻抗 $M(q)$ 在与 $1/\omega_0$ 相当的时间尺度上变化，推导就会失效，并预期会出现真正的量子效应。

在这种情况下，我们预期会看到诸如尖峰轨迹的

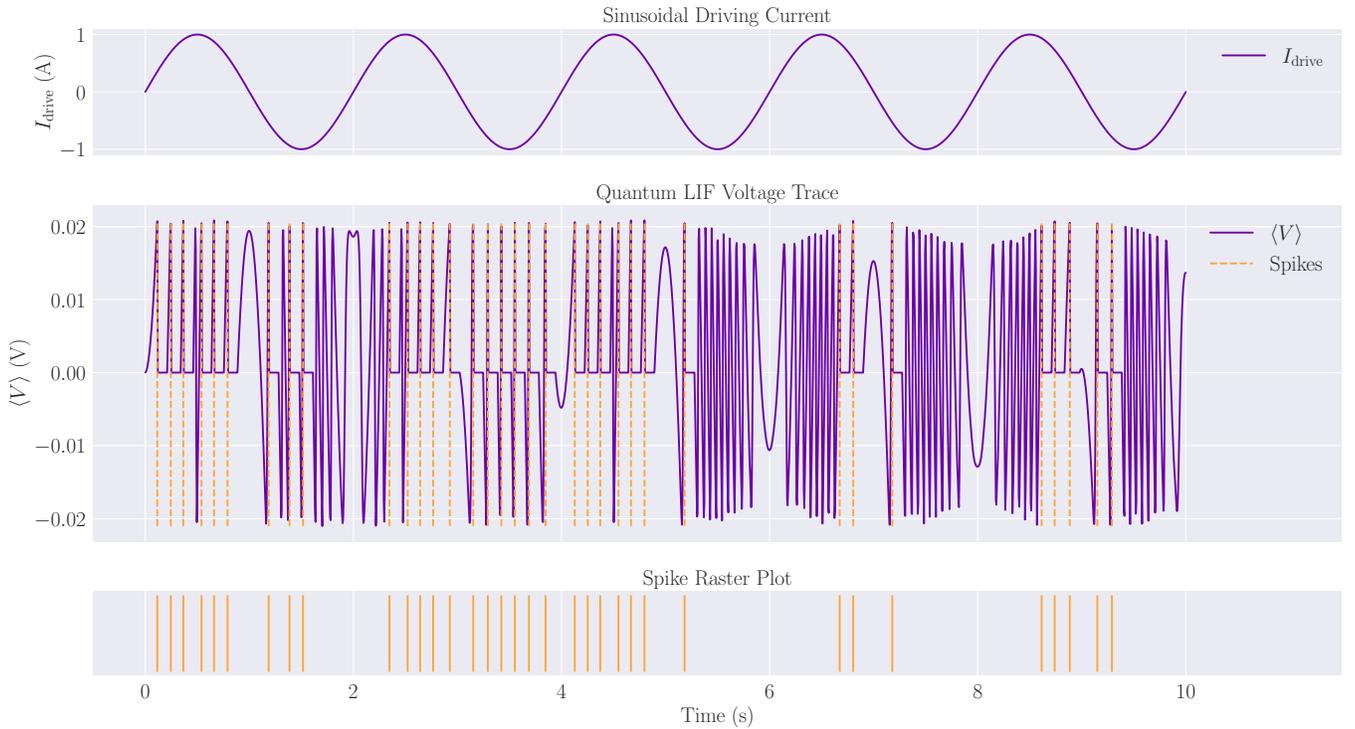


图 5: 一个受到正弦输入电流刺激的量子忆阻器泄漏积分-发射神经元, 根据纳入的阈值和不应期机制产生输出尖峰。顶部面板是驱动电流 $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ 刺激神经元电路的输入驱动电流。中心面板是在驱动电流下的电压期望值演化, 当膜电位超过阈值并重置状态时会指示出尖峰。底部面板显示了被驱动的 LIF 神经元的输出尖峰。

量子叠加、非马尔可夫记忆核以及核心振荡模式与忆阻器之间的纠缠等效应, 这些都会使忆阻器更新法则变得复杂。探索这些非微扰区域为进一步研究量子神经拟态现象及其如何被用于新的计算模型打开了大门, 这是一个从这项工作中衍生出的激动人心的研究方向。

本工作中推导出的统一框架也将每个组件作为量子神经形态元件领域的独立新颖贡献呈现, 这将有助于提升其他模型, 并作为可以进行量化的其他经典神经元电路的构建块, 甚至可能发现充分利用纠缠等经典神经元不具备的基本性质的新纯量子神经元。

虽然这个模型是一个量子忆阻器电路的完整表述, 但仍有许多可以进行修改来探索其量子属性对电路影响的方法, 这些影响超越了其经典的镜像效果。第一个自然的研究路径是超越主方程数值模拟, 进入量子硬件实现电路的行为控制。本文中的推导天然适合超导量子平台, 因为其依赖于电气电路, 并且电容和电感的自然放置与约瑟夫森结 [34–36] 耦合良好。此外, 由于本推导中使用的电路 QED 原理, 实现的一个令人兴奋

的方向是光子平台, 在适当的电路元件到其光子对应物的转换基础上, 并且建立在对光子忆阻器 [14, 37–39] 的探索之上。

忆阻器行为及其与环境浴的相互作用也可以从多个方向进行探索, 将这里依赖大量经典连接的马尔可夫模型转换为利用非马尔可夫忆阻器模型的模型, 在这种模型中使用环境本身来编码忆阻器更新规则和系统记忆 [13, 30]。此外, 还有一种有趣且易于理解的方法是推导一个模型, 该模型同时采用量子化的驱动电流, 如量子化霍奇金-胡克斯利示例 [23, 24] 所示, 以研究完全量子模型所产生的性质, 尽管这距离实际应用更远。

所提出的模型为新兴的量子神经形态计算学科奠定了严格的理论基础, 提供了一个灵活的平台以推动后续理论和实验进展。预计它将能够直接应用于量子机器学习和量子信息处理, 并作为计算神经科学框架中的一个模块化元素发挥作用。对其动态特性和扩展性质的未来研究将进一步揭示其在真正基于量子力学原理实现神经形态架构中的作用。

附录：波的形式主义

在传输线连续体中，波动方程的任何解，

$$\mathfrak{C} \partial_{tt} \phi(x, t) - \frac{1}{\mathfrak{L}} \partial_{xx} \phi(x, t) = 0, \quad x > 0. \quad (\text{A.29})$$

可以表示为入射波和出射波的叠加，在边界处通量算子是 $\phi(0, t) = \phi_{\text{in}}(t) + \phi_{\text{out}}(t)$ ，进入边界的传输线电流可以从

$$I_{\text{TL}} = \frac{1}{\mathfrak{L}} \partial_x \phi(0, t) = -\frac{1}{\mathfrak{L}v} V(t) = -\frac{1}{Z_0} V(t), \quad (\text{A.30})$$

扩展到

$$I_{\text{TL}}(t) = \frac{\phi_{\text{in}}(t) - \phi_{\text{out}}(t)}{Z_0}. \quad (\text{A.31})$$

在边界耦合电容器上实施基尔霍夫电流定律确定了

$$I_{C_C}(t) = C_C \left[\ddot{\phi}_0 - \partial_{tt} \phi(0, t) \right] = I_{\text{TL}}(t). \quad (\text{A.32})$$

将时域的傅里叶变换转换为频域给出 $\partial_{tt} \rightarrow -\omega^2$ ，使得

$$\frac{\phi_{\text{in}}(\omega) - \phi_{\text{out}}(\omega)}{Z_0} = i\omega C_C [\phi_0(\omega) - \phi_{\text{in}}(\omega) - \phi_{\text{out}}(\omega)]. \quad (\text{A.33})$$

定义一个无量纲耦合参数 $\alpha(\omega) = \omega Z_0 C_C$ 并求解 ϕ_{out} 得到

$$\phi_{\text{out}}(\omega) = \underbrace{\frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha}}_{R(\omega)} \phi_{\text{in}}(\omega) - \underbrace{\frac{i\alpha}{1 + i\alpha}}_{S(\omega)} \phi_0(\omega). \quad (\text{A.34})$$

这里我们分别识别反射系数和源到输出传输系数为

$$R(\omega) = \frac{1 - i\omega Z_0 C_C}{1 + i\omega Z_0 C_C}, \quad (\text{A.35})$$

$$S(\omega) = \frac{-i\omega Z_0 C_C}{1 + i\omega Z_0 C_C}. \quad (\text{A.36})$$

在物理背景下解释，弱耦合或低频极限， $\omega Z_0 C_C \ll 1$ ，导致近似形式的 $R(\omega) \approx 1 - 2i\omega Z_0 C_C$ 和 $S(\omega) \approx -i\omega Z_0 C_C$ ，在这种情况下，几乎所有的入射能量都反射出来并带有微小的相位变化，并且节点驱动 ϕ_0 弱地激发传输线中的波。

相反，在强耦合或高频下， $\omega Z_0 C_C \gg 1$ ，则 $R(\omega) \approx -1$ 和 $S(\omega) \approx -1$ ，我们可以看到完全反射并伴有 π 相位翻转，导致传输线和节点强烈杂化。

返回到时域，相移为 $R(\omega)$ 的出射场编码了在边界处看到的有效阻抗：

$$Z_{\text{in}}(\omega) = Z_0 \frac{1 - i\omega Z_0 C_C}{1 + i\omega Z_0 C_C} \xrightarrow{C_C \rightarrow 0} Z_0, \quad (\text{A.37})$$

这恢复了来自 Equation (6) 的忆阻泄漏定律中与频率无关的电阻的行为，在那里我们已经识别出了 $Z_0(t) \equiv M(q(t))$ ，表明传输线是一个成功量化的忆阻器公式。

代码可用性

本信函中展示的数据是使用 Python，特别是 QuTiP 包创建的。用于获得这些结果的代码可以在 GitHub 上的 <https://github.com/deanbrand/QMLIFNC> 获得。

致谢

本工作基于南非国家研究基金会部分支持的研究，参考文献编号为：PMDS22070532362。资助方在研究设计、数据收集、数据分析及解释或本文手稿撰写中均未发挥作用。

作者贡献

D.B. 和 D.D. 提出了量化程序的概念。D.B. 设计并执行了数值模拟。D.B. 和 D.D. 撰写了手稿。D.B. 制作了图表。F.P. 和 D.D. 监督了研究，并在数学过程及手稿撰写方面提供了有价值的见解。所有作者审查和讨论了分析结果。

竞争利益

作者声明没有竞争利益。

* dean.brand@nithecs.ac.za

† domenica.dibenedetto@maastrichtuniversity.nl

‡ francesco.petruccione@nithecs.ac.za

- [1] M. M. Waldrop, Nature **530**, 10.1038/530144a (2016).
- [2] X. Zou, S. Xu, X. Chen, L. Yan, and Y. Han, Science China Information Sciences **64**, 160404 (2021).
- [3] B. V. Benjamin, Proc. IEEE **102**, 10.1109/JPROC.2014.2313565 (2014).
- [4] P. A. Merolla, Science **345**, 10.1126/science.1254642 (2014).

- [5] M. Davies, *IEEE Micro* **38**, 10.1109/MM.2018.112130359 (2018).
- [6] D. Marković, A. Mizrahi, D. Querlioz, and J. Grollier, *Nature Reviews Physics* **2**, 499 (2020), publisher: Springer Nature.
- [7] D. Marković and J. Grollier, *Applied Physics Letters* **117**, 10.1063/5.0020014 (2020), publisher: American Institute of Physics Inc.
- [8] S. Sato, M. Kinjo, O. Takahashi, Y. Nakamiya, and K. Nakajima, in *2004 IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IEEE Cat. No.04CH37541)*, Vol. 4 (IEEE, Budapest, Hungary, 2004) pp. 3253–3256.
- [9] C. Pehle and C. Wetterich, *Physical Review E* **106**, 045311 (2022).
- [10] A. Katumba, M. Freiberger, F. Laporte, A. Lugnan, S. Sackesyn, C. Ma, J. Dambre, and P. Bienstman, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **24**, 1 (2018).
- [11] S. Ghosh, A. Opala, M. Matuszewski, T. Paterek, and T. C. H. Liew, *npj Quantum Information* **5**, 1 (2019), mAG ID: 3106182663.
- [12] S. Ghosh, K. Nakajima, Kohei Nakajima, Kohei Nakajima, T. Krisnanda, Keisuke Fujii, Keisuke Fujii, K. Fujii, and T. C. H. Liew, *Advanced Quantum Technologies* **4**, 2100053 (2021), mAG ID: 3180004979.
- [13] P. Pfeiffer, I. L. Egusquiza, M. Di Ventra, M. Sanz, and E. Solano, *Scientific Reports* **6**, 10.1038/srep29507 (2016), publisher: Nature Publishing Group.
- [14] M. Sanz, L. Lamata, and E. Solano, *APL Photonics* **3**, 10.1063/1.5036596 (2018), publisher: AIP Publishing.
- [15] Guo, Y. -M., Albarrán-Arriagada, F., Alaeian, H., Solano, E., and Barrios, G. Alvarado, *Physical review applied* **18**, 10.1103/PhysRevApplied.18.024082 (2021), mAG ID: 4226411502.
- [16] Y. Cao, G. G. Guerreschi, and A. Aspuru-Guzik, *Quantum Neuron: an elementary building block for machine learning on quantum computers* (2017), arXiv:1711.11240 [quant-ph].
- [17] F. Tacchino, C. Macchiavello, D. Gerace, and D. Bajoni, *npj Quantum Information* **5**, 26 (2019).
- [18] L. B. Kristensen, M. Degroote, P. Wittek, A. Aspuru-Guzik, and N. T. Zinner, *npj Quantum Information* **7**, 59 (2021).
- [19] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *The Journal of Physiology* **117**, 500 (1952).
- [20] K. Yamazaki, V.-K. Vo-Ho, D. Bulsara, and N. Le, *Brain Sciences* **12**, 863 (2022).
- [21] X. Wang, X. Lin, and X. Dang, *Neural Networks* **125**, 258 (2020).
- [22] D. Brand and F. Petruccione, *npj Quantum Information* **10**, 125 (2024).
- [23] T. Gonzalez-Raya, X.-H. Cheng, I. L. Egusquiza, X. Chen, X. Chen, Xi Chen, M. Sanz, and E. Solano, *Physical review applied* **12**, 014037 (2019), mAG ID: 3099857121.
- [24] T. Gonzalez-Raya, E. Solano, and M. Sanz, *Quantum* **4**, 224 (2020).
- [25] L. O. Chua, *IEEE Transactions on Circuit Theory* **18**, 507 (1971), mAG ID: 2162651880.
- [26] L. O. Chua and S.-M. Kang, *Proceedings of the IEEE* **64**, 209 (1976), mAG ID: 2045009304.
- [27] L. O. Chua, *Semiconductor Science and Technology* **29**, 104001 (2014), mAG ID: 1975229527.
- [28] D. B. Strukov, G. S. Snider, D. Stewart, and R. S. Williams, *Nature* **453**, 80 (2008), mAG ID: 2112181056.
- [29] U. Vool and M. Devoret, *International Journal of Circuit Theory and Applications* **45**, 897 (2017).
- [30] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*, repr ed. (Clarendon Press, Oxford, 2010).
- [31] J. Johansson, P. Nation, and F. Nori, *Computer Physics Communications* **183**, 1760 (2012).
- [32] E. M. Callaway, *Neural Networks* **17**, 625 (2004).
- [33] J. K. Eshraghian, M. Ward, E. Neftci, X. Wang, G. Lenz, G. Dwivedi, M. Bennamoun, D. S. Jeong, and W. D. Lu, *Training Spiking Neural Networks Using Lessons From Deep Learning* (2023), arXiv:2109.12894 [cs].
- [34] S. Peotta and M. Di Ventra, *Physical Review Applied* **2**, 034011 (2014).
- [35] R. Cheng, U. S. Goteti, and M. C. Hamilton, *Journal of Applied Physics* **124**, 152126 (2018).
- [36] J. Salmilehto, F. Deppe, M. Di Ventra, M. Sanz, and E. Solano, *Scientific Reports* **7**, 42044 (2017).
- [37] M. Spagnolo, J. Morris, S. Piacentini, M. Antesberger, F. Massa, A. Crespi, F. Ceccarelli, R. Osellame, and P. Walther, *Nature Photonics* **16**, 318 (2022).
- [38] X. Zhuge, J. Wang, and F. Zhuge, *physica status solidi (RRL) – Rapid Research Letters* **13**, 1900082 (2019).
- [39] B. J. Shastri, A. N. Tait, T. Ferreira De Lima, W. H. P. Pernice, H. Bhaskaran, C. D. Wright, and P. R. Prucnal, *Nature Photonics* **15**, 102 (2021).