Steklov 型特征值问题在紧致曲面上的第一特征值的精确下界估计

Gunhee Cho　　Keomkyo Seo

2025 年 6 月 28 日

摘要

设 Ω 是一个具有光滑边界的紧致曲面，且沿 $\partial\Omega$ 的测地曲率 $k_g \geq c > 0$ 对某个常数 $c \in \mathbb{R}$ 成立。我们证明了，如果高斯曲率满足 $K \geq -\alpha$ 对于常数 $\alpha \geq 0$，则 Steklov 型特征值问题的第一特征值 σ_1 满足

$$\sigma_1 + \frac{\alpha}{\sigma_1} \geq c.$$

此外，等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $\frac{1}{c}$ 和 $\alpha = 0$ 的欧几里得圆盘。此外，我们获得了第四阶 Steklov 型特征值问题在 Ω 上的第一个特征值的精确下界。

数学主题分类（2020）：58C40, 35P15, 53C20.
关键词: Steklov 型特征值问题，Schrödinger-Steklov 特征值问题，双调和算子。

1 介绍

设 (Ω, g) 为一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的 n 维紧黎曼流形。考虑以下经典斯捷克洛夫问题：

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma\, u & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 ν 是 $\partial\Omega$ 的向外单位法向量。众所周知，该问题的谱是离散且无界的：

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \longrightarrow \infty,$$

每个特征值根据其重数重复出现。近年来，Steklov 问题引起了广泛的关注（例如参见 [1, 7–10, 12–14, 17, 20, 25]）。我们建议读者参考 Colbois – Girouard – Gordon – Sher [6] 和 Girouard – Polterovich [15] 的综述文章，以了解该领域的最新进展。

对于凸域 Ω 在 $\mathbb{R}^2$ 中，Payne [19] 获得了第一 Steklov 特征值的最优下界，该下界由 Ω 边界的曲率最小值给出。更确切地说，他证明了以下内容。

定理 1.1 (佩因 [19])**.** *设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界凸域。假设在某个常数 $c \in \mathbb{R}$ 下，沿 $\partial\Omega$ 的测地曲率 $k_g \geq c > 0$。然后第一个斯捷克洛夫特征值 σ_1 满足*

$$\sigma_1 \geq c\,.$$

此外，等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $\frac{1}{c}$ 的圆盘。

另一方面，Weinstock [24] 获得了简单连通有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的第一个 Steklov 特征值的上限如下：

$$\sigma_1 L(\partial\Omega) \leq 2\pi,$$

其中 $L(\partial\Omega)$ 表示 $\partial\Omega$ 的长度。此外，等号成立当且仅当 Ω 是一个圆盘。应用高斯-博内定理得到

$$\sigma_1 L(\partial\Omega) \leq 2\pi = \int_{\partial\Omega} k_g\, ds \leq \left(\max_{\partial\Omega} k_g\right) L(\partial\Omega),$$

这表明

$$\sigma_1 \leq \max_{\partial\Omega} k_g.$$

因此，根据定理 1.1，对于任何凸平面区域，其第一个 Steklov 特征值位于边界上的测地曲率的最大值和最小值之间。

在 [8] 中，埃斯科巴将定理 1.1扩展到了二维黎曼流形。具体来说，他证明了以下内容：

定理 1.2 (埃斯科巴 [8])**.** *设 (Ω, g) 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的紧致曲面，并且其高斯曲率满足 $K \geq 0$。假设测地线曲率沿 $\partial\Omega$ 满足 $k_g \geq c > 0$，对于某个常数 $c \in \mathbb{R}$。则第一个 Steklov 特征值 σ_1 满足*

$$\sigma_1 \geq c.$$

此外，等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得圆盘。

受此启发，Escobar 提出了一个猜想：如果一个 n 维黎曼流形 M^n $(n \geq 3)$ 具有非负的 Ricci 曲率，并且第二基本形式 A 满足 $A \geq cI$ 在 ∂M 上对于某个正常数 c，则 $\sigma_1 \geq c$ 并且等号成立仅当 M 是半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球。这一猜想最近由夏—熊在非负截面曲率的情况下解决 [25]。

在这篇论文中，我们关注的是在一个紧致表面上一个 Steklov 型特征值问题的第一个（非零）特征值的精确下界。设 Ω 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的紧凑曲面，且设 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi(t)}{t} \geq 0 & \text{for } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(t)}{t} & \text{exists.} \end{cases} \tag{1}$$

考虑以下 Steklov 型特征值问题：

$$\begin{cases} \Delta u = \varphi(u) & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma\, u & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

其中 ν 表示沿 $\partial\Omega$ 的向外单位余法线向量。令 $u(x)$ 是问题 (2) 对应于特征值 σ_1 的第一个特征函数。如果 Ω 是一个高斯曲率满足 $K(x) \geq -\varphi'(u(x))$ 对所有 $x \in \Omega$ 的紧致曲面，并且测地线曲率沿着 $\partial\Omega$ 满足 $k_g \geq c > 0$，对于某个常数 $c \in \mathbb{R}$，则

$$\sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} \max_{\partial\Omega} \frac{\varphi(u(x))}{u(x)} \geq c.$$

此外，等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得圆盘，并且 $\varphi \equiv 0$。这一结果是定理 1.1和 1.2的扩展方向之一（参见证明 2.1）。特别地，当 $\varphi(t) = \alpha t$ 对某个常数 $\alpha \geq 0$ 成立时，不等式简化为

$$\sigma_1 + \frac{\alpha}{\sigma_1} \geq c.$$

在这种情况下，等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得圆盘并且 $\alpha = 0$（见推论 2.2）。

在第 3 节中，我们研究一个四阶 Steklov 型特征值问题。设 Ω 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的紧凑曲面。考虑在 Ω 上的四阶特征值边界问题如下：

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \varphi(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \Delta u = p_1 \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

其中，ν 表示沿 $\partial\Omega$ 和 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 的外单位共法向量。特别地，当 $\varphi = 0$ 时，这个问题由 Kuttler-Sigillito [16] 和 Payne [19] 提出。自那以后，许多数学家对其进行了发展（例如参见 [4, 5, 11, 21]）。在 [19] 中，Payne 获得了问题 (3) 的第一个特征值的精确下界，如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界的凸域并且 $\varphi = 0$。更准确地说，

定理 1.3 (佩恩 [19])**.** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界凸域。假设测地曲率沿着 $\partial\Omega$ 满足 $k_g \geq c > 0$，其中 $c \in \mathbb{R}$ 为某个常数。然后问题 (3) 中带 $\varphi = 0$ 的首个特征值 p_1 满足

$$p_1 \geq 2c.$$

此外，当且仅当 Ω 是半径为 $\frac{1}{c}$ 的圆盘时等式成立

随后，Wang–Xia [23] 将定理 1.3扩展到具有边界和非负 Ricci 曲率的紧致流形（参见 [11] 关于高维欧几里得域的情况）与 $\varphi = 0$。

最近，Batista–Lima–Sousa–Vieira [3] 获得了欧几里得球体中自由边界极小曲面上四阶 Steklov 问题的第一个特征值的下界。在第 3 节中，我们建立了问题 (3) 的第一特征值相同的锐下界，当 Ω 是一个具有非负高斯曲率的紧致表面且函数 $\varphi(t)$ 满足 $t\varphi(t) \leq 0$（见定理 3.1）。

2 二阶 Steklov 型特征值问题的第一特征值

首个特征值 σ_1 对于 Steklov 型特征值问题 (2) 的特性如下:

$$\sigma_1 = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2 + \int_\Omega f\varphi(f)}{\int_{\partial\Omega} f^2} : f \in H^1(\Omega) \setminus \{0\},\, f\varphi(f) \in L^1(\Omega) \right\}.$$

在本节中，我们在适当的曲率条件下建立了问题 (2) 在紧致表面上首个特征值的精确下界。更准确地说，我们证明了以下内容:

定理 2.1. 设 Ω 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的紧凑曲面。设 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个满足条件 (1) 的光滑函数。假设测地曲率沿 $\partial\Omega$ 满足 $k_g \geq c > 0$，对于某个常数 $c \in \mathbb{R}$，并且高斯曲率 K 满足

$$K(x) \geq -\varphi'(u(x)) \quad \textit{for all } x \in \Omega,$$

其中 $u(x)$ 表示问题 (2) 的第一个本征函数，对应的本征值为 σ_1。然后我们有

$$\sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} \max_{\partial\Omega} \frac{\varphi(u(x))}{u(x)} \geq c.$$

此外，等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得圆盘，并且 $\varphi \equiv 0$ 在 Ω 上。

证明. Bochner 公式意味着

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 &= |\operatorname{Hess} u|^2 + \langle \nabla u, \nabla\varphi(u)\rangle + \operatorname{Ric}(\nabla u, \nabla u) \\ &= |\operatorname{Hess} u|^2 + \varphi'(u)\,|\nabla u|^2 + K\,|\nabla u|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

这表明 $|\nabla u|^2$ 是在 Ω 中的次调和函数。根据强最大值原理，我们有两种情况：

情况一： 函数 $|\nabla u|^2$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值仅在边界 $\partial\Omega$ 上出现。
情况二： 函数 $|\nabla u|^2$ 在 Ω 上是常数。

在情形 I 中，$|\nabla u|^2$ 的最大值在某点 $p \in \partial\Omega$ 处达到。选择一个局部标准正交基底 $\{e_1, e_2\}$，在 p 附近满足 e_1 与 $\partial\Omega$ 和 $e_2 = \nu$ 相切。注意

$$\nabla_{e_1} e_1 \; = \; -\, k_g \, e_2,$$

其中 k_g 表示 $\partial\Omega$ 的测地曲率。请注意，在 $p \in \partial\Omega$ 处，

$$\begin{aligned} 0 = \; & e_1 \big\langle \nabla u, \nabla u \big\rangle \\ = \; & 2 \, \mathrm{Hess}\, u \, (e_1, \nabla u) \\ = \; & 2 \Big(\langle \nabla u, e_1 \rangle \, \mathrm{Hess}\, u(e_1, e_1) + \langle \nabla u, e_2 \rangle \, \mathrm{Hess}\, u(e_1, e_2) \Big). \end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\, u(e_1, e_2) &= e_1 e_2 u - (\nabla_{e_1} e_2) u \\ &= e_1(\sigma_1 \, u) - k_g \, e_1 u \\ &= (\sigma_1 - k_g) \, \langle \nabla u, e_1 \rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

因此我们得到

$$\big\langle \nabla u, e_1 \big\rangle \, \Big(\mathrm{Hess}\, u(e_1, e_1) \; + \; (\sigma_1 - k_g) \, \langle \nabla u, e_2 \rangle \Big) = 0,$$

这在 p 处给出了两种可能性：

(i) $\langle \nabla u, e_1 \rangle = 0$
（二） $\mathrm{Hess}\, u(e_1, e_1) = (k_g - \sigma_1) \, \langle \nabla u, e_2 \rangle$.

对于 (i)，假设 $\langle \nabla u, e_1 \rangle = 0$ 在 $p \in \partial\Omega$ 处。由上可知，

$$\mathrm{Hess}\, u(e_1, e_2) = 0 \quad \text{at } p.$$

由于 p 是函数 $|\nabla u|^2$ 的最大值点，我们有

$$\mathrm{Hess}\, |\nabla u|^2 (e_1, e_1) \leq 0 \quad \text{at } p.$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \operatorname{Hess}|\nabla u|^2(e_1,e_1)\\
&= e_1e_1\langle\nabla u,\nabla u\rangle-(\nabla_{e_1}e_1)\langle\nabla u,\nabla u\rangle\\
&= 2\,e_1\big(\operatorname{Hess}u(e_1,\nabla u)\big)+k_g\,e_2\langle\nabla u,\nabla u\rangle\\
&= 2\,e_1\big(\langle\nabla u,e_1\rangle\operatorname{Hess}u(e_1,e_1)+\langle\nabla u,e_2\rangle\operatorname{Hess}u(e_1,e_2)\big)+2\,k_g\operatorname{Hess}u(e_2,\nabla u)\\
&= 2\big[\operatorname{Hess}u(e_1,e_1)^2+\langle\nabla u,\nabla_{e_1}e_1\rangle\operatorname{Hess}u(e_1,e_1)\big]\\
&\quad+2\,\langle\nabla u,e_2\rangle\,e_1\big(\operatorname{Hess}u(e_1,e_2)\big)+2\,k_g\,\langle\nabla u,e_2\rangle\operatorname{Hess}u(e_2,e_2),
\end{aligned}
$$

其中用到了 $\langle\nabla u,e_1\rangle=0$ 和 $\operatorname{Hess}u(e_1,e_2)=0$ 在 $p\in\partial\Omega$ 的事实。此外，由于边界条件下的 $\langle\nabla u,e_2\rangle=\sigma_1\,u$，我们有

$$
e_1\langle\nabla u,e_2\rangle=\sigma_1\langle\nabla u,e_1\rangle,
$$

这表明

$$
\operatorname{Hess}u(e_1,e_2)+\langle\nabla u,\nabla_{e_1}e_2\rangle=\sigma_1\langle\nabla u,e_1\rangle.
$$

因此

$$
\operatorname{Hess}u(e_1,e_2)=(\sigma_1-k_g)\,\langle\nabla u,e_1\rangle.
$$

在方向 e_1 上对两边求导数，并在 $p\in\partial\Omega$ 处给出

$$
\begin{aligned}
e_1\big(\operatorname{Hess}u(e_1,e_2)\big)&=e_1\big((\sigma_1-k_g)\langle\nabla u,e_1\rangle\big)\\
&=(\sigma_1-k_g)\big(\operatorname{Hess}u(e_1,e_1)+\langle\nabla u,\nabla_{e_1}e_1\rangle\big).
\end{aligned}
$$

使用这一点，我们得到

$$
\begin{aligned}
0\geq{}&\operatorname{Hess}u(e_1,e_1)^2-k_g\langle\nabla u,e_2\rangle\operatorname{Hess}u(e_1,e_1)\\
&+\langle\nabla u,e_2\rangle(\sigma_1-k_g)\big(\operatorname{Hess}u(e_1,e_1)-k_g\langle\nabla u,e_2\rangle\big)\\
&+k_g\langle\nabla u,e_2\rangle\operatorname{Hess}u(e_2,e_2)
\end{aligned}\tag{6}
$$

在 $p\in\partial\Omega$ 处。另一方面，Hopf 边界点引理暗示了

$$
\begin{aligned}
0&<e_2\langle\nabla u,\nabla u\rangle\\
&=2\operatorname{Hess}u(\nabla u,e_2)\\
&=2\,\langle\nabla u,e_2\rangle\operatorname{Hess}u(e_2,e_2)\\
&=\langle\nabla u,e_2\rangle\big(\varphi(u)-\operatorname{Hess}u(e_1,e_1)\big)
\end{aligned}\tag{7}
$$

在 $p \in \partial\Omega$ 处。结合 (6) 和 (7)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hess} u(e_1, e_1)^2 + 2(\sigma_1 - k_g)\,\langle \nabla u, e_2 \rangle \operatorname{Hess} u(e_1, e_1) - k_g(\sigma_1 - k_g)\,\langle \nabla u, e_2 \rangle^2 \\
&\quad \le \sigma_1 \langle \nabla u, e_2 \rangle \operatorname{Hess} u(e_1, e_1) - k_g\,\langle \nabla u, e_2 \rangle\,(\varphi(u) - \operatorname{Hess} u(e_1, e_1)) \\
&\quad < k_g\,\langle \nabla u, e_2 \rangle \big(\operatorname{Hess} u(e_1, e_1) - \varphi(u)\big) + \sigma_1\,\varphi(u) \langle \nabla u, e_2 \rangle \\
&\quad < \sigma_1\,\varphi(u)\,\langle \nabla u, e_2 \rangle
\end{aligned}$$

在 $p \in \partial\Omega$ 处。我们声称 $u(p) \neq 0$。要看到这一点，假设 $u(p) = 0$。然后在 $p \in \partial\Omega$ 处有

$$\langle \nabla u, e_2 \rangle = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma_1 u = 0 \tag{8}$$

，这与 (7) 矛盾。利用这一点，我们最终得到在 $p \in \partial\Omega$ 处的

$$\begin{aligned}
0 &\le (\operatorname{Hess} u(e_1, e_1) + (\sigma_1 - k_g)\langle \nabla u, e_2 \rangle)^2 \\
&< (\sigma_1 - k_g)^2 \langle \nabla u, e_2 \rangle^2 + k_g(\sigma_1 - k_g)\langle \nabla u, e_2 \rangle^2 + \sigma_1\,\varphi(u)\,\langle \nabla u, e_2 \rangle \\
&= \sigma_1(\sigma_1 - k_g)\langle \nabla u, e_2 \rangle^2 + \sigma_1\,u\,\frac{\varphi(u)}{u}\,\langle \nabla u, e_2 \rangle \\
&= \sigma_1(\sigma_1 - k_g)\langle \nabla u, e_2 \rangle^2 + \frac{\varphi(u)}{u}\,\langle \nabla u, e_2 \rangle^2 \\
&= \left(\sigma_1^2 - k_g\,\sigma_1 + \frac{\varphi(u)}{u}\right)\langle \nabla u, e_2 \rangle^2
\end{aligned}$$

。因此我们有

$$\sigma_1^2 - k_g\,\sigma_1 + \frac{\varphi(u)}{u} > 0,$$

，这就得出了结论。

对于（ii)，假设

$$\operatorname{Hess} u(e_1, e_1) = (k_g - \sigma_1)\,\langle \nabla u, e_2 \rangle \quad \text{at } p. \tag{9}$$

霍普边界点引理表明

$$0 < \frac{\partial |\nabla u|^2}{\partial \nu}(p),$$

这给出

$$0 < e_2 \langle \nabla u, \nabla u \rangle \quad \text{at } p. \tag{10}$$

结合（9）和（10）得到

$$\begin{aligned}
0 &< \operatorname{Hess} u(e_2, \nabla u) \\
&= \langle \nabla u, e_1\rangle \operatorname{Hess} u(e_1, e_2) + \langle \nabla u, e_2\rangle \operatorname{Hess} u(e_2, e_2) \\
&= \langle \nabla u, e_1\rangle \operatorname{Hess} u(e_1, e_2) + \langle \nabla u, e_2\rangle \big(\varphi(u) - \operatorname{Hess} u(e_1, e_1)\big) \\
&= (\sigma_1 - k_g) \langle \nabla u, e_1\rangle^2 + \langle \nabla u, e_2\rangle \big(\varphi(u) - \operatorname{Hess} u(e_1, e_1)\big) \\
&= \varphi(u) \langle \nabla u, e_2\rangle + (\sigma_1 - k_g) |\nabla u|^2
\end{aligned} \tag{11}$$

在 $p \in \partial\Omega$ 处。如果 $u(p) = 0$，则我们通过 (8) 和 (11) 得到

$$\sigma_1 > k_g(p)$$

。如果 $u(p) \neq 0$，则 (11) 表明

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 - k_g) |\nabla u|^2 &> -\varphi(u) \langle \nabla u, e_2\rangle \\
&= -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\varphi(u)}{u} \sigma_1 u \langle \nabla u, e_2\rangle \\
&= -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\varphi(u)}{u} \langle \nabla u, e_2\rangle^2 \\
&\geq \ -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\varphi(u)}{u} |\nabla u|^2
\end{aligned}$$

在 $p \in \partial\Omega$ 处。这里我们使用了关于 φ 的条件 $\dfrac{\varphi(t)}{t} \geq 0$。因此

$$\sigma_1 - k_g + \frac{1}{\sigma_1} \frac{\varphi(u)}{u} > 0 \quad \text{at } p,$$

这给出了结论。

在情况二中，$|\nabla u|^2$ 在 Ω 中是常数。从 (4) 可知，

$$\operatorname{Hess} u = 0 \ \text{ and } \ \varphi'(u) = -K.$$

由于在 Ω 中 $\Delta u = \varphi(u) = 0$，我们看到

$$K = 0 \ \text{ on } \ \Omega,$$

即，Ω 是平坦的。此外，在边界 $\partial\Omega$ 上，我们有

$$0 = (\sigma_1 - k_g)\langle \nabla u, e_1\rangle$$

通过 (5)。假设 $\langle \nabla u, e_1\rangle = 0$。由于 ∇u 是常数且满足边界条件，可知 u 也是常数，这与之前的假设矛盾。因此，

$$\sigma_1 - k_g = 0$$

沿 $\partial\Omega$，这意味着 Ω 是一个半径为 $\frac{1}{\sigma_1}$ 的平坦圆盘。这完成了证明。 □

特别地，如果我们选择函数 $\varphi(t) = \alpha t$ 对于某个常数 $\alpha \geq 0$，则本征值问题 (2) 变为一个薛定谔－斯捷克洛夫本征值问题（例如见 [2,18]）。在这种情况下，我们立即得到以下结果。

推论 2.2. 设 Ω 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的紧致曲面，并且其高斯曲率满足 $K \geq -\alpha$，其中 $\alpha \geq 0$ 是某个常数。定义光滑函数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $\varphi(t) = \alpha t$。假设测地曲率在 $\partial\Omega$ 上满足 $k_g \geq c > 0$，对于某个常数 $c \in \mathbb{R}$。然后问题 (2) 的第一特征值 σ_1 满足

$$\sigma_1 + \frac{\alpha}{\sigma_1} \geq c.$$

此外，等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $1/c$ 和 $\alpha = 0$ 的欧氏圆盘。

我们备注当 $\alpha = 0$ 时，推论 2.2恢复了 Payne [19] 和 Escobar [8] 的结果。

3 四阶 Steklov 型特征值问题的第一特征值

在本节中，我们考虑第 1 节中引入的四阶特征值问题 (3)。问题 (3) 的第一个特征值 p_1 由以下变分特征给出：

$$p_1 = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega (\Delta f)^2 - \int_\Omega f\varphi(f)}{\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2} : f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\, f\varphi(f) \in L^1(\Omega),\, 0 \neq \frac{\partial f}{\partial \nu} \in L^2(\partial\Omega) \right\}.$$

我们将建立 p_1 的一个精确下界如下：

定理 3.1. 设 Ω 是一个具有光滑边界的紧致曲面，且其高斯曲率为 $K \geq 0$。设 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是满足 $t\varphi(t) \leq 0$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立的光滑函数。假设测地曲率在 $\partial\Omega$ 上满足 $k_g \geq c > 0$，对于某个常数 $c \in \mathbb{R}$。则问题 (3) 的第一个特征值 p_1 满足

$$p_1 \geq 2c.$$

此外，等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得圆盘。

证明. 定义辅助函数 w 为

$$w := |\nabla u|^2 - u\Delta u.$$

在我们的假设下，Bochner 公式表明

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta w &= \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\Delta(u\Delta u) \\
&= |\operatorname{Hess} u|^2 + \langle \nabla u, \nabla(\Delta U)\rangle + K|\nabla u|^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[u\Delta^2 u + (\Delta u)^2 + 2\langle \nabla u, \nabla(\Delta u)\rangle\right] \\
&= |\operatorname{Hess} u|^2 - \frac{1}{2}(\Delta u)^2 + K|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}u\varphi(u) \\
&\geq 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

其中我们使用了维度 2 中的 Schwarz 不等式 $|\operatorname{Hess} u|^2 \geq \frac{1}{2}(\Delta u)^2$。因此可以得出 w 在 Ω 中是次调和的。根据强最大值原理，有两种情况：

情况一： 函数 w 在区域 $\overline{\Omega}$ 上的最大值仅在边界 $\partial\Omega$ 上出现。
情况二： 函数 w 在区域 Ω 上是常数。

对于情形 I，假设 w 的最大值在某点 $p \in \partial\Omega$ 处取得。如前所述，我们选择一个局部正交标架 $\{e_1, e_2\}$ 在点 p 附近，满足条件 e_1 切于 $\partial\Omega$ 和 $e_2 = \nu$，其中

$$\nabla_{e_1} e_1 \;=\; -k_g\, e_2,$$

这里 k_g 表示 $\partial\Omega$ 的测地曲率。在 $p \in \partial\Omega$，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \nu}(p) &= e_2 w = e_2\langle \nabla u, \nabla u\rangle - e_2(u\Delta u) \\
&= 2\operatorname{Hess} u(\nabla u, e_2) - \langle \nabla u, e_2\rangle \Delta u.
\end{aligned} \tag{13}$$

由于 u 在 $\partial\Omega$ 上消失，我们有 $\langle \nabla u, e_1\rangle = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。因此

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} u(e_1, e_1) &= e_1 e_1 u - (\nabla_{e_1} e_1) u \\
&= e_1\langle \nabla u, e_1\rangle + k_g\langle \nabla u, e_2\rangle \\
&= k_g\langle \nabla u, e_2\rangle
\end{aligned} \tag{14}$$

在 $p \in \partial\Omega$。结合 (13)、(14) 和边界条件得到

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(p) = 2\langle \nabla u, e_2\rangle \operatorname{Hess} u(e_2, e_2) - p_1\langle \nabla u, e_2\rangle^2 \tag{15}$$

注意到，由 (14),

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} u(e_2, e_2) &= \Delta u - \operatorname{Hess} u(e_1, e_1) \\ &= (p_1 - k_g)\langle \nabla u, e_2\rangle \end{aligned} \tag{16}$$

在 $p \in \partial\Omega$ 处。因此，从 (15) 和 (16)，可以得出

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(p) = \langle \nabla u, e_2\rangle^2 (p_1 - 2k_g).$$

由于 $\frac{\partial w}{\partial \nu}(p) > 0$ 由 Hopf 边界点引理和 $\langle \nabla u, e_2\rangle \neq 0$，我们得到

$$p_1 > 2k_g,$$

这表明 $p_1 > 2c$.

对于第二种情况，假设 $w \equiv constant$ 在 Ω 中。由 (12)，我们看到

$$K \equiv 0 \quad \text{and} \quad \varphi \equiv 0 \quad \text{in } \Omega.$$

注意 $u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。由此可得

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 = \text{constant} \quad \text{on } \partial\Omega,$$

这表明

$$\Delta u = p_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} = \text{constant} \quad \text{on } \partial\Omega.$$

由于 Δu 在 Ω 中是调和的，我们得到如下的超定边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = p_1 c_1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = c_1 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

对于某个常数 c_1。根据 Serrin 的著名结果 [22]，Ω 是一个半径为 r 的欧氏圆盘。可以验证

$$p_1 = \frac{2}{r} = 2k_g \geq 2c,$$

这完成了证明。 □

致谢: 第二作者得到了韩国国家研究基金会的资助（RS-2021-NR058050）。部分工作是在第一作者为博士后研究员，第二作者于 2024 年访问加州大学圣塔芭芭拉分校期间完成的。他们希望感谢郭芳魏教授在他们逗留期间的热情款待。

参考文献

[1] G. Alessandrini, R. Magnanini, *Symmetry and nonsymmetry for the overdetermined Stekloff eigenvalue problem*, Z. Angew. Math. Phys. **45** (1994), no. 1, 44–52.

[2] G. Auchmuty, *Steklov eigenproblems and the representation of solutions of elliptic boundary value problems*, Numer. Funct. Anal. Optim. **25** (2004), no. 3–4, 321–348.

[3] R. Batista, B. Lima, P. Sousa, B. Vieira, *Estimate for the first fourth Steklov eigenvalue of a minimal hypersurface with free boundary*, Pacific J. Math. **325** (2023), no. 1, 1–17.

[4] E. Berchio, F. Gazzola, E. Mitidieri, *Positivity preserving property for a class of biharmonic elliptic problems*, J. Differential Equations **229** (2006), no. 1, 1–23.

[5] D. Bucur, A. Ferrero, F. Gazzola, *On the first eigenvalue of a fourth order Steklov problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations **35** (2009), no. 1, 103–131.

[6] B. Colbois, A. Girouard, C. Gordon, D. Sher, *Some recent developments on the Steklov eigenvalue problem*, Rev. Mat. Complut. (2023). `https://doi.org/10.1007/s13163-023-00480-3`

[7] J. A. J. Duncan, A. Kumar, *The first Steklov eigenvalue on manifolds with non-negative Ricci curvature and convex boundary*, J. Geom. Anal. **35** (2025), no. 3, Paper No. 95, 18 pp.

[8] J. F. Escobar, *The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue*, J. Funct. Anal. **150** (1997), no. 2, 544–556.

[9] J. F. Escobar, *An isoperimetric inequality and the first Steklov eigenvalue*, J. Funct. Anal. **165** (1999), no. 1, 101–116.

[10] J. F. Escobar, *A comparison theorem for the first non-zero Steklov eigenvalue*, J. Funct. Anal. **178** (2000), no. 1, 143–155.

[11] A. Ferrero, F. Gazzola, T. Weth, *On a fourth order Steklov eigenvalue problem*, Analysis (Munich) **25** (2005), no. 4, 315–332.

[12] A. Fraser, R. Schoen, *The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces*, Adv. Math. **226** (2011), no. 5, 4011–4030.

[13] A. Fraser, R. Schoen, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, Invent. Math. **203** (2016), no. 3, 823–890.

[14] A. Fraser, R. Schoen, *Some results on higher eigenvalue optimization*, Calc. Var. Partial Differential Equations **59** (2020), no. 5, Paper No. 151, 22 pp.

[15] A. Girouard, I. Polterovich, *Spectral geometry of the Steklov problem*, J. Spectr. Theory **7** (2017), no. 2, 321–359.

[16] J. R. Kuttler, V. G. Sigillito, *Inequalities for membrane and Stekloff eigenvalues*, J. Math. Anal. Appl. **23** (1968), 148–160.

[17] E. Lee, K. Seo, *An overdetermined Steklov eigenvalue problem on Riemannian manifolds with nonnegative Ricci curvature*, Results Math. **80** (2025), no. 4, Paper No. 102.

[18] N. M. Mavinga, *Steklov spectrum and elliptic problems with nonlinear boundary conditions*, Notices Amer. Math. Soc. **70** (2023), no. 2, 214–222.

[19] L. E. Payne, *Some isoperimetric inequalities for harmonic functions*, SIAM J. Math. Anal. **1** (1970), no. 3, 354–359.

[20] L. E. Payne, G. A. Philippin, *Some overdetermined boundary value problems for harmonic functions*, Z. Angew. Math. Phys. **42** (1991), no. 6, 864–873.

[21] S. Raulot, A. Savo, *Sharp bounds for the first eigenvalue of a fourth-order Steklov problem*, J. Geom. Anal. **25** (2015), no. 3, 1602–1619.

[22] J. Serrin, *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Ration. Mech. Anal. **43** (1971), no. 4, 304–318.

[23] Q. Wang, C. Xia, *Sharp bounds for the first non-zero Stekloff eigenvalues*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no. 8, 2635–2644.

[24] R. Weinstock, *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, J. Rational Mech. Anal. **3** (1954), 745–753.

[25] C. Xia, C. Xiong, *Escobar's conjecture on a sharp lower bound for the first nonzero Steklov eigenvalue*, Peking Math. J. **7** (2024), no. 2, 759–778.

Gunhee Cho
数学系
德克萨斯州立大学
地址：601 University Drive, San Marcos, TX 78666.
电子邮箱:wvx17@txstate.edu
网址:https://sites.google.com/view/enjoyingmath/

Keomkyo Seo
数学系和自然科学研究院
淑明女子大学
韩国首尔龙山区清坡路 47 巷 100 号，邮编 04310
电子邮箱:kseo@sookmyung.ac.kr
网址: http://sites.google.com/site/keomkyo/