

通过非么正相似变换实现高阶时间导数理论的无幽灵 量化

Andreas Fring,^a Takano Taira,^b Bethan Turner^a

^aDepartment of Mathematics, City St George's, University of London, Northampton Square,
London EC1V 0HB, UK

^bDepartment of Physics, Kyushu University 744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka City, 819-0395, Japan

E-mail: a.fring@city.ac.uk, taira.takano.292@m.kyushu-u.ac.jp,
bethan.turner.2@city.ac.uk

ABSTRACT: 我们解决了高阶时间导数理论 (HTDTs) 中长期存在的“幽灵问题”，其中量化通常会生成具有无界谱或非归一化本征态的区域；这使得理论变得不符合物理。我们提出了一种新颖的方法，该方法在保留某一特定区域谱的有界性的同时，通过采用非么正相似变换恢复归一性。受到伪/准厄米特 PT 对称量子力学技术的启发，我们在两个厄米算符哈密顿量之间构造了一个非么正映射，将幽灵态转换为物理上可行的状态。我们使用与 Pais-Uhlenbeck 振荡器相关的具体 HTDT 模型展示了这种方法的可行性，并表明变换后的系统具有归一化的本征态和下界有界的谱。这一框架提供了一致地重新解释高阶时间导数理论的方法，并扩展了构建设没有幽灵的量子模型的工具箱。

KEYWORDS: 更高阶时间导数理论, 量子化

1 介绍

更高阶导数理论 (HTDTs) 有几个吸引人的原因, 最主要的是它们是可重整化 [1–6], 因此为统一引力和量子力学提供了潜在的框架 [7]。然而, 它们存在显著的缺陷, 这使得它们至今未能被接受为完全可行的物理理论。在量化这些系统时, 不可避免地会遇到至少两个具有不同行为特征的部分。在一个部分中, 本征态是可归一化的, 但相应的谱无下界。在另一个部分中, 本征态是非归一化的, 然而谱是有界的 [8–11]。因此, 这两个部分都具有使理论在量子力学的标准解释下变得非物理的特征。

针对这些缺陷, 已经提出了一些方案, 大多数集中在具有正规化本征函数的领域上, 因为这允许进行具体的量子力学计算 [12–16]。特别有前景的方法是基于理论中经典部分的量化分析, 该理论在相空间中拥有明确定义的有限解 [17–21]。在这种方法中, 人们寻求保留动力学但当理论被量化时产生有界谱的替代哈密顿结构 [22–29]。这通常涉及识别隐藏对称性或利用系统的双哈密顿结构来开发具有更理想性质的等效形式 [30]。

这里, 我们提出了一种不同的方案, 该方案通过使用非么正等价映射到具有可归一化本征态的系统上来理解具有不可归一化本征态和有界谱段的部分。这种情况类似于伪/准厄米特 \mathcal{PT} -对称量子力学 [31–34] 的情况。在这种情况下, 通常的起点是一个非厄米特哈密顿算子, 它具有定义良好的离散实本征值谱, 但相应的波函数内积是不明确的。导致自洽且明确定义理论的解决方法是非么正地将非厄米特哈密顿算子映射到一个厄米特算子, 并使用该映射来定义一个新的内积度量, 从而使非厄米特系统变得完全有意义。与复数缩放方法 [15] 不同的是, 该系统是在实轴上考虑的, 而不是旋转到复平面。

我们在此修改这种方法, 并通过

$$\eta h_0 \eta^{-1} = h_f, \quad \phi_f = \eta \phi_0, \quad (1.1)$$

将一个厄米特 HTDT 或鬼幽哈密顿量 $h_0 = h_0^\dagger$ 及其本征值方程 $h_0 \phi_0 = E \phi_0$ 映射到另一个厄米特哈密顿量 $h_f = h_f^\dagger$ 及其本征值方程 $h_f \phi_f = E \phi_f$, 其中 η 是一个非么正映射。我们特别关注于 h_0 解的领域, 该领域具有有界实谱, 但波函数不可归一化 ϕ_0 。显然, 由于通过相似变换相关联, h_0 和 h_f 的谱是相同的。当定义内积为

$$\langle \phi'_f | \phi_f \rangle = \langle \phi'_0 | \rho \phi_0 \rangle =: \langle \phi'_0 | \phi_0 \rangle_\rho \quad (1.2)$$

使用新的度量 $\rho = \eta^\dagger \eta$ 时, 这两个谱等价的理论仍然具有有界实谱, 并且在参数空间的一部分中可能具有可归一化的波函数。只要参数空间的这一部分不为空, 基于 Hermitian 哈密顿量 h_0 的 HTDT 或幽灵系统现在是明确定义的, 即束缚态谱是有下界的和本征态是可归一化的。

我们现在通过一个具体的例子来验证这样的系统是可以构建的。

2 从厄米特到非厄米特再到厄米特哈密顿量

2.1 h_0 特征系统

我们的样本模型是一个幽灵般的二维厄米特哈密顿系统, 该系统最近在 [11] 中被完全量子化。此外, 在 [30] 中确立了模型的某些参数空间部分可以映射到原型 HTDT, 即 Pais-Uhlenbeck 模型 [1], 因此我们的发现直接适用于这类系统。哈密顿量由

$$h_0 = p_x^2 - p_y^2 + \nu^2 x^2 + \Omega y^2 + gxy, \quad \nu, \Omega, g \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

给出, 前面的负号表示 p_y 项表明其幽灵性质。哈密顿量在 $\mathcal{PT} : p_x \rightarrow p_x, p_y \rightarrow p_y, x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ 和 $i \rightarrow -i$ 下完全 \mathcal{PT} 对称, 因此可以使用伪/准厄米特 \mathcal{PT} 对称量子力学上下文中开发的技术 [31–34]。 h_0 的整个本征系统是在 [11] 中为本征值方程 $h_0\phi = E\phi$ 构建的。能量谱被发现为

$$E_{Nn}^{\pm} = (N+1)(\alpha - \beta) \pm (2 - 2n + N)\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\gamma^2}, \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \quad (2.2)$$

$$E_{NN} = (1 + N)(\alpha - \beta), \quad (N + 1 \bmod 2), \quad (2.3)$$

其中参数 α, β, γ 来源于波函数的假设, 并与模型参数 ν, Ω, g 相关, 如下所示:

$$\alpha_{\epsilon}^{\eta} = \frac{2\nu^2 + \sigma_{\epsilon}}{\Sigma_{\epsilon}^{\eta}}, \quad \beta_{\epsilon}^{\eta} = \frac{2\Omega - \sigma_{\epsilon}}{\Sigma_{\epsilon}^{\eta}}, \quad \gamma_{\epsilon}^{\eta} = \frac{-g}{\Sigma_{\epsilon}^{\eta}}, \quad \Sigma_{\epsilon}^{\eta} = 2\eta\sqrt{\nu^2 - \Omega + \sigma_{\epsilon}}, \quad \sigma_{\epsilon} = \epsilon\sqrt{g^2 - 4\nu^2\Omega}, \quad (2.4)$$

构成四个不同的理论分支, 标记为所有组合的 $\epsilon = \pm 1, \eta = \pm 1$ 。特别是, 扇区 $\epsilon = \eta = 1$ 对我们来说很有趣, 因为它具有一个下有界的谱, 请参见 [11] 中的图 2。

本征函数被发现为高斯形式乘以多项式 x, y 。可归一化性完全由基态捕捉, 其行为传递给所有激发态。因此, 确保基态的可归一化性足以保证所有激发态的可归一化性。在 [11] 中我们识别出这个状态和相应的本征值方程为

$$\phi_0(x, y) = c_0 e^{-\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta y^2}{2} + \gamma xy}, \quad \text{with } h_0\phi_0(x, y) = (\alpha - \beta)\phi_0(x, y), \quad (2.5)$$

以及 c_0 表示某个总的归一化常数。结果表明, 基于 $\epsilon = -1$ 的两个区段具有可归一化的波函数, 但其谱不是下限有界的。反过来, 两个 $\epsilon = 1$ 区域具有非规范化的波函数, 但是当 $\eta = 1$ 时有下界谱, 而当 $\eta = -1$ 时有上界谱。具体来说, 规范化条件

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha\beta - \gamma^2 > 0, \quad (2.6)$$

只能对两个解满足, 即 $\epsilon = -1$ 。现在我们将描述如何理解 $\epsilon = 1$ 区域。

2.2 从 h_0 到 H_1

我们的目标是找到一个合适的相似变换, 如在 (1.1) 中所引入的, 或者实际上是指相似变换。我们不期望这些变换是唯一的, 原因与伪/拟厄米特 \mathcal{PT} -对称量子力学 [35] 中的相同。适合作算子的候选者为

$$\eta_0 = \exp\left(-\frac{\delta}{2}x^2 - \frac{\lambda}{2}y^2\right), \quad \eta_1 = \exp\left(\frac{\kappa}{2}p_x^2 + \frac{\xi}{2}p_y^2\right), \quad \eta_2 = \exp(\mu p_x p_y + \tau xy), \quad (2.7)$$

其中包含 $\delta, \lambda, \kappa, \xi, \mu, \tau \in \mathbb{R}$ 。我们通过贝克-坎贝尔-豪瑟多夫公式¹ 计算它们在规范变量 x, y, p_x, p_y 上的伴随作用, 这通常被称为物理学文献中的公式,

$$\eta_0 x \eta_0^{-1} = x, \quad \eta_0 y \eta_0^{-1} = y, \quad \eta_0 p_x \eta_0^{-1} = p_x - i\delta x, \quad \eta_0 p_y \eta_0^{-1} = p_y - i\lambda y, \quad (2.8)$$

$$\eta_1 p_x \eta_1^{-1} = p_x, \quad \eta_1 p_y \eta_1^{-1} = p_y, \quad \eta_1 x \eta_1^{-1} = x - i\kappa p_x, \quad \eta_1 y \eta_1^{-1} = y - i\xi p_y, \quad (2.9)$$

$$\eta_2 x \eta_2^{-1} = \cosh(\theta)x - i\frac{\mu}{\theta} \sinh(\theta)p_y, \quad \eta_2 y \eta_2^{-1} = \cosh(\theta)y - i\frac{\mu}{\theta} \sinh(\theta)p_x, \quad (2.10)$$

$$\eta_2 p_x \eta_2^{-1} = \cosh(\theta)p_x + i\frac{\tau}{\theta} \sinh(\theta)y, \quad \eta_2 p_y \eta_2^{-1} = \cosh(\theta)p_y + i\frac{\tau}{\theta} \sinh(\theta)x, \quad (2.11)$$

¹参见例如第 5 章在 [36] 中: 对于两个算子 A 和 B , 我们有

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots$$

与 $\theta := \sqrt{\mu\tau}$ 。使用这些算子以不同的顺序对 h_0 进行伴随作用将产生不同类型的哈密顿量。我们的最终目标是生成一个厄米特的目标哈密顿量。从 η_0 开始，利用 (2.8)，我们只能通过相似变换将 h_0 映射到一个非厄米哈密顿量²

$$H_1 = \eta_0 h_0 \eta_0^{-1} = p_x^2 - p_y^2 + (\nu^2 - \delta^2)x^2 + (\Omega + \lambda^2)y^2 + gxy - i\delta(p_x x + x p_x) + i\lambda(p_y y + y p_y). \quad (2.12)$$

我们注意到 H_1 是完全 \mathcal{PT} 对称的，尽管它不是一个在 \mathcal{PT} 对称量子力学背景下考虑的标准系统，因为其动能项中的 $(+, -)$ 符号表明了它的鬼魅性质。由于 η_0 不依赖于动量，相应的本征函数 ψ_1 可以通过简单的标量乘法

$$\psi_1(x, y) = \eta_0(x, y)\phi_0(x, y) = c_1 e^{-\frac{(\alpha+\delta)x^2}{2} - \frac{(\beta+\lambda)y^2}{2} + \gamma xy}, \quad (2.13)$$

得到，其中 c_1 是一个归一化常数。调整新可用的参数 δ, λ ，在这个参数范围内的波函数已经可以按照 (1.2) 的意义进行归一化。然而，当将激发态纳入谱中时，由于众所周知的原因，我们不会得到一个正定的规范直交系统，参见 [31–34]，因为 H_1 是非厄米的。因此，我们将继续探索其他附加算子的作用。

2.3 从 H_1 到 H_2/h_2

继续这样，我们通过使用相似变换并采用 η_1

$$H_2 = \eta_1 H_1 \eta_1^{-1} = \frac{\nu^2}{\nu^2 - \delta^2} p_x^2 - \frac{\Omega}{\lambda^2 + \Omega} p_y^2 + (\nu^2 - \delta^2)x^2 + (\Omega + \lambda^2)y^2 + gxy \quad (2.14)$$

$$+ \frac{g\delta\lambda}{(\nu^2 - \delta^2)(\lambda^2 + \Omega)} p_x p_y + i \frac{g\delta}{\nu^2 - \delta^2} p_x y + i \frac{g\lambda}{\lambda^2 + \Omega} p_y x,$$

构造第二个非厄米哈密顿量，在此过程中选择了 $\xi = \lambda/(\lambda^2 + \Omega)$ 和 $\kappa = \delta/(\delta^2 - \nu^2)$ 来消除与 $ip_x x$ 和 $ip_y y$ 成比例的非厄米项。我们注意到， H_2 也是 \mathcal{PT} 对称的，并且当 $g \rightarrow 0$ 时，它变成厄米特的并且仅仅是在某个参数范围内两个谐振子的和。因此，在这种情况下，我们已经达到了目标并将 h_0 映射到了另一个厄米特哈密顿量 $h_f = h_2$ 。

因为 η_1 取决于动量，我们在动量空间中计算它对波函数的作用。注意到在傅里叶空间中导数变为乘法运算，我们计算

$$\psi_2(x, y) = \eta_1(p_x, p_y)\psi_1(x, y) = \mathcal{F}_{xy}^{-1} \left[\eta_1(p_x, p_y)\hat{\psi}_1(p_x, p_y) \right] (x, y), \quad (2.15)$$

其中 $\hat{\psi}_1(p_x, p_y)$ 是 $\psi_1(x, y)$ 的傅里叶变换，而 \mathcal{F}_{xy}^{-1} 表示逆傅里叶变换。执行变换后我们得到

$$\psi_2(x, y) = c_2 e^{-\frac{\hat{\alpha}x^2}{2} - \frac{\hat{\beta}y^2}{2} + \hat{\gamma}xy}, \quad (2.16)$$

归一化常数为 c_2 和

$$\hat{\alpha} = \frac{[(\alpha + \delta)(\beta\lambda - \Omega) - \gamma^2\lambda](\delta^2 - \nu^2)}{(\alpha\delta + \nu^2)(\Omega - \beta\lambda) + \gamma^2\delta\lambda}, \quad (2.17)$$

$$\hat{\beta} = \frac{[(\beta + \lambda)(\alpha\delta + \nu^2) - \gamma^2\delta](\lambda^2 + \Omega)}{(\alpha\delta + \nu^2)(\Omega - \beta\lambda) + \gamma^2\delta\lambda}, \quad (2.18)$$

$$\hat{\gamma} = -\frac{\gamma(\delta^2 - \nu^2)(\lambda^2 + \Omega)}{(\alpha\delta + \nu^2)(\Omega - \beta\lambda) + \gamma^2\delta\lambda}. \quad (2.19)$$

²我们的约定是用 h 表示厄米哈密顿量，用 H 表示非厄米哈密顿量，它们对应的本征函数分别用 ϕ 和 ψ 表示。

我们保留了与推导 H_2 相同的选择用于 ξ 和 κ , 并验证了特征值方程 $H_2\psi_2 = (\alpha - \beta)\phi_2$ 确实成立。对于这些参数选择, 正则化条件 (2.6) 可以在谱有下界的 $\epsilon = \eta = 1$ 情况下得到满足。在图 1 中, (2.6) 中的三个相关量被绘制成当它们全部为正时波函数可归一化。

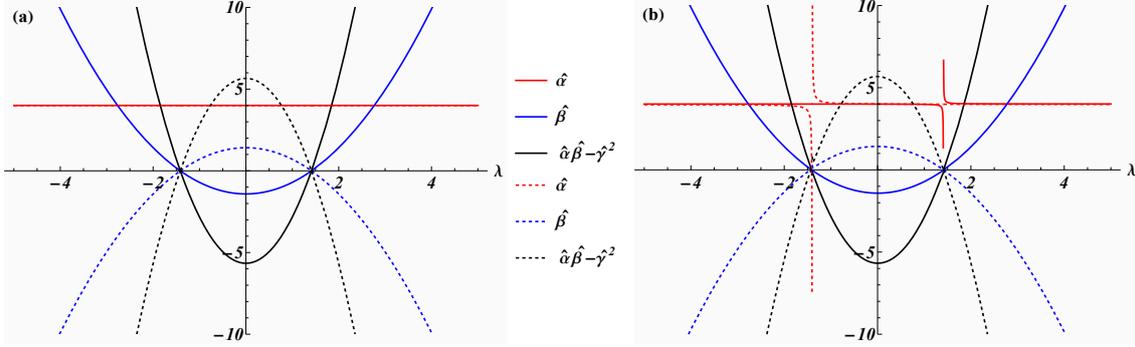


图 1. 正规性条件 (2.6) 对于参数 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ 在 (2.17)-(2.19) 中与 $\delta = 0, \nu = 4, \Omega = -2$ 和 $g = 0$ 在面板 (a), $g = 1$ 在面板 (b) 中的情况。实线和虚线分别对应情况 $\epsilon = 1, \eta = 1$ 和 $\epsilon = -1, \eta = 1$ 。

如 $\delta \rightarrow 0$ 和 $\lambda \rightarrow 0$, 我们有 $\hat{\alpha} \rightarrow \alpha$, $\hat{\beta} \rightarrow \beta$ 和 $\hat{\gamma} \rightarrow \gamma$, 从而恢复了原始行为。在此极限下, 波函数对于 $\epsilon = -1, \eta = 1$ 是可归一化的, 而对于 $\epsilon = 1, \eta = 1$ 则是不可归一化的, 我们可以在图 1 中验证这一点。引入参数 λ 后, 我们观察到这些特征在区间 $|\lambda| < \sqrt{2}$ 内持续存在。在互补区域 $|\lambda| > \sqrt{2}$ 中, 行为发生了反转。因此, 在这个区域内模型变得定义良好, 拥有一个从下方有界的离散谱, 并且每个本征态都与一个可归一化的本征函数相关联。

请注意, 在耦合消失的情况下 ($g = 0$), 哈密顿量 H_2 对应于两个简谐振子的差值当 $|\lambda| < \sqrt{2}$, 而在互补区域则对应于两个简谐振子的和。最后, 注意到参数 δ 尚未被使用; 它只会扭曲参数区域而不改变定性行为。

2.4 从 H_2 到 h_3

接下来我们研究是否可以通过利用算子 η_2 作为合适的映射, 对于非零耦合常数 $g \neq 0$, 也能达到厄米特目标哈密顿量。确实, 我们计算了厄米特哈密顿量

$$h_3 = \eta_2 H_2 \eta_2^{-1} \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2}(b_1 + b_2^+)p_x^2 + \frac{1}{2}(b_1 - b_2^+)p_y^2 + \frac{(\delta^2 - \nu^2)^2}{2\delta^2} [(b_1 + b_2^-)x^2 + (b_1 - b_2^-)y^2] \quad (2.21)$$

$$+ g \frac{\delta^2}{(\delta^2 - \nu^2)^2} p_x p_y + gxy,$$

其中包含

$$b_1 = -\frac{\delta(\delta + \lambda)}{\delta^2 - \nu^2}, \quad b_2^\pm = \frac{\delta\lambda - \nu^2}{\delta^2 - \nu^2} \sqrt{1 - \Theta^2} \pm 1, \quad \Theta := \frac{g\delta^2}{(\delta^2 - \nu^2)(\nu^2 - \delta\lambda)} \quad (2.22)$$

和约束条件

$$\tau = \frac{\delta^2 - \nu^2}{2\delta} \operatorname{arctanh} \Theta, \quad \mu = \frac{\delta}{2(\delta^2 - \nu^2)} \operatorname{arctanh} \Theta, \quad \Omega = \frac{\lambda[\nu^2 - \delta(\delta + \lambda)]}{\delta}, \quad |\Theta| < 1. \quad (2.23)$$

尽管这里没有展示细节，值得注意的是，与 h_0 相比，变换后的哈密顿量 h_3 失去了其鬼魅性质，并在参数空间中存在正定区域。

关键的是，我们仍然需要识别相应的本征函数并检查它们的可归一化性质。基态显然是 $\phi_3(x, y) = \eta_2(x, y, p_x, p_y)\psi_2(x, y)$ ，但由于指数函数的参数 η_2 依赖于一组不交换算符的和，我们必须首先对其进行高斯分解。注意到 η_2 可以用提升和降低 $\text{su}(2)$ -生成元通过满足 $[S_z, S_\pm] = \pm S_\pm, [S_+, S_-] = 2S_z$ 的 $S_- = p_x p_y, S_+ = xy, S_z = i/2(p_x x + y p_y)$ 表示，我们使用因式分解

$$\eta_2 = e^{\mu S_- + \tau S_+} = \eta_+ \eta_z \eta_- = e^{\zeta_+ S_+} e^{\ln \zeta_z S_z} e^{\zeta_- S_-}, \quad (2.24)$$

其中

$$\zeta_z := \frac{1}{\cosh^2 \sqrt{\mu\tau}}, \quad \zeta_+ := \frac{\tau}{\sqrt{\mu\tau}} \tanh \sqrt{\mu\tau}, \quad \zeta_- := \frac{\mu}{\sqrt{\mu\tau}} \tanh \sqrt{\mu\tau}, \quad (2.25)$$

例如参见 [37]。我们计算每个因子的伴随作用到

$$\eta_- x \eta_-^{-1} = x - i\zeta_- p_y, \quad \eta_- y \eta_-^{-1} = y - i\zeta_- p_x, \quad \eta_- p_x \eta_-^{-1} = p_x, \quad \eta_- p_y \eta_-^{-1} = p_y, \quad (2.26)$$

$$\eta_z x \eta_z^{-1} = x \sqrt{\zeta_0}, \quad \eta_z y \eta_z^{-1} = y \sqrt{\zeta_0}, \quad \eta_z p_x \eta_z^{-1} = \frac{p_x}{\sqrt{\zeta_0}}, \quad \eta_z p_y \eta_z^{-1} = \frac{p_y}{\sqrt{\zeta_0}}, \quad (2.27)$$

$$\eta_+ x \eta_+^{-1} = x, \quad \eta_+ y \eta_+^{-1} = y, \quad \eta_+ p_x \eta_+^{-1} = p_x + i\zeta_+ y, \quad \eta_+ p_y \eta_+^{-1} = p_y + i\zeta_+ x. \quad (2.28)$$

连续的伴随作用 η_-, η_z, η_+ 自然给出与直接计算 η_2 在 (2.10) 和 (2.11) 中报告的结果相同。

至关重要的是，我们现在可以逐因子作用于 $\psi_2(x, y)$ 并使用

$$\check{\alpha} = \frac{\hat{\alpha}\zeta_z}{\chi}, \quad \check{\beta} = \frac{\hat{\beta}\zeta_z}{\chi}, \quad \check{\gamma} = \frac{\zeta_- (\hat{\gamma}^2 - \hat{\alpha}\hat{\beta}) + \hat{\gamma}\zeta_z + \zeta_+}{\chi}, \quad \chi = \zeta_-^2 (\hat{\gamma}^2 - \hat{\alpha}\hat{\beta}) + 2\hat{\gamma}\zeta_- + 1. \quad (2.29)$$

计算

$$\phi_3(x, y) = e^{\zeta_+ S_+} e^{\ln \zeta_z S_z} e^{\zeta_- S_-} \psi_2(x, y) = c_3 e^{-\frac{\check{\alpha}x^2}{2} - \frac{\check{\beta}y^2}{2} + \check{\gamma}xy}, \quad (2.30)$$

。此时验证本征值方程 $h_3 \phi_3 = (\alpha - \beta) \phi_3$ 确实成立是有用的。最后，我们考察是否存在一个参数区域，在该区域内正则化条件 (2.6) 对于 $\check{\alpha}, \check{\beta}$ 和 $\check{\gamma}$ 在 $\epsilon = \eta = 1$ 部分得到满足。由于与这一组方程相关的参数空间非常复杂，我们在这里仅通过展示某些参数选择下存在解来证明概念。结果如图 2 所示。

为了能够使用原模型参数的固定值 ν, Ω, g ，我们求解公式 (2.23) 中的第三个约束条件以得到 δ ，即： $\delta_\pm = [\pm\sqrt{4\lambda^2\nu^2 + (\lambda^2 + \Omega)^2} - \lambda^2 - \Omega]/2\lambda$ ，并分别在图 (a) 和 (b) 中展示它们。我们发现 (2.23) 中的最后一个约束条件， $|\Theta| < 1$ ，确定了两个区域，在这两个区域内 $\check{\alpha}, \check{\beta}$ 和 $\check{\gamma}$ 保持为实数：R1: $|\lambda| > 2.13322$ ，R2: $|\lambda| < 0.93755$ ，如图 2 所示。

关键结果是，对于 δ_+ 约束条件，在 R1 区域的 $\epsilon = \eta = 1$ 部分满足归一化条件 (2.6)。相比之下，在 δ_- 约束条件下不存在这样的解。此外，我们确认系统保持在基态能量 $\alpha - \beta$ 为实数的区域内。由于上述原因，同样的逻辑也适用于激发态。

总而言之，我们获得了等谱的厄米哈密顿量

$$h_3 = \eta_2 \eta_1 \eta_0 h_0 \eta_0^{-1} \eta_1^{-1} \eta_2^{-1}. \quad (2.31)$$

在 h_0 的 (1, 1) 部分中定义的非规范化的本征态 ϕ_0 ，相对于希尔伯特空间的标准度量而言是非规范化的，但在将度量改为 (1.2) 中指定的 $\rho = \eta_0^\dagger \eta_1^\dagger \eta_2^\dagger \eta_2 \eta_1 \eta_0$ 时变得规范化了。

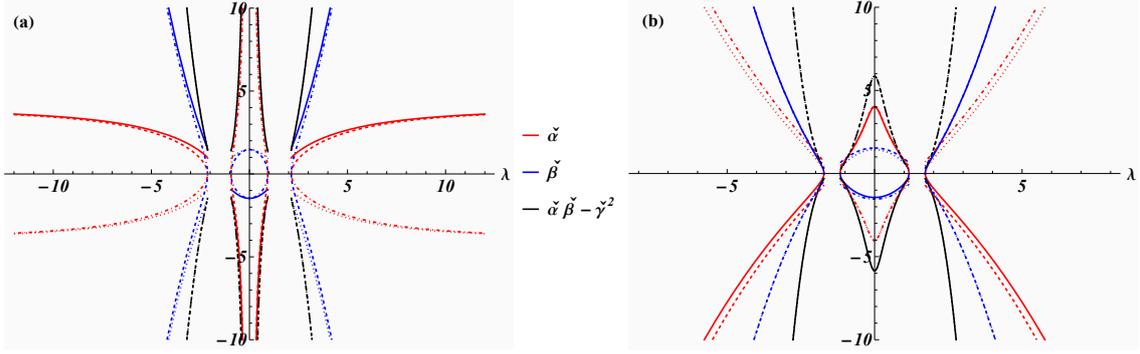


图 2. 规范性条件 (2.6) 对于参数 $\tilde{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}$ 和 $\tilde{\gamma}$ 在 (2.29) 中, 固定值为 $\nu = 4$ 、 $\Omega = -2$ 和 $g = 3$ 。图板 (a) 和 (b) 分别对应于 δ_+ 和 δ_- 约束条件。四个区域通过线型区分: 实线表示 $(\epsilon, \eta) = (1, 1)$, 点线表示 $(1, -1)$, 虚线表示 $(-1, 1)$, 点划线表示 $(-1, -1)$ 。

3 结论

我们通过采用基于非么正相似变换的新方法解决了 HTDT 中固有的幽灵问题。与其丢弃具有不可规范化的本征态但下有界的谱的理论部分 (这部分传统上被认为是不物理的), 我们证明可以通过一系列受伪/拟厄米特 \mathcal{PT} -对称量子力学启发的相似变换来一致地重新解释它。

通过将明确构造的非么正映射应用于与 Pais-Uhlenbeck 振荡器相关的代表性鬼影 HTDT 哈密顿量, 我们展示了如何可以系统地将该系统转换为具有可归一化波函数且谱仍下有界的等效厄米模型。这在未改变理论的物理能谱的同时, 保持了整个过程中的 \mathcal{PT} 对称性。我们的结果证实了 HTDT 中的鬼影问题并非一定是不可逾越的障碍, 而是可以通过重新解释希尔伯特空间和内积的结构来规避。

这一框架为从原本存在问题的 HTDT 构建物理上一致的量子模型开辟了新方向, 并表明通过非么正变换实现无幽灵量化是量子场论工具箱中一个有前景的补充。

在这里, 我们建立了一个概念证明, 展示了我们的方法在一个代表性模型中的可行性。自然地, 仍然存在许多开放性问题, 需要在未来的研究中解决以完全揭示变换系统的数学和物理性质。正如在 \mathcal{PT} 对称量子力学中一样, 唯一性的问题依然存在: 不同的相似变换可以导致不同的最终哈密顿量 h_f 。然而, 这种模糊可以通过除了能量 [35] 之外选择第二个可观测量来解决。类似的思路可以用于场论系统的扩展。我们相信这种方法广泛适用于一大类 HTDTs, 如果不是所有的话。

致谢: BT 得到了伦敦大学圣乔治学院的市级研究基金的支持。TT 感谢 K2-Spring 提供了进行此项研究所必需的资源。

参考文献

- [1] A. Pais and G. E. Uhlenbeck, On field theories with non-localized action, Phys. Rev. D **79**(1), 145 (1950).
- [2] K. S. Stelle, Renormalization of higher-derivative quantum gravity, Phys. Rev. D **16**(4), 953 (1977).

- [3] A. A. Starobinsky, A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Phys. Lett. B* **91**(1), 99–102 (1980).
- [4] S. L. Adler, Einstein gravity as a symmetry-breaking effect in quantum field theory, *Rev. Mod. Phys.* **54**(3), 729 (1982).
- [5] A. V. Smilga, Spontaneous generation of the Newton constant in the renormalizable gravity theory, ITEP preprint 63 (1982) 8 pp, arXiv:1406.5613
- [6] L. Modesto and I. L. Shapiro, Superrenormalizable quantum gravity with complex ghosts, *Phys. Lett. B* **755**, 279–284 (2016).
- [7] S. W. Hawking and T. Hertog, Living with ghosts, *Phys. Rev. D* **65**(10), 103515 (2002).
- [8] H. A. Weldon, Quantization of higher-derivative field theories, *Ann. Phys.* **305**(2), 137–150 (2003).
- [9] R. P. Woodard, Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability, *Scholarpedia* **10**(8), 32243 (2015).
- [10] A. Fring, T. Taira, and B. Turner, Higher Time-Derivative Theories from Space–Time Interchanged Integrable Field Theories, *Universe* **10**(5), 198 (2024).
- [11] A. Fring, T. Taira, and B. Turner, Quantisations of exactly solvable ghostly models, *J. Phys. A: Math. Theor.* **58**(23), 235301 (2025).
- [12] T.-J. Chen, M. Fasiello, E. A. Lim, and A. J. Tolley, Higher derivative theories with constraints: Exorcising Ostrogradski’s Ghost, *JCAP* **2013**(02), 042 (2013).
- [13] A. Salvio and A. Strumia, Quantum mechanics of 4-derivative theories, *The EPJ C* **76**, 1–15 (2016).
- [14] D. Anselmi, Fakeons and Lee-Wick models, *JHEP* **2018**(2) (2018).
- [15] C. M. Bender and P. D. Mannheim, No-ghost theorem for the fourth-order derivative Pais-Uhlenbeck oscillator model, *Phys. Rev. Lett.* **100**(11), 110402 (2008).
- [16] M. Raidal and H. Veermäe, On the quantisation of complex higher derivative theories and avoiding the Ostrogradsky ghost, *Nucl. Phys. B* **916**, 607–626 (2017).
- [17] A. V. Smilga, Ghost-free higher-derivative theory, *Phys. Lett. B* **632**(2-3), 433–438 (2006).
- [18] A. Smilga, Benign ghosts in higher-derivative systems, in *J. Phys.: Conf. Series*, volume 2038, page 012023, IOP Publishing, 2021.
- [19] C. Deffayet, S. Mukohyama, and A. Vikman, Ghosts without runaway instabilities, *Phys. Rev. Lett.* **128**(4), 041301 (2022).
- [20] C. Deffayet, A. Held, S. Mukohyama, and A. Vikman, Global and local stability for ghosts coupled to positive energy degrees of freedom, *JCAP* **2023**(11), 031 (2023).
- [21] V. E. Díez, J. G. Gaset Rifà, and G. Staudt, Foundations of Ghost Stability, *Fortschritte der Physik* , 2400268 (2024).

- [22] K. Bolonek and P. Kosinski, Hamiltonian Structures for Pais–Uhlenbeck Oscillator, *Acta Physica Polonica B* **36**(6), 2115 (2005).
- [23] E. Damaskinsky and M. Sokolov, Remarks on quantization of Pais–Uhlenbeck oscillators, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**(33), 10499 (2006).
- [24] N. G. Stephen, On the Ostrogradski instability for higher-order derivative theories and a pseudo-mechanical energy, *J. Sound Vibration* **310**(3), 729–739 (2008).
- [25] A. Mostafazadeh, A Hamiltonian formulation of the Pais–Uhlenbeck oscillator that yields a stable and unitary quantum system, *Phys. Lett. A* **375**(2), 93–98 (2010).
- [26] K. Andrzejewski, Hamiltonian formalisms and symmetries of the Pais–Uhlenbeck oscillator, *Nucl. Phys. B* **889**, 333–350 (2014).
- [27] K. Andrzejewski, Conformal Newton–Hooke algebras, Niederer’s transformation and Pais–Uhlenbeck oscillator, *Phys. Lett. B* **738**, 405–411 (2014).
- [28] K. Andrzejewski, A. Galajinsky, J. Gonera, and I. Masterov, Conformal Newton–Hooke symmetry of Pais–Uhlenbeck oscillator, *Nucl. Phys. B* **885**, 150–162 (2014).
- [29] M. Elbistan and K. Andrzejewski, Various disguises of the Pais-Uhlenbeck oscillator, *Nucl. Phys. B* **994**, 116327 (2023).
- [30] A. Felski, A. Fring, and B. Turner, Lie symmetries and ghost-free representations of the Pais-Uhlenbeck model, *arXiv:2505.07869* (2025).
- [31] C. M. Bender and S. Boettcher, Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243–5246 (1998).
- [32] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **7**, 1191–1306 (2010).
- [33] C. M. Bender, P. E. Dorey, C. Dunning, A. Fring, D. W. Hook, H. F. Jones, S. Kuzhel, G. Levai, and R. Tateo, *PT Symmetry: In Quantum and Classical Physics*, World Scientific, Singapore (2019).
- [34] A. Fring, An introduction to PT-symmetric quantum mechanics-time-dependent systems, in *J. Phys.: Conf. Series*, v2448, p012002, IOP Publishing (2023).
- [35] F. G. Scholtz, H. B. Geyer, and F. Hahne, Quasi-Hermitian Operators in Quantum Mechanics and the Variational Principle, *Ann. Phys.* **213**, 74–101 (1992).
- [36] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Graduate Texts in Mathematics (Springer, New York, 2015).
- [37] A. B. Klimov and S. M. Chumakov, *A group-theoretical approach to quantum optics: models of atom-field interactions*, (John Wiley & Sons, Weinheim, 2009).