

# 相对论振荡窗口由强烈的拉盖尔-高斯激光脉冲驱动

Yao Meng,<sup>1,2</sup> Runze Li,<sup>1</sup> and Longqing Yi<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>State Key Laboratory of Dark Matter Physics, Key Laboratory for Laser Plasma (Ministry of Education),

Tsung-Dao Lee Institute & School of Physics and Astronomy,  
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 201210, China

<sup>2</sup>Collaborative Innovation Center of IFSA (CICIFSA),  
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

(10Dated: 2025 年 6 月 28 日)

高强度拉盖尔-高斯 (LG) 激光束通过小孔衍射产生的高阶谐波生成被研究。发现二维边缘电子动力学在环边可以促进自旋与轨道角动量相互作用之间的复杂交互，这导致了具有不同偏振状态的 LG 脉冲出现不同的选择规则。特别是当驱动器为线性偏振时，谐波束不再遵循简单的轨道角动量守恒规则。相反，在每个谐波束中产生了多个带有不同拓扑电荷的 LG 模式，并且模式的数量等于谐波阶数。一个理论被推导并经过模拟验证，该理论可以预测具有不同偏振状态的 LG 驱动器的谐波拓扑电荷及其相对强度。我们的工作提供了对非线性光学中光行为的基本见解，并为产生携带可控轨道角动量的高强紫外或 X 射线脉冲铺平了道路，这些脉冲可以在各种科学领域的前沿作为多功能工具使用。

PACS numbers:

现代激光技术的进步为利用精细控制的激光脉冲研究手性和对称性提供了令人兴奋的机会 [1]。特别是，大量的努力被投入到操控激光束的角动量上，它可以采取两种形式：自旋角动量 (SAM)，与圆偏振的手性相关，以及轨道角动量 (OAM)，对应于光的涡度或全局螺旋相位面 [2, 3]。这些高级光源使人们能够控制光的对称性和不对称性的性质，这对研究光物质相互作用中的手性现象尤其有趣，例如圆二色性 [4]，螺旋二色性 [5–7]，以及光诱导的手性操控 [8–10]。

在这些领域中，近年来受到了广泛关注的是利用携带轨道角动量 [11, 12] 的激光束生成高次谐波 (HHG)。在 HHG 过程中，谐波拓扑荷的选择规则不仅揭示了非线性光物质相互作用中的拓扑性质 [13–15]，还为将轨道角动量印刻到极紫外或 X 射线光上提供了一条途径。通常情况下，HHG 通过低强度下的激光-气体相互作用被触发 [16]，并在高强度下通过所谓的“相对论振荡镜” (ROM) 机制 [17–20] 经由激光-固体相互作用引发。在这两种情况下，都发现谐波光学涡旋遵循简单的轨道角动量守恒规则，适用于谐波频率上转换过程 [21, 22]。

最近，提出了一种基于相对论强激光脉冲衍射的新类型的高次谐波生成机制，即“相对论振荡窗口” (ROW) [23–25]，其中孔径边缘的电子在入射激光场中振动，导致相对论多普勒效应并在衍射场中产生高次谐波。重要的是，与 ROM 机制相比，电子动力学本质上是在衍射屏内二维的，并且电子运动模式可以印刻在谐波光束的光学特

性上。因此 ROW 机制展示了 SAM 和光 OAM 之间丰富的相互作用，导致复杂的选择规则，这基本上反映了系统的对称性。例如，圆偏振 (CP) 光通过针孔衍射产生谐波光学涡旋 [23]；并通过具有  $n$  倍旋转对称性的工程衍射孔径，可以生成特定 OAM 的可控频率梳 [26]。尽管这些快速进展，据我们所知，相对论衍射的研究已被限制在标准平面波激光中，其中电子动力学相对较简单。为了充分利用 2D 外围电子动力学所提供的自由度，应该使用结构光，如拉盖尔-高斯 (LG) 束 [27, 28]、矢量光束 [29] 和时空光学涡旋 [25, 30]，以促进在相对论衍射中对 HHG 过程的控制和理解。

在本信函中，我们研究了由具有不同极化状态的强 LG 激光脉冲驱动的 ROW 过程中选择规则。通过三维粒子模拟 (PIC) 仿真，我们发现谐波束的拓扑荷数取决于对称性。特别是，当采用圆偏振 LG 脉冲时，系统具有连续旋转对称性，在给定的谐波阶次 ( $n$ ) 上的衍射光由单一具有明确拓扑荷数 ( $l_n$ ) 的 LG 模式组成。通过使用线性极化驱动激光破坏这种对称性，每个谐波阶次都会生成一组 LG 模式。观察到的选择规则可以通过我们首次提出的理论模型来解释。

我们首先展示我们的模拟结果关于 CP LG 激光的衍射。实验装置的示意图如图 1 (a) 所示，其中驱动激光脉冲穿过一个小孔照射到等离子体薄片上并传播到  $+x$ 。驱动激光脉冲由  $\mathbf{E}_i = (e_y +$

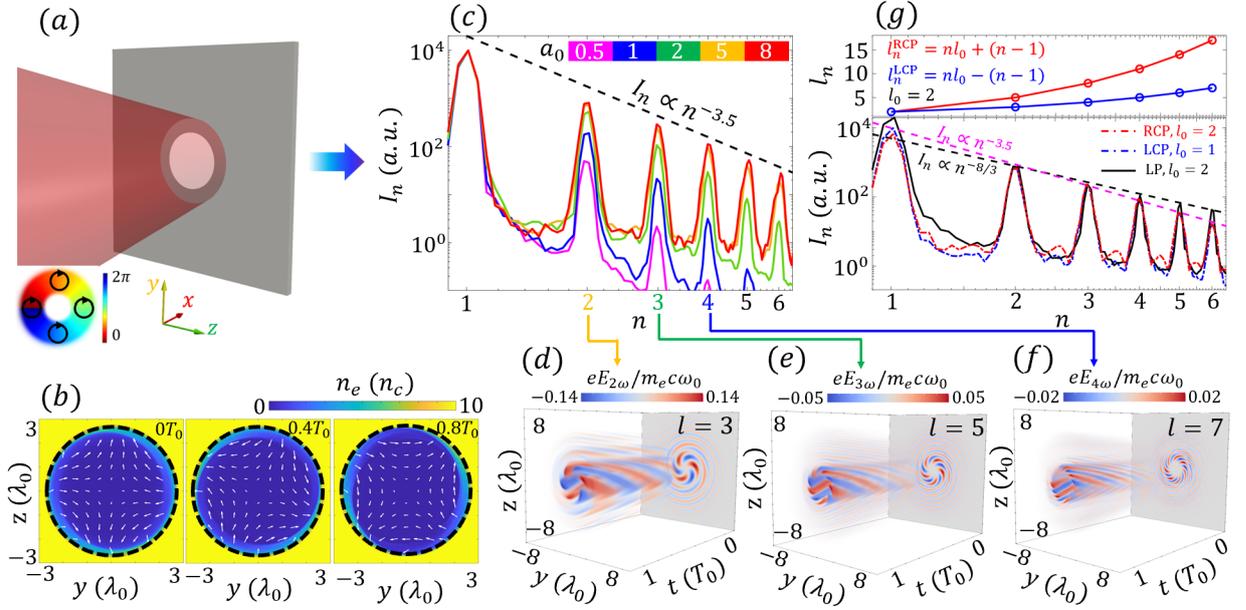


图 1: (a) 具有  $l_0 = 1$  的圆偏振 LG 脉冲透过等离子体靶上的小孔的示意图。(b) 边缘处的动力电子密度分布，三个快照之间的间隔为  $0.4T_0$ ，从左到右，白色箭头代表激光电场，黑色虚线表示初始边界。(c) 具有  $l_0 = 1$  的圆偏振脉冲产生的谐波谱，颜色代表不同的驱动激光强度，黑色虚线显示了由  $I_n \propto n^{-3.5}$  拟合的结果。彩色编码的 3D 场分布展示了 (d) 二阶、(e) 三阶和 (f) 四阶谐波光束（持续时间为  $\sim 1T_0$ ），表明它们分别是具有拓扑荷 3、5 和 7 的 LG 模式。(g) 上图显示了由不同极化和拓扑荷的 LG 脉冲产生的谐波拓扑荷，下图显示了相应的 HHG 光谱（具体值在图中指定）。我们在上图中使用了  $l_0 = 2$ ，在下图 (g) 中，CP 使用了  $a_0 = 5$ ，LP 驱动器使用了  $a_0 = 5\sqrt{2}$ ，洋红和黑色虚线分别显示了 HHG 光谱通过  $I_n \propto n^{-3.5}$  和  $n^{-8/3}$  的拟合。

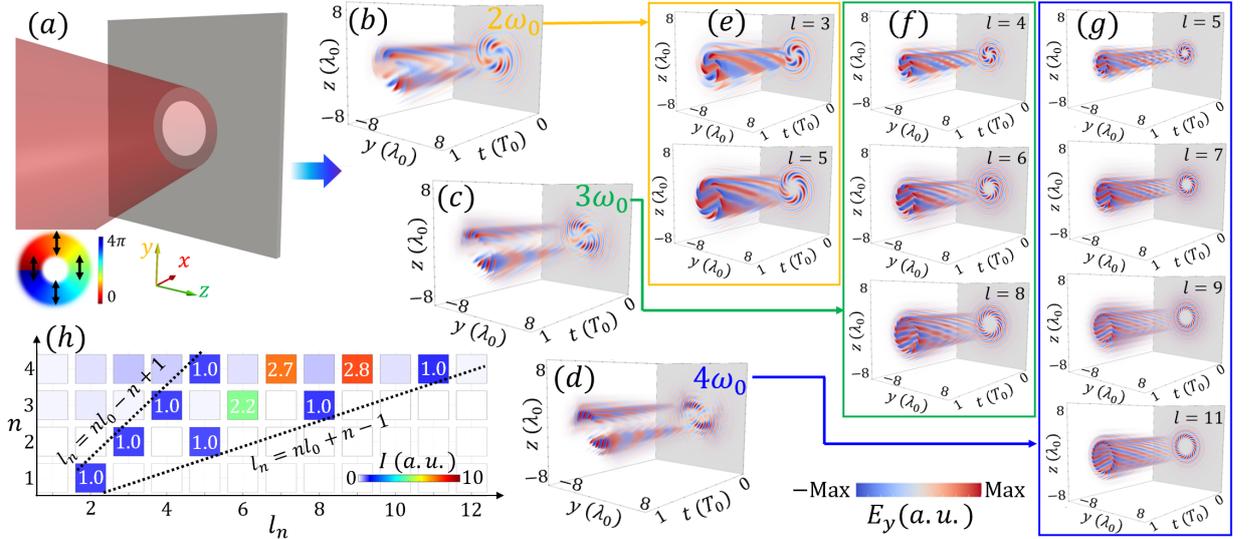


图 2: (a) 倍频 LG 脉冲通过一个小孔衍射的示意图，其中  $l_0 = 2$  为线性偏振。(b) 二次、(c) 三次和 (d) 四次谐波光束可以分解成一系列 LG 模式分量，如 (e-g) 所示，分别对应二次、三次和四次谐波。(h) HHG 模式的方位谱图。在每个谐波阶数  $n$  中，模式强度通过在  $n\omega_0$  处产生的最低阶模式  $l_n = nl_0 - n + 1$  进行归一化。白色数字显示相对强度的平方根。

$i\sigma e_z)E_0(\sqrt{2}r/w_0)^{l_0} \exp(-r^2/w_0^2) \sin^2(\pi t/\tau_0) \exp(ik_0x - i\omega_0t + il_0\phi)$  表示，持续时间为  $0 < t < \tau_0 = 54\text{fs}$ ，其中  $e_y(e_z)$  表示在  $y(z)$  方向上的单位向量， $r = \sqrt{y^2 + z^2}$

是径向坐标， $\phi$  是从  $y$  轴测量的方位角。归一化的激光振幅是  $a_0 \equiv eE_0/m_e c\omega_0 = 2$ ，其中  $e$ 、 $m_e$ 、 $c$ 、 $E_0$  和  $\omega_0$  分别是基本电荷、电子质量、真空光速、激光

振幅和频率。激光光斑尺寸为  $w_0 = 4 \mu\text{m}$ ，波数为  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ，波长为  $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$  ( $T_0 \approx 3.3\text{fs}$  是激光周期)。驱动激光脉冲的 OAM 和 SAM 由拓扑荷  $l_0$  和  $\sigma$  控制，其中  $\sigma = 0, +1$  和  $-1$  分别对应于 LP、右旋 CP (RCP) 和左旋 CP (LCP) 脉冲。因此，每个基本激光光子携带的总角动量为  $(l_0 + \sigma)\hbar$ 。衍射屏 [假设为铝] 通过放置在位置  $x_0 = 4 \mu\text{m}$  的预电离等离子体建模，其厚度为  $l_t = 1 \mu\text{m}$ ，电子密度为  $n_0 = 30n_c$ ，其中  $n_c = m_e\omega_0^2/4\pi e^2 \approx 1.1 \times 10^{21} \text{cm}^{-3}$  是临界密度。一个针孔 (半径  $r_0 = 3 \mu\text{m}$ ) 位于屏幕中心，内部边界 ( $r < r_0$ ) 的密度分布为  $n(r) = \exp[(r_0 - r)/h]$ ，其中  $h = 0.2 \mu\text{m}$  是尺度长度。模拟使用了三维全动力学 PIC 代码迭代周期 [31]，模拟区域为  $L_x \times L_y \times L_z = 15 \mu\text{m} \times 12 \mu\text{m} \times 12 \mu\text{m}$ ，采样时每个区域包含  $1500 \times 600 \times 600$  个单元格，并且每个电子有 10 个宏观粒子，在每个单元格中  $\text{Al}^{3+}$  有 3 个。

当驱动脉冲穿过孔径时，边界处的电子被强激光场摇动，从而形成如图 1 (b) 所示的动力学衍射窗口。此处使用的驱动激光脉冲是具有  $l_0 = 1$  的右旋 LG 光束。可以看到，随着振荡孔径形状发生变化，表明电子动力学受激光场的方位角依赖性控制 [见图 1 (b) 中的白色箭头]。

电磁波在衍射窗口边缘附近传播时，与这层振荡的电子相互作用，从而导致高次谐波生成。光谱如图 1(c) 所示，这些光谱是从 PIC 模拟中通过傅里叶变换记录的目标后  $10 \mu\text{m}$  处的衍射场获得的。可以看到，随着驱动激光强度的增加，HHG 光谱轮廓变硬，这一趋势在  $a_c \approx 5$  时达到饱和，而  $a_0 \geq 5$  的谐波光谱几乎相同，可以通过  $I_n \propto n^{-3.5}$  拟合。

谐波束的特性与电子动力学相关，这些动力学由驱动激光脉冲的偏振和相位前沿控制。因此，驱动器的 SAM 和 OAM 可以被印刻到谐波束上。这在图 1(d-f) 中有所说明，其中以彩色编码显示了第二、第三和第四阶谐波在 3D 空间 ( $t, y, z$ ) 中的情况。这里的每个阶数为  $n$  的谐波都是通过从记录的衍射场 ( $E_y$ ) 中的频率范围  $[n - 0.5, n + 0.5]\omega_0$  内进行光谱滤波获得的。所有谐波束都显示出与  $n$  相关的螺旋相位前沿，表明发生了自旋-轨道角动量相互作用。

从高强度 ( $a_0 > a_c$ ) LG 驱动器获得的谐波光谱在图 1(g) 中进行了比较，这些驱动器具有不同的  $l_0$  和  $\sigma$ 。在下图中，展示了三种情况的 HHG 光谱：一个右旋圆极化驱动器 ( $\sigma = 1, l_0 = 2$ )，一个左旋圆极化驱动器 ( $\sigma = -1, l_0 = 1$ ) 以及一个线性偏振驱动器 ( $\sigma = 0, l_0 = 2$ )。显然，它们表现出相似的幂律形状，并且拓扑荷  $l_0$  对光谱指数的影响很小。同时，由 LP 激光产生的 HHG 光谱略微更硬 ( $I_n \propto n^{-8/3}$ )，比 CP 驱动器的要硬。这可以归因于 LP

激光 ponderomotive 力中的高频 ( $2\omega_0$ ) 振荡项，与我们之前的研究所一致 [24]。

图 1(g) 的上部展示了 CP 驱动器的谐波拓扑荷 ( $l_n$ ) 的选择规则，其中我们在 RCP 和 LCP 两种情况下都以  $l_0 = 2$  为例。可以看到，在每个谐波阶数  $n$  下仅生成一个 LG 模式，并且拓扑荷是  $l_n = nl_0 + (n - 1)\sigma$ ，这表明总角动量守恒。

当驱动 LG 脉冲是线性偏振时，它打破了连续的旋转对称性，这可能导致不同的高次谐波生成选择规则。因此我们使用图 2(a) 所示的设置进行了 3D 粒子模拟。参数与图 1 中的相似，但在这里我们采用了一个 LP ( $\sigma = 0$ ) 驱动器，并且具有  $a_0 = 2\sqrt{2}$  和拓扑荷数  $l_0 = 2$ 。我们的主要结果总结在图 2 中。

为了分析在这种情况下拓扑荷的选择规则，我们首先进行傅里叶变换以获得三维谐波场。如图 1(b-d) 所示，所有谐波都表现出复杂的结构，表明多个 LG 模式的叠加。然后通过对每个谐波进行方位角傅里叶变换得到拓扑荷 ( $l_n$ ) 谱。单模谐波涡旋随后通过单个  $l_n$  的方位角滤波重构，如图 2(e-g) 所示分别为二次、三次和四次谐波。显然，第  $n$  次谐波场由具有不同  $l_n$  的  $n$  个 LG 模式组成，这些模式以  $nl_0$  为中心，并间隔为 2。

谐波 LG 模式的相对强度如图 2 (h) 所示。可以看到它们分布在  $n - l_n$  空间中的一个半无限三角形内。该三角形的上边界和下边界分别是  $l_n = nl_0 \pm (n - 1)$ ，分别对应于 RCP 和 LCP 情况的选择规则。请注意，在每个谐波阶数  $n$  处，LG 模式的强度都是通过使用  $l_n = nl_0 - (n - 1)$  产生的最低方位角模式进行归一化的。一般来说，模式的强度在中心较高，并且相对于中线  $l_n = nl_0$  基本对称分布。最后，值得注意的是相对强度的平方根 (对应于模式振幅) 非常接近“帕斯卡三角形”，如图 2 (h) 中的白色数字所示。

在下文中，我们基于 ROW 模型的框架推导选择规则。我们首先使用基尔霍夫积分定理，并考虑振荡窗口引起的延迟效应，将衍射电场写为 [23, 24]。

$$\mathbf{E}_{hhg}(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_B [\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_l(x_0, y_s, z_s)] \times \frac{\exp(ik_0 R' - i\omega_0 t)}{R'} ds' \quad (1)$$

其中  $\mathbf{e}_n$  是垂直于屏幕的单位向量， $R'(t') = |\mathbf{R} - d\mathbf{R}'(t')|$  是从面积元素  $[ds'(x_0, y_s, z_s)]$  到观测点 ( $x, y, z$ ) 的距离， $\mathbf{R}$  为初始距离。这里， $d\mathbf{R}'(t') = -(\mathbf{e}_y +$

$i\sigma\mathbf{e}_z\delta_{ow}\exp(ik_0x_0 - i\omega_0t' + il_0\phi_s)$  是在延迟时间  $t' = t - R'/c$  测量的  $ds'$  的位移，而  $\phi_s = \tan^{-1}(y_s/z_s)$  是衍射目标处的方位角。电子振荡的振幅为  $\delta_{ow}$ ，我们在推导选择规则时假设其很小 ( $\delta_{ow} \ll \omega_0/c$ )，当  $a_0 \ll 1$  时有效。重要的是，由于仅与孔径振荡边缘附近的电磁波传播相关的高次谐波生成，积分限于边界 ( $\sim \delta_{ow}$ ) 上的一个窄范围 ( $B$ )，因此  $ds' \approx \delta_{ow}r_0d\phi_s$ 。这样一个准一维区域可以扭曲以解释由 LG 驱动器引起的衍射窗口的变形 [图 1(b)]。

为了说明选择规则，推导衍射场的最低阶是足够的，也就是说，我们取  $t' \approx t - R/c$  并将其代入  $ds'$  的位移中以获得

$$R'(t') \approx R_0 - r_0 \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_s) + \sin \theta_0 \delta_{ow} \times (\cos \phi + i\sigma \sin \phi) \exp(ik_0R - i\omega_0t + il_0\phi_s), \quad (2)$$

其中  $\theta_0 = \sin^{-1}(\sqrt{y^2 + z^2}/R_0)$  和  $\phi = \tan^{-1}(y/z)$  分别是开口角 (在衍射孔径中心测量) 和观察点的方位角，且  $R_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2 + z^2}$ 。由于  $\delta_{ow} \ll r_0 \ll R_0$ ，所有与  $\delta_{ow}r_0/R_0^2$  及其更小项成比例的项都被忽略了。

对于一个 CP 驱动器，通过将方程 (2) 和  $\mathbf{E}_t \propto \exp(il_0\phi_s)$  代入方程 (1)，并两次应用 Jacobi-Anger 恒等式，可以得到 CP 驱动器的衍射谐波场为：

$$\mathbf{E}_{hhg}^{CP} \propto \sum_n \sum_m J_{n-1}(\epsilon_1) J_m(n\epsilon_2) \times \exp\{ink_0R_0 - in\omega_0t + i[m + (n-1)\sigma\phi]\} \times \int_0^{2\pi} \exp[i(nl_0 - m)\phi_s] d\phi_s, \quad (3)$$

其中， $J_n(x)$  是一类 Bessel 函数， $\epsilon_1 = k_0 \sin \theta_0 \delta_{ow}$  和  $\epsilon_2 = k_0 \sin \theta_0 r_0$ 。显然，方程 (3) 中的积分只有当  $m = nl_0$  时才非零。因此，在每个谐波上只产生一个模式，其拓扑荷为  $l_n = nl_0 + (n-1)\sigma$ ，这与图 1 一致。

类似地，将  $\sigma = 0$  代入方程 (2)，可以得到 LP 驱动器的  $\mathbf{E}_{hhg} \propto \sum_n J_{n-1}(\epsilon_1 \cos \phi) J_{nl_0}(n\epsilon_2) \exp(ink_0R_0 - in\omega_0t + inl_0\phi)$ 。由于  $\epsilon_1 \ll 1$  和  $\cos \phi = [\exp(i\phi) + \exp(-i\phi)]/2$ ，可以写出  $J_{n-1}(\epsilon_1 \cos \phi) \approx \epsilon_1^{n-1} [\exp(i\phi) + \exp(-i\phi)]^{n-1} / [4^{n-1}(n-1)!]$ ，得到：

$$\mathbf{E}_{hhg}^{LP} \propto \sum_n \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\epsilon_1^{n-1} J_{nl_0}(n\epsilon_2)}{4^{n-1}(n-1)!} C_{n-1}^q \times \exp[ink_0R_0 - in\omega_0t + i(nl_0 + n - 2q - 1)\phi]. \quad (4)$$

因此，在每个谐波阶数  $n$  上，LP 驱动器的衍射场包含  $n$  个不同模式的和，具有拓扑荷  $l_{n,q} = nl_0 + n - 2q - 1$ ，

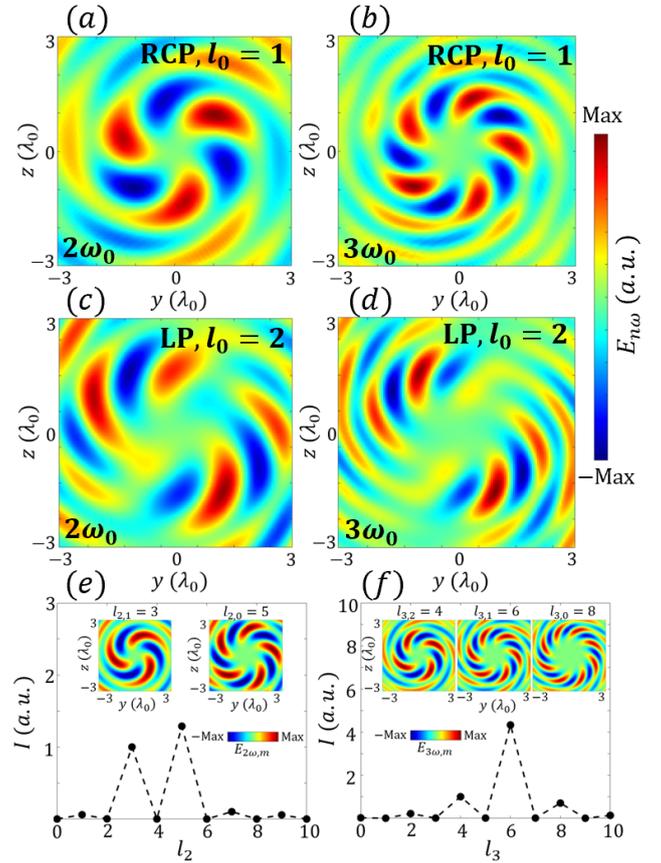


图 3: 由我们的模型计算得出的第二和第三个谐波场。(a-b) 展示了由 RCP LG 激光产生的谐波，其中使用了  $l_0 = 1$  (与图 1 相同)；(c-d) 展示了使用 LP LG 驱动器的情况，其中使用了  $l_0 = 2$  (与图 2 相同)。(e) 和 (f) 分别是 (c) 和 (d) 的方位谱。强度在 (e) 中通过模式  $l_2 = 3$  归一化，在 (f) 中通过模式  $l_3 = 4$  归一化，插图描绘了具有图中标注拓扑电荷的滤波 LG 模式。

( $q = 0, 1, \dots, n-1$ )。此外，方程 (4) 表明，在谐波阶数  $n$  下， $m$  阶 LG 模的相对振幅与系数  $C_{n-1}^q$  成正比，这解释了图 2(h) 中表示的方位谱。

尽管这里使用的分析方法仅在  $a_0 \ll 1$  时严格有效，但这些部分规则也适用于相对论强度。这一点在图 3 中得到展示，在该图中我们考虑了强相对论区域中的谐波产生 ( $a_0 \gg 1$ )。通过设置  $\delta_{ow} = 0.5\lambda_0$  在表面波破裂限制 [23] 下，并迭代求解  $R'(t')$ ，从方程 (1) 中数值计算出谐波场。

图 3(a-b) 展示了由 RCP LG 激光产生的二次和三次谐波场，其结果与公式 (3) 以及图 1(d-f) 所示的 PIC 结果非常吻合，其中包含  $l_0 = 1$ 。图 3(c-d) 说明了由 LP LG 驱动器生成的二次和三次谐波光束，这与图 2(b-c) 非常相似，其中包含  $l_0 = 2$ 。

此外，通过对图 3(c-d) 进行方位傅里叶变换，可以

得到第二和第三谐波的方位模式光谱, 如图 (e-f) 所示。可以看到, 正如方程 (4) 所预测的那样, 二次谐波包含两种模式  $l_{2,0} = 5$  和  $l_{2,1} = 3$ , 而三次谐波则由三种模式  $l_{3,0} = 8$ 、 $l_{3,1} = 6$  和  $l_{3,2} = 4$  组成, 它们的相对强度与图 2(h) 所示的 PIC 结果吻合良好。

总之, 我们研究了由 LG 脉冲驱动的 ROW 机制的高次谐波生成选择规则。发现对于 CP 驱动器, 在每个谐波阶次上都会产生单一 LG 模式, 其拓扑荷为  $l_n = nl_0 + (n-1)\sigma$ ; 当驱动 LG 脉冲是线性偏振时, 复杂的自旋轨道动量相互作用会发生。这导致在  $n\omega_0$  处生成多个 ( $n$ ) LG 模式, 其拓扑荷为  $l_{n,q} = nl_0 + n - 2q - 1$ , 其中  $q = 0, 1, \dots, n-1$ 。根据 ROW 模型推导出一个理论模型来解释这些观察到的选择规则, 该模型与模拟非常吻合。这项工作提供了通过相对论衍射的高次谐波生成过程的基本见解。实际应用中, 可以通过选择特定 OAM 由 LP LG 驱动器产生的谐波模式 [32] 来产生频率梳 [33] 或生成携带可控 OAM 的紫外脉冲。

本研究得到了中国国家重点 R&D 计划 (No.2021YFA1601700) 和国家自然科学基金 (No.12475246) 的支持。

---

\* lqyi@sjtu.edu.cn

- [1] D. Habibovic, K. R. Hamilton, O. Neufeld, and L. Rego, *Nat. Rev. Phys.* **6**, 663 (2024).
- [2] K. Y. Bliokh, F. J. Rodríguez-Frotoño, F. Nori, and A. V. Zayats, *Nat. Photon.* **9**, 796 (2015).
- [3] Y. Shen, X. Wang, Z. Xie, C. Min, X. Fu, Q. Liu, M. Gong, and X. Yuan, *Light: Sci. & Appl.* **8**, 90 (2019).
- [4] N. Berova, P. L. Polavarapu, K. Nakanishi, and R. W. Woody, *Comprehensive Chiroptical Spectroscopy: Instrumentation, Methodologies, and Theoretical Simulations* (Wiley, 2012).
- [5] K. A. Forbes and D. L. Andrews, *Opt. Lett.* **43**, 435 (2018).
- [6] W. Brullot, M. K. Vanbel, T. Swusten, and T. Verbiest, *Sci. Adv.* **2**, e1501349 (2016).
- [7] J. R. Rouxel, B. Rösner, D. Karpov, C. Bacellar, G. F. Mancini, F. Zinna, D. Kinschel, O. Cannelli, M. Oppermann, C. Svetina, A. Diaz, J. Lacour, C. David, and M. Chergui, *Nat. Photon.* **16**, 570 (2022).
- [8] N. Mayer, S. Patchkovskii, F. Morales, M. Ivanov, and O. Smirnova, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 243201 (2022).
- [9] A. F. Ordonez and O. Smirnova, *Phys. Rev. A* **99**, 043416 (2019).
- [10] V. Wanie, E. Bloch, E. P. Mansson, L. Colaizzi, S. Ryabchuk, K. Saraswathula, A. F. Ordonez, D. Ayuso, O. Smirnova, A. Trabattoni, V. Blanchet, N. B. Amor, M. C. Heitz, Y. Mairesse, B. Pons, and F. Calegari, *Nature* **630**, 109 (2024).
- [11] G. Garipey, J. Leach, K. T. Kim, T. J. Hammond, E. Frumker, R. W. Boyd, and P. B. Corkum, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 153901 (2014).
- [12] R. Geneaux, A. Camper, T. Auguste, O. Gobert, J. Cailat, R. Taieb, and T. Ruchon, *Nat. Commun.* **7**, 12583 (2016).
- [13] O. E. Alon, V. Averbukh, and N. Moiseyev, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3743 (1998).
- [14] O. Neufeld, D. Podolsky, and O. Cohen, *Nat. Commun.* **10**, 405 (2019).
- [15] M. E. Tzur, O. Neufeld, A. Fleischer, and O. Cohen, *New J. Phys.* **23**, 103039 (21).
- [16] P. B. Corkum and F. Krausz, *Nat. Phys.* **3**, 381 (2007).
- [17] S. V. Bulanov, N. M. Naumova, and F. Pegoraro, *Phys. Plasmas* **1**, 745 (1994).
- [18] R. Lichters, J. Meyer-ter-Vehn, and A. Pukhov, *Phys. Plasmas* **3**, 3425 (1996).
- [19] T. Baeva, S. Gordienko, and A. Pukhov, *Phys. Rev. E* **74**, 046404 (2006).
- [20] B. Dromey, M. Zepf, A. Gopal, K. Lancaster, M. S. Wei, K. Krushelnick, M. Tatarakis, N. Vakakis, S. Mous-taizis, R. Kodama, M. Tampo, C. Stoeckl, R. Clarke, H. Habara, D. Neely, S. Karsch, and P. Norreys, *Nat. Phys.* **2**, 456 (2006).
- [21] C. Hernandez-Garcia, A. Picon, J. S. Roman, and L. Plaja, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 083602 (2013).
- [22] X. M. Zhang, B. F. Shen, Y. Shi, X. F. Wang, L. G. Zhang, W. P. Wang, J. C. Xu, L. Yi, and Z. Z. Xu, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 173901 (2015).
- [23] L. Yi, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 134801 (2021).
- [24] L. Yi, arXiv:2505.03199 (2025).
- [25] K. Hu, X. Guo, and L. Yi, arXiv:2505.03215 (2025).
- [26] R. Trines, H. Schmitz, M. King, P. McKenna, and R. Bingham, *Nat. Commun.* **15**, 6878 (2024).
- [27] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45**, 8185 (1992).
- [28] Y. Shi, B. F. Shen, L. G. Zhang, X. M. Zhang, W. P. Wang, and Z. Z. Xu, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 235001 (2014).

- [29] C. Rosales-Guzmán, B. Ndagano, and A. Forbes, *J. Opt.* **20**, 123001 (2018).
- [30] K. Bliokh and F. Nori, *Phys. Rep.* **592**, 1 (2015).
- [31] T. D. Arber, K. Bennett, C. S. Brady, A. Lawrence-Douglas, M. G. Ramsay, N. J. Sircombe, P. Gillies, R. G. Evans, H. Schmitz, A. R. Bell, and C. P. Ridgers, *Plasma Phys. Control. Fusion* **57**, 113001 (2015).
- [32] Y. Yang, G. Thirunavukkarasu, M. Babiker, and J. Yuan, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 094802 (2017).
- [33] L. Rego, N. J. Brooks, Q. L. D. Nguyen, J. S. Roman, I. Binnie, L. Plaja, H. C. Kapteyn, M. M. Murnane and C. Hernandez-Garcia, *Sci. Adv.* **8**, 7380 (2022).