关于 KLT 类型的 COHEN–MACAULAY 方案的 GRAUERT–RIEMENSCHNEIDER 消没定理

JEFFERSON BAUDIN, TATSURO KAWAKAMI, AND LINUS RÖSLER

摘要. 给定一个 Cohen–Macaulay 概形 X 和一个解析 $\pi\colon Y \to X$，我们证明了 $R^1\pi_*\omega_Y = 0$。我们推断出如果 $\dim(X) = 3$，则 X 满足 Grauert–Riemenschneider 消去，并且因此具有有理奇点。我们还得到，在任意维数下，如果 X 在特征为 $p > 0$ 的完美域上是有限类型的，则 X 具有 $\mathbb{Q}_p$– 有理奇点。

1. 介绍

在这篇论文中，我们研究了诺特良优秀整概形上的柯西消没的相对版本 *Grauert–Riemenschneider* 消灭定理。

Definition 1.1. 设 X 是一个有限维的诺特优整合概形，且具有对偶复形。若对于每一个解析 $\pi\colon Y \to X$，我们都有对于所有 $j \geq 1$ 成立 $R^j\pi_*\omega_Y = 0$，则称 X 满足 *Grauert–Riemenschneider* 消灭定理。

Grauert–Riemenschneider 消灭定理是特征零双有理几何中的一个基本结果。例如，它用于证明 klt 奇点是理性的 [Elk81, Kov00]，或者理性奇点在形变下是稳定的 [Elk78]。

然而，这种消解在每个正特征中都是已知会失效的。这样的例子可以通过考虑光滑射影曲面上的仿射锥来构造，这些曲面不满足 Kodaira 消解 [Ray78, HK15]，或者通过取 wild$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$– 商 [Tot19, Tot24, BBK23] 来构造。

另一方面，当奇点较轻时，Grauert–Riemenschneider 消灭定理有时已知成立。例如，已经证明在特征 $p > 5$ 中的三维 klt 奇点满足消灭定理 [HW19, BK23]。此外，这个对特征的限制是最佳的，因为在特征 2，3 和 5 [Ber21, CT19, ABL22] 中已知有反例。值得注意的是，所有已知的反例都未能满足 Cohen–Macaulay 条件，这自然引发了一个问题：考恩 – 麦克劳林 klt 奇点是否满足 Grauert–Riemenschneider 消灭定理?

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14F17, 14B05, 13A35.

Key words and phrases. 消去定理；奇点；正特征.

这个问题对于应用特别相关，因为强 F– 正则奇点—被视为 klt 奇点的特征 p 类似物 [Tak04, SS10]—已知是 Cohen–Macaulay 的。

在这篇论文中，我们证明了 Cohen–Macaulay klt 奇点在一次数上满足 Grauert–Riemenschneider 消没。

Theorem 1.2. *设 X 是一个诺特优美的正规 klt 类型的方案，设 $\pi\colon Y \to X$ 是其一个解析。则以下成立：*

(1) *若 X 是 klt 型，则 $R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_Y = 0$。*
(2) *若 X 是 klt 类型且 Cohen–Macaulay，则 $R^1\pi_*\omega_Y = 0$。*

Remark 1.3. (a) 这是一个众所周知的事实，$R^{d-1}\pi_*\omega_Y = 0$ 总是成立的（见 Proposition 3.1）。
(b) 根据 [IY24, Theorem 1.3]，我们同样在 Theorem 1.2的情况下有 $R^1\pi_*\mathcal{O}_Y = 0$。(2)（参见 [IY24, Theorem 1.1] 获取更一般的陈述）。
(c) 我们不能放弃 Theorem 1.2的 Cohen–Macaulay 性的假设。(2) [Ber21, CT19, ABL22] 。

作为一个直接的推论，我们得到以下结果：

Corollary 1.4. *设 X 是一个维度为 3 的诺特优秀正规概形。如果 X 是 klt 类型且 Cohen–Macaulay，则 X 满足 Grauert–Riemenschneider 消去，并具有有理奇点。*

特别地，在正特征下的一个强 F– 正则（甚至是拟 –F– 正则，见 [TWY24]）的三维簇满足 Grauert–Riemenschneider 消失定理并且具有有理奇点（见 Theorem 3.5）。类似地，在全局 +– 正则设定下我们也得到了这样的结果（见 Theorem 3.6）。

正如我们已经指出的，klt 奇点在正特征下不一定是有理的。然而，预计它们满足一种弱概念：Witt– 有理性 [CR12, BE08]。简而言之，一个允许解析 $\pi\colon Y \to X$ 的正规簇 X 被称为具有 Witt– 有理奇点，如果对于所有 $i > 0$，层 $R^i\pi_*W\mathcal{O}_Y$ 都被某个固定的 p– 次幂所消解。

klt 奇点是 Witt– 有理的这一事实，在维度 3 的情况下已知为真 [GNT19, HW22]，在维度 4 的情况下，如果假设所有双有理模型的存在性以及 $p > 5$ [HW23] 成立。然而，这个问题在一般情况下仍然是开放的。在这里，我们提出一个适用于任何维度的该陈述版本：

Theorem 1.5. *设 X 是一个有限类型 klt 类的 Cohen–Macaulay 整体概形，定义在一个特征为 $p > 0$ 的完美域上。假设 X 具有奇点消解。那么 X 有 $\mathbb{Q}_p$– 有理奇点。*

如果此外 X 是投影的并且具有孤立奇点，则它具有 Witt– 有理奇点。

Remark 1.6.
- $\mathbb{Q}_p$– 有理性是在 [PZ21] 中定义的，并且是 Witt– 有理性的轻微弱化。似乎在实践中，知道 $\mathbb{Q}_p$– 消失而不是完整的 Witt– 消失就足以满足许多目的。然而，我们希望最终能够加强 [Bau25, Theorem A] 以获得上述 Witt– 有理性而不假设孤立奇点。
- 如证明所示，可以显著减弱 Theorem 1.5的 Cohen–Macaulay 假设。具体来说，第一个陈述只需假设 $\mathbb{Q}_p$–Cohen–Macaulay 性，第二个陈述则需假设 Witt–Cohen–Macaulay 性（参见 [Bau25, Definition 5.1.3]）。例如，这些概念在普遍同构和任意有限商下是不变的，而通常的 Cohen–Macaulay 性却不是这样 [Fog81]。我们希望最终能够证明只需 klt 类型假设和存在一个解析就足够了。

2. 预备知识

2.1. **符号和术语.** 贯穿全文，种类表示一个具有对偶复形的整闭、优秀的诺特概型。一个对儿 (X, Δ) 由一个正规簇 X 以及在 X 上的一个有效 $\mathbb{Q}$– 除子 Δ 组成。

所有双模复形都在 [Har66] 意义下被归一化。也就是说，如果 X 是一个维度为 d 的簇，并且有一个对偶复形 $\omega_X^\bullet$，那么对于所有的 $i < -d$ 都有 $\mathcal{H}^i(\omega_X^\bullet) = 0$，并且 $\omega_X \coloneqq \mathcal{H}^{-d}(\omega_X^\bullet) \neq 0$（给定某个导出范畴中的复形 $\mathcal{A}^\bullet$ 和 $i \in \mathbb{Z}$，我们令 $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^\bullet)$ 表示其第 i 个上同调对象）。

如果我们固定一个簇 X 并带有对偶复形 $\omega_X^\bullet$ 如上，并且 $\pi\colon Y \to X$ 是有限类型的分离态射，则我们自然地通过取 $\omega_Y^\bullet \coloneqq \pi^! \omega_X^\bullet$ 在 Y 上诱导出一个对偶复形（参见 [Sta25, Tag 0AA3]）。

一个簇 X 的解析是一个射影双有理态射 $\pi\colon Y \to X$，其中 Y 是正则的。

Definition 2.1. 我们说一个簇 X 具有*有理奇点*，如果它是 Cohen–Macaulay 的，并且对于任何解析 $\pi\colon Y \to X$，自然映射 $\mathcal{O}_X \to R\pi_* \mathcal{O}_Y$ 是一个同构。

注意通过 Grothendieck 对偶，具有有理奇点的簇自动满足 Grauert–Riemenschneider 消没定理。由于 [CR15]，如果假设奇异性的解析，则只需验证一个解析的合理性。在正特征的情况下，不需要假设解析的存在性，根据 [CR11]。

Definition 2.2. 我们说一个簇 X 是 *klt 类型的*如果它是正规的，并且存在一个有效的 $\mathbb{Q}$– 除子 Δ，使得配对 (X, Δ) 是 klt（参见 [BMP$^+$23, Definition 2.28]）。

3. 主要定理的证明

3.1. **有理性结果.** 在本节中，我们证明了 Theorem 1.2和 Corollary 1.4。

Proposition 3.1. *设 X 是一个维度为 d 的簇，设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个判决式。那么对于每一个判决式 $\pi\colon Y \to X$，都有 $R^{d-1}\pi_*\omega_Y = 0$。*

证明. 我们可以假设 $X = \operatorname{Spec} R$ 是仿射的，并令 $\pi\colon Y \to X$ 为一个解析。由于 Y 是在 R 上的射影，我们可以找到一个一般的超平面截面 H，使得 H 是光滑的，由 [BMP+23, Theorem 2.17] 和 $R^{d-1}\pi_*\omega_X(H) = 0$ 及相对塞尔消去法可知。考虑短正合序列

$$0 \to \mathcal{O}_X(-H) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_H \to 0.$$

取 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(-, \omega_X)$，我们得到一个短正合序列

$$0 \to \omega_X \to \omega_X(H) \to \omega_H \to 0.$$

由于 $R^{d-1}\pi_*\omega_X(H) = 0$，所需的消失 $R^{d-1}\pi_*\omega_X = 0$ 可以归结为消失 $R^{d-2}\pi_*\omega_H = 0$。通过重复这一论证，我们可以将其简化为情形 $\dim X = 2$，这可以从 [Kol13, Theorem 10.4] 得出。 □

Theorem 3.2. *设 X 是一种 klt 类型的簇，并且设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个分辨率。那么对于所有 $i > 0$，*

$$\operatorname{codim} R^i\pi_*\mathcal{O}_Y > i + 1.$$

特别地，$R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_Y = 0$ 其中 $d = \dim(X)$。

Remark 3.3.
- 注意我们只需要 $\pi\colon Y \to X$ 是一个解析而不是对数解析。实际上，我们只需要 Y 是正规的和因子的。通过林泉马的一个例子（见 [IY24, Example 3.2]），可能无法大大削弱这些假设。
- 特别地，我们的例外除子一开始可能不是正规的（只有整数的）。因为我们没有假设日志分辨率。尽管我们在下面可能会使用一种给出需要正规性的想法的除子符号，我们实际上将与 $\mathbb{Q}$– 线丛（即 $\operatorname{Pic} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的元素）在解析和例外组件上工作。

证明. 通过归纳维度并局部化，足以证明 $R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_Y = 0$。由 [Har77, Theorem II.7.17] 存在一个闭子概形 $Z \subseteq X$ 使得 π 是沿 Z 对 X 的爆破。令 $E = \pi^{-1}(Z)$，使得 $\mathcal{O}_Y(-E)$ 是 π–ample 通过 [Sta25, Tags 02NS and 02 操作系统]。我们可以取 $n \gg 0$，使得 $R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_Y(-nE) = 0$ 由相对塞尔消去。让我们写

$$nE = \underbrace{\sum_{i \in I} r_i F_i}_{F} + G,$$

表示一些正整数 $r_i > 0$，其中 F_i 的正是 π– 例外的（即像的余维度至少为 2）组件的 E。此外，注意到 $R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_Y(-F) = 0$。确实，我们有短正合序列

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-nE) \to \mathcal{O}_Y(-F) \to \mathcal{O}_G(-F) \to 0.$$

因为 $R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_Y(-nE)=0$，只需证明 $R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_G(-F)=0$。鉴于 $G\to\pi(G)$ 的所有纤维的维数都是 $\le d-2$，这是显而易见的。为了完成证明，我们接下来需要展示如下内容：

Claim. 如果对于某些满足 $\sum_{i\in I} n_i\ge 1$ 的 $(n_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 存在 $R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_Y(-\sum_{i\in I} n_iF_i)=0$，那么存在 $j\in I$ 使得 $n_j\ge 1$ 且

$$R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_Y\left(-(n_j-1)F_j-\sum_{i\in I\setminus\{j\}} n_iF_i\right)=0.$$

。

声明的证明。目前，固定 $j\in I$ 具有 $n_j\ge 1$ 的值。我们将稍后选择一个特定的 j。考虑短正合序列

$$\begin{aligned}0\to\mathcal{O}_Y\left(-\sum_{i\in I} n_iF_i\right)\to\mathcal{O}_Y&\left(-(n_j-1)F_j-\sum_{i\in I\setminus\{j\}} n_iF_i\right)\\&\to\mathcal{O}_{F_j}\left(F_j-\sum_{i\in I} n_iF_i\right)\to 0.\end{aligned}$$

因为，我们的目标是证明

$$R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_Y\left(-(n_j-1)F_j-\sum_{i\in I\setminus\{j\}} n_iF_i\right)=0,$$

这等价于证明

$$R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_{F_j}\left(F_j-\sum_{i\in I} n_iF_i\right)=0.$$

如果 $\dim\pi(F_j)>0$，那么这是显然的，因为此时 $F_j\to\pi(F_j)$ 的纤维维数为 $\le d-2$。如果 $\dim\pi(F_j)=0$，则

$$\begin{aligned}R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_{F_j}\left(F_j-\sum_{i\in I} n_iF_i\right)&=H^{d-1}\left(F_j,\mathcal{O}_{F_j}\left(F_j-\sum_{i\in I} n_iF_i\right)\right)\\&\cong H^0\left(F_j,\mathcal{O}_{F_j}\left(K_{F_j}-F_j+\sum_{i\in I} n_iF_i\right)\right)^\vee\\&\cong H^0\left(F_j,\mathcal{O}_{F_j}\left(K_Y+\sum_{i\in I} n_iF_i\right)\right)^\vee.\end{aligned}$$

要得出后一组消失的结论，只需要证明 $-(K_Y+\sum_{i\in I} n_iF_i)|_{F_j}$ 是 $\pi|_{F_j}$– 大。现在让我们找到一些 $j\in I$ 以达到这个目的。由于 X 是 klt 型的，存在一个有效的 $\mathbb{Q}$– 除子 Δ，使得

$$K_Y+\sum_{i\in I} a_iF_i+\pi_*^{-1}\Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_X+\Delta)$$

对某些 $a_i\in\mathbb{Q}_{<1}$（注意 $\mathrm{Supp}(F)=\mathrm{Exc}(\pi)$，因为 π 在 E 之外是同构的）。令 $J\coloneqq\{i\in I\mid n_i-a_i>0\}\subset I$。注意到 $J\neq\emptyset$，因为 $\sum_{i\in I} n_i\geq 1$ 和 $a_i<1$。令

$$t\coloneqq\max_{i\in J}\left\{\frac{n_i-a_i}{r_i}\right\}\in\mathbb{Q}_{>0},$$

并且令 $j\in J$ 是最大值达到的索引。我们有

$$F_j\not\subset \mathrm{Supp}\left(t\left(\sum_{i\in I} r_iF_i\right)-\sum_{i\in J}(n_i-a_i)F_i\right),$$

因此

$$-\left(\sum_{i\in J}(n_i-a_i)F_i)\right)\Bigg|_{F_j}=\left(-tG-t\sum_{i\in I} r_iF_i\right)\Bigg|_{F_j}+\left(tG+t\sum_{i\in I} r_iF_i-\sum_{i\in J}(n_i-a_i)F_i\right)\Bigg|_{F_j}$$

是 $\pi|_{F_j}$– 大（回想一下 $-G-\sum_{i\in I} r_iF_i$ 是 π– 丰富），从而

$$\begin{aligned}-\left(K_Y+\sum_{i\in I} n_iF_i\right)\Bigg|_{F_j} &\sim_{\mathbb{Q},\pi|_{F_j}} -\left(\sum_{i\in I}(n_i-a_i)F_i\right)\Bigg|_{F_j}+\pi_*^{-1}\Delta|_{F_j}\\ &=-\left(\sum_{i\in J}(n_i-a_i)F_i\right)\Bigg|_{F_j}+\left(\sum_{i\in I\setminus J}(a_i-n_i)F_i\right)\Bigg|_{F_j}+\pi_*^{-1}\Delta|_{F_j}\end{aligned}$$

也是 $\pi|_{F_j}$– 大。 □

Lemma 3.4. 令 X 是一个维度为 d 的正规簇，并设 $\pi\colon Y\to X$ 是一个解析。假设对于所有 $i\geq 1$，有

$$\operatorname{codim} R^i\pi_*\mathcal{O}_Y>i+1$$

。然后 $\pi_*\omega_Y=\omega_X$，存在一个自然单射

$$R^1\pi_*\omega_Y\hookrightarrow\mathcal{H}^{-(d-1)}(\omega_X^\bullet).$$

。特别地，如果 X 是 *Cohen–Macaulay* 的，则 $R^1\pi_*\omega_Y=0$。

证明. 考虑精确三角形

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow R\pi_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow \tau_{\geq 1}R\pi_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{+1}$$

应用 $\mathbb{D}(-) \coloneqq \mathcal{RH}om(-,\omega_X^\bullet)$ 和 Grothendieck 对偶性给出

$$\mathbb{D}(\tau_{\geq 1}R\pi_*\mathcal{O}_Y) \longrightarrow R\pi_*\omega_Y[d] \longrightarrow \omega_X^\bullet \xrightarrow{+1}$$

，因此取上同调层诱导出一个精确序列

$$\pi_*\omega_X \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow \mathcal{H}^{-(d-1)}\mathbb{D}(\tau_{\geq 1}R\pi_*\mathcal{O}_Y) \longrightarrow R^1\pi_*\omega_Y \longrightarrow \mathcal{H}^{-(d-1)}(\omega_X^\bullet).$$

。只需证明

$$\mathcal{H}^{-(d-1)}\mathbb{D}(\tau_{\geq 1}R\pi_*\mathcal{O}_Y) = 0.$$

我们将通过关于 $i \geq 1$ 的递降归纳法来证明 $\mathcal{H}^{-(d-1)}\mathbb{D}(\tau_{\geq i}R\pi_*\mathcal{O}_Y) = 0$。对于 $i \gg 0$，没有内容可展示。固定 $i \geq 1$，并考虑精确三角形

$$R^if_*\mathcal{O}_Y[-i] \longrightarrow \tau_{\geq i}Rf_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow \tau_{\geq i+1}Rf_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{+1}$$

(见 [Sta25, Tag 08J5])。应用 $\mathbb{D}$ 得到

$$\mathbb{D}(\tau_{\geq i+1}Rf_*\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathbb{D}(\tau_{\geq i}Rf_*\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathbb{D}(R^if_*\mathcal{O}_Y)[i] \xrightarrow{+1}$$

因为 $\mathcal{H}^{-(d-1)}\mathbb{D}(\tau_{\geq i+1}Rf_*\mathcal{O}_Y) = 0$ 根据归纳假设，只需通过上同调层的长正合序列证明 $\mathcal{H}^{-(d-1)}(\mathbb{D}(R^if_*\mathcal{O}_Y)[i]) = 0$ 即可。给定 $\dim(\mathrm{Supp}(R^if_*\mathcal{O}_Y)) \leq d-i-2$ 由假设，我们知道由 [Sta25, Tag 0A7U]，$\mathbb{D}(R^if_*\mathcal{O}_Y)$ 在次数 $\geq -(d-i-2)$ 上被支撑。等价地，$\mathbb{D}(R^if_*\mathcal{O}_Y)[i]$ 在次数 $\geq -(d-2)$ 上被支撑，所以 $\mathcal{H}^{-(d-1)}\mathbb{D}(R^if_*\mathcal{O}_Y)[i] = 0$。 □

*Theorem 1.2*的证明. 这些断言源于 Proposition 3.1,Theorem 3.2和 Lemma 3.4。 □

*Corollary 1.4*的证明. 令 $\pi\colon Y \to X$ 为一个分辨率。给定 $R^i\pi_*\omega_X = 0$ 对所有 $i > 0$ 由 Theorem 1.2 和 Proposition 3.1，并且 $\pi_*\omega_Y = \omega_X$ 由 Lemma 3.4，我们有 $R\pi_*\omega_Y = \omega_X$。我们由此推断出 $R\pi_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$，通过 Grothendieck 对偶性和 X 的 Cohen–Macaulay 性质。 □

对于强 F– 正则（相应地拟 –F– 正则，+– 正则）奇点的定义，我们请读者参考 [SS10, Definition 3.1]（相应地 [TWY24, Definition 4.1],[BMP+23, Definition 6.21]）。请注意，根据定义，一个强 F– 正则或拟 F– 正则簇是 F– 有限的（即绝对 Frobenius 是有限的）。我们说一对 (X,Δ) 是 +-正则，如果它在每个纤维上都是 +-正则的。

Theorem 3.5. 设 X 是一个三维强 F– 正则簇。那么 X 满足格劳尔特—里默施奈德消没定理，并且具有有理奇点。

证明. 我们知道由 [HH89, Corollary 2.5] 和 [Gab04, Remark 13.6] 可知 X 是 Cohen–Macaulay。结合 [SS10, Corollary 6.9] 和 [HW02, Theorem 3.3]，我们推断出 X 属于 klt 类型，因此证明由 Corollary 1.4完成。 □

Theorem 3.6. *设 (X, Δ) 是一个 3 维 + 正则对，使得 $K_X + \Delta$ 是 $\mathbb{Q}$–Cartier 的。那么 X 满足 Grauert–Riemenschneider 消失性，并且具有有理奇点。*

相同的陈述也适用于 X 拟 –F– 正则，以及 $\Delta = 0$。

证明. 由 [BMP+23, Proposition 6.10]（分别由 [KTT+24, Theorems 5.8 and 8.9]）可知，成对的 (X, Δ) 是 klt 并且 X 是 Cohen–Macaulay。然后我们通过 Corollary 1.4 得到结果。 □

3.2. $\mathbb{Q}_p$**–合理性.** 在整个过程中，固定一个在正特征完美域上的有限类型的簇 X。对于 $n \geq 1$，我们令 $W_n\mathcal{O}_X$ 表示 p– 典型 Witt 向量的层，并带有其诱导的 Verschiebung、限制和 Frobenius 映射（参见例如 [KTT+22, Section 2.2]）。复形 $W_n\omega_X^\bullet$ 表示由局部环空间 $(X, W_n\mathcal{O}_X)$ 给出的概型 W_nX 上的标准对偶化复形，而 $W_n\omega_X$ 表示其最小非零上同调层（参见 [Bau25, Section 2.2]）。

Remark 3.7. 回想一下，作为一个集合，$W_n\mathcal{O}_X$ 简单地由 $\mathcal{O}_X$ 中的 n 元组组成。Verschiebung $V\colon F_*W_n\mathcal{O}_X \to W_{n+1}\mathcal{O}_X$ 将 $(s_1, \ldots, s_n)$ 发送到 $(0, s_1, \ldots, s_n)$，而限制 $R\colon W_{n+1}\mathcal{O}_X \to W_n\mathcal{O}_X$ 将 $(s_1, \ldots, s_{n+1})$ 发送到 $(s_1, \ldots, s_n)$。特别地，存在一个自然的短正合序列

$$0 \longrightarrow F_*W_n\mathcal{O}_X \xrightarrow{V} W_{n+1}\mathcal{O}_X \xrightarrow{R^n} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

的 $W_{n+1}\mathcal{O}_X$-模。

Lemma 3.8. *设 X 是完美域上的有限类型 klt 类型簇，并设 $\pi\colon Y \to X$ 表示一个解析。那么对于所有的 $n \geq 1$，我们有 $\pi_*W_n\omega_Y = W_n\omega_X$。*

证明. 让我们通过归纳证明结果 $n \geq 1$。情况 $n = 1$ 包含在 Lemma 3.4中。一般来说，应用 Grothendieck 对偶（即。函子 $\mathcal{RH}om_{W_{n+1}\mathcal{O}_X}(-, W_{n+1}\omega_X^\bullet)$）到图

$$\begin{tikzcd}
F_*W_n\mathcal{O}_X \arrow[r, "V"] \arrow[d] & W_{n+1}\mathcal{O}_X \arrow[r, "R^n"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
F_*R\pi_*W_n\mathcal{O}_Y \arrow[r, "V"] & R\pi_*W_{n+1}\mathcal{O}_Y \arrow[r, "R^n"] & R\pi_*\mathcal{O}_Y \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}$$

并取上同调的长正合序列给出了一个具有精确行的精确图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_*\omega_Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_*W_{n+1}\omega_Y \arrow[r] \arrow[d] & F_*W_n\omega_Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & R^1\pi_*\omega_Y \arrow[r] \arrow[d, hook] & \dots \\
0 \arrow[r] & \omega_X \arrow[r] & W_{n+1}\omega_X \arrow[r] & F_*W_n\omega_X \arrow[r] & \mathcal{H}^{-(d-1)}(\omega_X^\bullet) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

(注意 $R^1\pi_*\omega_Y \to \mathcal{H}^{-(d-1)}(\omega_X^\bullet)$ 是单射的，由 Lemma 3.4和 Theorem 1.2给出)。然后通过图追踪论证得出 $\pi_*W_{n+1}\omega_Y \to W_{n+1}\omega_X$ 是同构。 □

*Theorem 1.5*的证明. 此陈述和在 Remark 1.6中的陈述直接来自于 Lemma 3.8和 [Bau25, Theorem 5.1.4]（另见引者同前的定理 A 以获得当我们假设射影性和孤立奇点时的陈述）。 □

致谢

我们想感谢 Fabio Bernasconi 和 Shou Yoshikawa 与本文内容相关的有用对话。TK 得到了 JSPS KAKENHI 资助项目号 JP24K16897 的支持。JB 和 LR 获得了 ERC 启动资金#804334 的支持。

References

[ABL22] Emelie Arvidsson, Fabio Bernasconi, and Justin Lacini. On the Kawamata-Viehweg vanishing theorem for log del Pezzo surfaces in positive characteristic. *Compos. Math.*, 158(4):750–763, 2022.

[Bau25] Jefferson Baudin. A Grauert–Riemenschneider vanishing theorem for Witt canonical sheaves. *arXiv e-print: arXiv:2506.14647v1*, 2025. Available at arXiv:2506.14647.

[BBK23] Jefferson Baudin, Fabio Bernasconi, and Tatsuro Kawakami. The Frobenius–stable version of the Grauert–Riemenschneider vanishing theorem fails. 2023. Available at arXiv:2102.13456v3.

[BE08] Manuel Blickle and Hélène Esnault. Rational singularities and rational points. *Pure Appl. Math. Q.*, 4(3, part 2):729–741, 2008.

[Ber21] Fabio Bernasconi. Kawamata-Viehweg vanishing fails for log del Pezzo surfaces in characteristic 3. *J. Pure Appl. Algebra*, 225(11):Paper No. 106727, 16, 2021.

[BK23] Fabio Bernasconi and János Kollár. Vanishing theorems for three-folds in characteristic $p > 5$. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (4):2846–2866, 2023.

[BMP+23] Bhargav Bhatt, Linquan Ma, Zsolt Patakfalvi, Karl Schwede, Kevin Tucker, Joe Waldron, and Jakub Witaszek. Globally +-regular varieties and the minimal model program for threefolds in mixed characteristic. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 138:69–227, 2023.

[CR11] Andre Chatzistamatiou and Kay Rülling. Higher direct images of the structure sheaf in positive characteristic. *Algebra Number Theory*, 5(6):693–775, 2011.

[CR12] Andre Chatzistamatiou and Kay Rülling. Hodge-Witt cohomology and Witt-rational singularities. *Doc. Math.*, 17:663–781, 2012.

[CR15] Andre Chatzistamatiou and Kay Rülling. Vanishing of the higher direct images of the structure sheaf. *Compos. Math.*, 151(11):2131–2144, 2015.

[CT19] Paolo Cascini and Hiromu Tanaka. Purely log terminal threefolds with non-normal centres in characteristic two. *Amer. J. Math.*, 141(4):941–979, 2019.

[Elk78] Renée Elkik. Singularités rationnelles et déformations. *Invent. Math.*, 47(2):139–147, 1978.

[Elk81] Renée Elkik. Rationalité des singularités canoniques. *Invent. Math.*, 64(1):1–6, 1981.

[Fog81] John Fogarty. On the depth of local rings of invariants of cyclic groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83(3):448–452, 1981.

[Gab04] Ofer Gabber. Notes on some t-structures. In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, pages 711–734. Walter de Gruyter, Berlin, 2004.

[GNT19] Yoshinori Gongyo, Yusuke Nakamura, and Hiromu Tanaka. Rational points on log Fano threefolds over a finite field. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 21(12):3759–3795, 2019.

[Har66] Robin Hartshorne. *Residues and duality*. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HH89] Melvin Hochster and Craig Huneke. Tight closure and strong F-regularity. In *Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987)*, number 38 in Mém. Soc. Math. France (N.S.), pages 119–133. Société mathématique de France, 1989.

[HK15] Christopher D. Hacon and Sándor J. Kovács. Generic vanishing fails for singular varieties and in characteristic $p > 0$. In *Recent advances in algebraic geometry*, volume 417 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 240–253. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015.

[HW02] Nobuo Hara and Kei-Ichi Watanabe. F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities. *J. Algebraic Geom.*, 11(2):363–392, 2002.

[HW19] Christopher D. Hacon and Jakub Witaszek. On the rationality of Kawamata log terminal singularities in positive characteristic. *Algebr. Geom.*, 6(5):516–529, 2019.

[HW22] Christopher D. Hacon and Jakub Witaszek. On the relative minimal model program for threefolds in low characteristics. *Peking Math. J.*, 5(2):365–382, 2022.

[HW23] Christopher D. Hacon and Jakub Witaszek. On the relative minimal model program for fourfolds in positive and mixed characteristic. *Forum Math. Pi*, 11:Paper No. e10, 35, 2023.

[IY24] Shihoko Ishii and Ken-Ichi Yoshida. On vanishing of higher direct images of the structure sheaf. *arXiv e-print, arXiv:2410.15282v3*, 2024. Available at arXiv:2410.15282.

[Kol13] János Kollár. *Singularities of the minimal model program*, volume 200 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. With a collaboration of Sándor Kovács.

[Kov00] Sándor J. Kovács. A characterization of rational singularities. *Duke Math. J.*, 102(2):187–191, 2000.

[KTT+22] Tatsuro Kawakami, Teppei Takamatsu, Hiromu Tanaka, Jakub Witaszek, Fuetaro Yobuko, and Shou Yoshikawa. Quasi-F-splittings in birational geometry. https://arxiv.org/abs/2208.08016, 2022. To appear in *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*.

[KTT+24] Tatsuro Kawakami, Teppei Takamatsu, Hiromu Tanaka, Jakub Witaszek, Fuetaro Yobuko, and Shou Yoshikawa. Quasi-F-splittings in birational geometry III. https://arxiv.org/abs/2408.01921, 2024.

[PZ21] Zsolt Patakfalvi and Maciej Zdanowicz. Ordinary varieties with trivial canonical bundle are not uniruled. *Math. Ann.*, 380(3-4):1767–1799, 2021.

[Ray78] Michel Raynaud. Contre-exemple au “vanishing theorem” en caractéristique $p > 0$. In *C. P. Ramanujam—a tribute*, volume 8 of *Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.*, pages 273–278. Springer, Berlin-New York, 1978.

[SS10] Karl Schwede and Karen E. Smith. Globally F-regular and log Fano varieties. *Adv. Math.*, 224(3):863–894, 2010.

[Sta25] The Stacks project authors. The Stacks project. https://stacks.math.columbia.edu, 2025.

[Tak04] Shunsuke Takagi. An interpretation of multiplier ideals via tight closure. *J. Algebraic Geom.*, 13(2):393–415, 2004.

[Tot19] Burt Totaro. The failure of Kodaira vanishing for Fano varieties, and terminal singularities that are not Cohen-Macaulay. *J. Algebraic Geom.*, 28(4):751–771, 2019.

[Tot24] Burt Totaro. Terminal 3-folds that are not Cohen-Macaulay. *arXiv e-print, arXiv:2407.02608v2*, 2024. Available at arXiv:2407.02608.

[TWY24] Hiromu Tanaka, Jakub Witaszek, and Fuetaro Yobuko. Quasi–F^e–splittings and quasi–F–regularity. 2024. Available at arXiv:2404.06788.

École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Chair of Algebraic Geometry
MA C3 575 (Bâtiment MA), Station 8, CH-1015 Lausanne
Email address: jefferson.baudin@epfl.ch

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan
Email address: tatsurokawakami0@gmail.com

École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Chair of Algebraic Geometry
MA C3 615 (Bâtiment MA), Station 8, CH-1015 Lausanne
Email address: linus.rosler@epfl.ch