

超越整函数与其位移共享集合的周期性

SOUMON ROY AND RITAM SINHA

摘要. 本文旨在研究超级小于一的超越整函数的周期性。对于超级小于一的超越整函数和非零复常数 $c, f(z) \equiv f(z+c)$, 如果它们以权重二共享某个集合。

1. 介绍

我们用来证明主要结果的主要工具是值分布理论 [4]。

令 E 表示任意具有有限勒贝格测度的正实数集合, 其中 E 可能在每次出现时有所不同。我们使用 $M(\mathbb{C})$ 来表示在 $\mathbb{C}$ 上定义的所有亚纯函数的域。令 $f \in M(\mathbb{C})$ 和 $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 为具有不同元素的非空集合。我们设置

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} \{z : f(z) - a = 0\},$$

其中 $f-a$ 的一个零点以 m 的重数计数 m 次在 $E_f(S)$ 中。令 $\overline{E}_f(S)$ 表示 $E_f(S)$ 中不同元素的集合。

令 $g \in M(\mathbb{C})$ 。我们说两个函数 f 和 g 共享集合 SCM (即。如果 $E_f(S) = E_g(S)$ (相应地, $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$)。

f 的阶和超阶分别表示为 $\rho(f)$ 和 $\rho_2(f)$, 定义如下:

$$\rho(f) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}, \text{ and } \rho_2(f) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

对于任何非常数亚纯函数 f , 我们用 $S(r, f)$ 表示满足

$$S(r, f) = o(T(r, f)) \text{ as } r \rightarrow \infty, r \notin E.$$

的任意量。移位的 $f(z)$ 意味着 $f(z+c)$, 其中 c 是一个非零复常数。现在, 我们回顾一些文献中众所周知的定义。

定义 1.1. ([12]) 设 $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 。对于一个正整数 k , 我们定义

(i) $N_k(r, a; f)$ 作为 f 的 a -点的记数函数, 重数为 $\leq k$,

(ii) $N_{(k)}(r, a; f)$ 作为 a -点的计数函数 f 具有重数 $\geq k$ 。

类似地, 简化计数函数 $\overline{N}_k(r, a; f)$ 和 $\overline{N}_{(k)}(r, a; f)$ 被定义。

定义 1.2. ([6]) 令 $k \in \mathbb{N}$ 。我们定义 $N_k(r, 0; f)$ 为 f 的零点计数函数, 其中如果 $q \leq k$, 则 f 的重数为 q 的零点被计算 q 次; 如果 $q > k$, 则被计算 k 次。

定义 1.3. ([3]) 一个非常数的一次项系数为 1 的多项式 $P(z)$ 被称为亚纯函数的强唯一性多项式, 如果对于任意两个非常数的亚纯函数 f 和 g , $P(f) \equiv \alpha P(g)$ 意味着 $f \equiv g$, 且 α 是一个非零常数。

1977 年, Rubel 和 Yang[10] 首次研究了整函数及其一阶导数的唯一性, 并证明了以下结果:

定理 A 1. 令 f 为非常数整函数, a 和 b 为两个不同的有限复数值。如果 $f(z)$ 和 $f'(z)$ 共享 a, b 厘米, 那么 $f(z) \equiv f'(z)$ 。

1979 年, Mues 和 Steinmetz[8] 通过将 CM 共享替换为 IM 共享改进了定理 A。

定理 B 1. 设 f 是一个非常数整函数, a 和 b 是两个不同的有限复数值。如果 $f(z)$ 和 $f'(z)$ 共享 a, b IM, 则 $f(z) \equiv f'(z)$ 。

2011 年, Heittokangas 等人 [5] 证明了一个与它们的位移相关的类似定理 A 的结果。

定理 C 1. 令 f 为有限阶非常数整函数, 令 c 为非零有限复数值, 并且令 a, b 为两个不同的有限复数值。如果 $f(z)$ 和 $f(z+c)$ 共享 a, b 厘米, 则 $f(z) \equiv f(z+c)$ 。

同年, 齐 [9] 进一步改进了定理 C。

定理 D 1. 令 f 为一个有限阶的非常数整函数, 令 c 为一个非零有限复数值, 并且令 a, b 为两个不同的有限复数值。如果 $f(z)$ 和 $f(z+c)$ 共享 a, b IM, 则 $f(z) \equiv f(z+c)$ 。

在 2010 年, 张 [13, 14] 考虑了当 $f(z)$ 和它的移位 $f(z+c)$ 共享两个集合时的唯一性, 并得到了以下结果:

定理 E 1. [13] 设 $c \in \mathbb{C}$, $S_1 = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$ 和 $S_2 = \{\infty\}$ 。假设 $f(z)$ 是一个有限阶的非常数亚纯函数, 使得 $E_{f(z)}(S_j, \infty) = E_{f(z+c)}(S_j, \infty)$ 对于 $j = 1, 2$ 成立, 其中 $n \geq 4$ 。那么 $f(z) \equiv tf(z+c)$, 其中 $t^n = 1$ 。

定理 F 1. [14] 设 $n \geq 5$ 是一个整数, a 和 b 是两个非零复数, 使得方程 $\omega^n + a\omega^{n-1} + b = 0$ 没有重根。设 $S = \{\omega \mid \omega^n + a\omega^{n-1} + b = 0\}$ 和 c 是任意非零复数。若对于一个有限级的非常数整函数 f , 有 $E_{f(z)}(S) = E_{f(z+c)}(S)$, 则 $f(z) \equiv f(z+c)$ 。

问题 1.1. 自然会问定理 F 中的集合 S 是否可以被另一个有限集替代。

在这篇笔记中, 我们试图回答上述问题。

2. 超越整函数的周期性

令 l 为一个非负整数或无穷大。对于 $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 我们用 $E_l(a; f)$ 表示 f 的所有 a 点的集合, 其中具有 m 重度的 a 点被计数 m 次, 如果 $m \leq l$ 并且 $l+1$ 次, 如果 $m > l$ 。如果对于两个非常数亚纯函数 f 和 g , 我们有

$$E_l(a; f) = E_l(a; g),$$

, 则我们说 f 和 g 以权重 l 共享值 a 。因此 IM (分别地) CM) 共享对应于权重 0 (分别 ∞)。加权共享的概念最早是在 [7] 中引入的。

令 $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 。我们定义 $E_f(S, l)$ 为

$$E_f(S, l) = \bigcup_{a \in S} E_l(a; f),$$

, 其中 l 是非负整数或无穷大。显然 $E_f(S) = E_f(S, \infty)$ 。

令

$$Q(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) \quad (2.1)$$

为一个单式和强唯一性多项式, 在 $\mathbb{C}[z]$ 中次数为 n 的 $a_i \neq a_j$, $1 \leq i, j \leq n$ 。假设 $Q(z) - Q(0)$ 有 m_1 个单根和 m_2 个重根。进一步假设 k 是 $Q'(z)$ 的不同零点的数量。取

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (2.2)$$

定理 2.1. 设 f 是一个超级小于一的超越整函数, c 是一个非零复数。如果 f 和 $f(z + c)$ 共享集合 S (在 2.2 中定义) 具有权重 2 并且与 $m_1 + m_2 > 2$ 和 $k \geq 2$ 具有 $n > \max\{2k + 2, m_1 + m_2\}$, 那么 $f(z) \equiv f(z + c)$ 。

示例 2.1. [1] 考虑修改后的 Frank-Reinders 多项式

$$P(z) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} z^n - n(n-2) z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} - c,$$

, 其中 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}\}$ 和 $n \geq 7$ 。现在,

$$P(z) - P(0) = z^{n-2} \cdot \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} z^2 - n(n-2)z + \frac{n(n-1)}{2} \right).$$

因此这里 $m_1 + m_2 = 3$ 。此外, 注意

$$P'(z) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} z^3 (z-1)^2.$$

因此, 在这里, $k = 2$ 。另外, 当 $n \geq 6$ 时, P 是强唯一性多项式 (参见定理 1.2, [1])。考虑集合 $P(z)$ 的零点集为 S 。

对于任意超阶小于一的超越整函数 f , 以及任意非零复数 c , 如果 f 和 $f(z + c)$ 共享集合 S 带有权重 2, 那么 $f \equiv f(z + c)$ 。

令 l 为一个正整数或无穷大。对于 $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 我们用 $E_l(a; f)$ 表示所有 a -点的集合, 这些点在 f 中的重数不大于 l , 并且每个这样的 a -点都根据其重数进行计数。

如果两个非常数亚纯函数 f 和 g 满足

$$E_l(a; f) = E_l(a; g),$$

我们就说 f 和 g 以“弱重 l ”分享值 a 。

让 $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 。我们将

$$E_l(S; f) = \bigcup_{a \in S} E_l(a; f),$$

放在 l 是一个正整数或无穷大的地方。

定理 2.2. 设 f 是一个超阶小于一的超越整函数, c 是一个非零复数。如果 f 和 $f(z+c)$ 共享集合 S (定义在 2.2 中) 具有弱权重 3 并且与 $n > \max\{2k+2, m_1+m_2\}$ 、 $m_1+m_2 > 2$ 和 $k \geq 2$ 相关, 则 $f(z) \equiv f(z+c)$ 。

为了建立我们的结果, 我们需要以下引理:

引理 2.1. ([2]) 设 $f(z)$ 是一个超阶小于一的非常数超越亚纯函数, 令 c 是一个非零有限复数。则

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = S(r, f) \text{ and } m\left(r, \frac{f(z)}{f(z+c)}\right) = S(r, f).$$

引理 2.2. ([15], 引理 6) 设 $f(z)$ 是一个超阶小于一的亚纯函数, 设 c 是非零有限复数。那么

$$T(r, f(z+c)) = T(r, f) + S(r, f) \text{ and } N(r, f(z+c)) = N(r, f) + S(r, f).$$

引理 2.3. [11] 令 f 为一个非常数亚纯函数。则

$$N(r, 0; f^{(k)}) \leq k\overline{N}(r, \infty; f) + N(r, 0; f) + S(r, f).$$

定理的证明 2.1. 令 f 和 $f(z+c)$ 是两个超越整函数, 它们以权重 2 共享集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。给定 $Q(z) = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)$, 其中 $a_i \neq a_j, 1 \leq i, j \leq n$ 。现在, 我们定义

$$M(z) := \frac{1}{Q(f(z))}$$

和

$$N(z) := \frac{1}{Q(f(z+c))}.$$

令 $S(r)$ 为任意一个满足对于有限勒贝格测度集之外的 $r \rightarrow \infty$ 有 $S(r) = o(T(r, f) + T(r, f(z+c)))$ 的函数 $S: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 。接下来我们考虑函数

$$\psi(z) := \frac{M''(z)}{M'(z)} - \frac{N''(z)}{N'(z)}.$$

首先, 我们假设 $\psi \not\equiv 0$ 。由于 $\psi(z)$ 可以写成

$$\psi(z) = \frac{N'(z)}{M'(z)} \left(\frac{M'(z)}{N'(z)} \right)',$$

的形式, 所以 ψ 的所有极点都是单极点。因此

$$N(r, \infty; M| = 1) = N(r, \infty; N| = 1) \leq N(r, 0; \psi). \quad (2.3)$$

现在根据第一个基本定理和对数导数引理, 以及引理 2.1 和 2.2, (2.3) 可以写成

$$N(r, \infty; M| = 1) = N(r, \infty; N| = 1) \leq N(r, \infty; \psi) + S(r) \quad (2.4)$$

现在我们观察到 ψ 的可能极点来自于

(i) M 和 N 的极点。

(ii) M' 和 N' 的零点。

另外,

$$M'(Z) = -\frac{f'(z)Q'(f(z))}{(Q(f(z)))^2}, N'(Z) = -\frac{f'(z+c)Q'(f(z+c))}{(Q(f(z+c)))^2}.$$

假设 $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ 是 $Q'(z)$ 的 k 个不同的零点。由于 $f(z)$ 和 $f(z+c)$ 共享集合 S , 其权重为 2, 因此我们可以写出

$$\begin{aligned} N(r, \infty; \psi) &\leq \sum_{j=1}^k (\overline{N}(r, b_j; f(z)) + \overline{N}(r, b_j; f(z+c))) + \overline{N}_0(r, 0; f'(z)) + \overline{N}_0(r, 0; f'(z+c)) \\ &\quad + \overline{N}(r, \infty; f(z)) + \overline{N}(r, \infty; f(z+c)) + \overline{N}_*(r, \infty; M, N), \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中 $\overline{N}_0(r, 0; f'(z))$ 表示非 $\Pi_{i=1}^n(f - a_i)\Pi_{j=1}^k(f - b_j)$ 零点的 f' 零点的约化计数函数。类似地, $\overline{N}_0(r, 0; f'(z+c))$ 被定义。由于 $f(z)$ 和 $f(z+c)$ 共享带有权重 2 的 S , 因此,

$$\begin{aligned} &\overline{N}(r, \infty; M| \geq 2) + \overline{N}_0(r, 0; f'(z+c)) + \overline{N}_*(r, \infty; M, N) \\ &\leq \overline{N}_0(r, 0; Q(f(z+c))| \geq 2) + \overline{N}_0(r, 0; f'(z+c)) + \overline{N}_0(r, 0; Q(f(z+c))| \geq 3) \\ &\leq N(r, 0; f'(z+c)) \\ &\leq N(r, 0; f(z+c)) + S(r, f(z+c)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

现在, 根据第二个基本定理、引理 2.2 以及从 (2.4)、(2.5) 和 (2.6), 我们有

$$\begin{aligned} &(n+k-1)T(r, f) \\ &\leq \overline{N}(r, \infty; f(z)) + \overline{N}(r, 0; Q(f)) + \sum_{j=1}^k (\overline{N}(r, b_j; f(z)) - \overline{N}_0(r, 0; f'(z)) + S(r, f)) \\ &\leq \overline{N}(r, \infty; M \geq 2) + N(r, \infty; \psi) + \sum_{j=1}^k (\overline{N}(r, b_j; f(z)) - \overline{N}_0(r, 0; f'(z)) + S(r, f)) \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^k (\overline{N}(r, b_j; f(z)) + \sum_{j=1}^k (\overline{N}(r, b_j; f(z+c)) + \overline{N}_0(r, 0; f'(z+c))) \\ &\quad + \overline{N}_*(r, \infty; M, N) + \overline{N}(r, \infty; M \geq 2) + S(r, f) \\ &\leq 2kT(r, f(z)) + kT(r, f+c) + N(r, 0; f(z+c)) + S(r, f) \\ &\leq (3k+1)T(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

这与 $n > 2k+2$ 相矛盾。因此, $\psi \equiv 0$ 。然后通过积分, 我们有

$$\frac{1}{Q(f(z))} \equiv \frac{d_0}{Q(f(z+c))} + d_1.$$

这里, 我们考虑两种情况。

情况 1 假设 $d_1 \neq 0$ 。然后上述表达式可以写为

$$Q(f(z)) \equiv \frac{Q(f(z+c))}{d_0 + d_1 Q(f(z+c))}.$$

因此

$$\overline{N}\left(r, -\frac{d_0}{d_1}; Q(f(z+c))\right) \leq \overline{N}(r, \infty; Q(f(z))) = \overline{N}(r, \infty; f(z)).$$

由于 $Q(z) - Q(0)$ 有 m_1 个单根和 m_2 个重根, 所以我们可以假设

$$Q(z) - Q(0) = (z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_{m_1})(z - c_1)^{l_1}(z - c_2)^{l_2} \dots (z - c_{m_2})^{l_{m_2}},$$

其中 $l_i \geq 2$ 对于 $1 \leq i \leq m_2$ 。此外, $l_i < n$ 作为 $Q'(z)$ 至少有两个零点。

若 $Q(0) \neq -\frac{d_0}{d_1}$, 则由第一和第二基本定理, 我们有

$$\begin{aligned} nT(r, f(z+c)) + O(1) &= T(r, Q(f(z+c))) \\ &\leq \overline{N}(r, \infty; Q(f(z+c))) + \overline{N}(r, Q(0); Q(f(z+c))) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, -\frac{d_0}{d_1}; Q(f(z+c))\right) + S(r, f(z+c)) \\ &\leq (m_1 + m_2)T(r, f(z+c)) + S(r, f(z+c)), \end{aligned}$$

这是不可能的, 因为 $n > m_1 + m_2$ 。

若 $Q(0) = -\frac{d_0}{d_1}$, 则

$$Q(f(z)) \equiv \frac{Q(f(z+c))}{d_1(Q(f(z+c)) - Q(0))}.$$

因此, $f(z+c) - b_j$ ($1 \leq j \leq m_1$) 的每个零点重数至少为 n , 而 $f(z+c) - c_i$ ($1 \leq i \leq m_2$) 的每个零点重数至少为 2。

因此由第二基本定理, 我们有

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2 - 1)T(r, f(z+c)) \\ &\leq \overline{N}(r, \infty; f(z+c)) + \sum_{j=1}^{m_1} \overline{N}(r, b_j; f(z+c)) + \sum_{i=1}^{m_2} \overline{N}(r, c_i; f(z+c)) + S(r, f(z+c)) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m_1} N(r, b_j; f(z+c)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m_2} N(r, c_i; f(z+c)) + S(r, f(z+c)) \\ &\leq \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) T(r, f(z+c)) + S(r, f(z+c)), \end{aligned}$$

这是不可能的。

情况 2 因此我们假设 $d_1 = 0$ 。然后 $Q(f(z)) \equiv d_0 Q(f(z+c))$ 。由于 Q 是强唯一性多项式, 因此

$$f(z) \equiv f(z+c).$$

故定理得证。 □

定理的证明 2.2. 这个情况类似于定理 2.1。因此我们省略了细节。

3. 遵守伦理标准

- 利益冲突: 作者声明他们没有利益冲突。
- 数据可用性声明: 数据共享不适用于本文。

- 作者未收到任何针对本文章的研究、作者身份或出版的特定资助/资金。
- 本文不包含任何作者进行的人类或动物参与的研究。

□

REFERENCES

- [1] A. Banerjee, B. Chakraborty, and S. Mallick, Further investigations on Fujimoto type strong uniqueness polynomials, *Filomat* 31(16) (2017), 5203 – 5216.
- [2] Y. M. Chiang and S. J. Feng, On the Nevanlinna characteristic of $f(z + \eta)$ and difference equations in the complex plane, *Ramanujan J.*, 16(1), 105 – 129, 2008.
- [3] H. Fujimoto, On uniqueness of meromorphic functions sharing finite sets, *Amer. J. Math.*, 122 (6), 1175-1203, 2000.
- [4] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Oxford at the Clarendon Press, 1964.
- [5] J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine and J. Rieppo, Uniqueness of meromorphic functions sharing values with their shifts, *Complex Var. Ellipt. Equ.*, 56, 81-92, 2011.
- [6] I. Lahiri and S. Dewan, Inequalities arising out of the value distribution of a differential monomial, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 4(2), 27, 2003.
- [7] I. Lahiri, Weighted sharing and uniqueness of meromorphic functions, *Nagoya Math. J.*, 161, 193-206, 2001.
- [8] E. Mues and N. Steinmetz, Meromorphic Funktionen, die mit ihrer Ableitung Werte teilen, *Manuscr. Math.*, 29, 195-206, 1979.
- [9] X. G. Qi, Value distribution and uniqueness of difference polynomials and entire solutions of difference equations, *Ann. Polon. Math.*, 102, 129-142, 2011.
- [10] L. A. Rubel and C. C. Yang, Values shared by an entire function and its derivative, *Lect. Notes Math.*, 599, 101-103, 1977.
- [11] H. X. Yi, Uniqueness of meromorphic functions and a question of C. C. Yang, *Complex Variables Theory Appl.*, 14, 169 – 176, 1990.
- [12] C. C. Yang and H. X. Yi, *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2003.
- [13] J. Zhang, Value distribution and shared sets of differences of meromorphic function, *J. Math. Anal. Appl.*, 367(2), 401-408, 2010.
- [14] J. Zhang, Value distribution and shared sets of differences of meromorphic functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 367, 401 – 408, 2010.
- [15] X. M. Zheng and H. Y. Xu, On the deficiencies of some differential-difference polynomials, *Abstract and Applied Analysis*, 2014.

¹ **Soumon Roy**, NEVANLINNA LAB, RAMAKRISHNA MISSION VIVEKANANDA CENTENARY COLLEGE, RAHARA, WEST BENGAL 700 118, INDIA.

Email address: rsoumon@gmail.com

² **Ritam Sinha**, NEVANLINNA LAB, RAMAKRISHNA MISSION VIVEKANANDA CENTENARY COLLEGE, RAHARA, WEST BENGAL 700 118, INDIA.

Email address: sinharitam23@gmail.com