

粗分离的粗 $PD(n)$ 空间

Harsh Patil

摘要

我们证明了如果一个粗糙的 $PD(n)$ 度量空间 X 的子空间 A 将其粗分离，则其渐进维数必须至少为 $n - 1$ 。

1 介绍

拓扑空间 X 的子空间 A 被称为分离 X ，如果补集 $X - A$ 由多于一个连通分支组成。经典的 Jordan 曲线定理指出，每一条简单闭合曲线都会将欧几里得平面分开，并且其补集由两个连通分支组成。在度量空间的粗糙范畴中的类似概念是粗糙分离。非正式地说，度量空间中的一个子空间 A 被称为粗略地分离了 X ，如果存在两个不相交的集合 B_1 和 B_2 ，使得既不是 B_1 也不是 B_2 包含在 A 的有限邻域内，并且对于每一个 $R > 0$ 存在一个 $R' > 0$ ，使得任意两个距离为 R 的点 $x_1 \in B_1$ 和 $x_2 \in B_2$ 总是包含在 A 的 R' 邻域内。最近，[2] 的作者证明了对于包括非紧型对称空间、树的水平乘积和 Bourdon 的双曲建筑在内的各种空间分离子集的一些必要条件。在他的近期预印本 [6] 中，Tselekidis 提出了以下猜想：

$\mathbb{R}^n$ 不能通过渐进维度严格小于 $n - 1$ 的子空间分离。

我们给出这个猜想的解，并证明它对于更广泛的粗略 $PD(n)$ 空间成立：

定理 1.1. 设 X 是一个粗糙 $PD(n)$ 空间，并设 A 是 X 的一个子空间，使得 A 分离 X 。然后， A 的渐进维数必须至少为 $n - 1$ 。

粗略 $PD(n)$ 空间的概念最初由 Kapovich 和 Kleiner[4] 引入，作为度量单纯复形，其大规模几何性质类似于紧流形的万有覆盖。Banerjee 和 Okun[1] 用粗略上同调的语言重新表述了这一概念，并在度量空间的粗略范畴中给出了更一般的定义。

证明定理 1.1 所使用的主要工具是由 Okun 和 Banerjee 在 [1] 中证明的 Alexander 对偶的一个粗略类似物。

我们得到以下推论作为直接结果

推论 1.2. 令 G 为一个 $PD(n)$ 群, 使得 G 沿着子群 C 分裂。那么, C 的渐进维数至少为 $n - 1$ 。

2 预备知识

2.1 粗糙分离

我们回顾一下子空间粗略分离度量空间的含义。

定义 2.1 (粗糙分离). 令 X 为一个度量空间和 $A \subset X$ 。子集 $C \subset X$ 是 A 的粗糙补分量, 如果对于任意的 $R > 0$ 都存在一个 $R' > 0$ 使得 $N_R(C) \cap N_R(X - C) \subset N_{R'}(A)$ 。 C 是 A 的一个浅层粗糙补分量, 如果存在某个 $r > 0$ 使得 $C \subset N_r(A)$ 。否则它是深度。我们说, 如果 C 和 $X - C$ 都是 $X - A$ 的深层粗糙互补成分, 则 C 关于 A 导致一个深度分离。令 $A \subset X$ 。我们将说如果存在关于 A 的 X 的深层次分离, 则 A 粗略地分离 X 。

2.2 粗略同调

设 X 是一个度量空间, 令 $X^{(n)}$ 表示 n 重笛卡尔积 X 。一个 n 链是一个形式和 $\alpha = \sum_{\sigma \in X^{(n+1)}} a_\sigma \sigma$, $a_\sigma \in \mathbb{Z}$ 。支持的 α 定义为所有系数非零的单纯形 σ 的集合 $\text{supp}(\alpha) = \{\sigma | a_\sigma \neq 0\}$ 。令 $CX_n(X)$ 表示满足以下两个性质的 n -链集合:

1. 对于 X 的任何有界子集 B , 只有有限多个单纯形 σ 满足 $a_\sigma \neq 0$ 和 σ 的所有顶点都在 B 中。

2. 存在一个常数 $C > 0$, 使得对于任何 $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ 我们有, $\sup \{d(x_i, x_j)\}_{i,j} < C$

存在一个自然边界映射 $\partial : CX_n(X) \rightarrow CX_{n-1}(X)$, 它在 $X^{(n+1)}$ 上由以下定义,

$$\partial(x_0, \dots, x_n) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$$

并在线性扩展到整个 $CX_*(X)$ 。链复形 $(CX_*(X), \partial)$ 的同调在第 n 项被称为 X 的粗黎曼同调, 并记为 $HX_n(X)$ 。

我们不直接使用补集的粗上同调。我们将使用的关于补集的粗上同调的唯一事实是以下命题 2.2 和定理 2.3。对于补集的粗上同调的原始定义，我们请读者参考 [1]。

命题 2.2. [1, Lemma 5.6] $HX^1(X - A)$ 是非平凡的，如果 A 粗糙地分离 X 。

2.3 粗略 $PD(n)$ 空间

我们不直接使用粗 $PD(n)$ 空间的定义。我们避免给出粗 $PD(n)$ 空间的定义。我们请感兴趣的读者参考 [1]。唯一用到的关于粗略 $PD(n)$ 空间的事实是 Banerjee-Okun 的定理：

定理 2.3. [1, Theorem 1.1] 如果 X 是一个粗略的 $PD(n)$ 空间，那么对于任意 $A \subset X$ ，则

$$HX^k(X - A) \cong HX_{n-k}(A).$$

2.4 群的直接系统和链复形

我们回顾群的直接系统及其直接极限的定义。

定义 2.4 (群的直接系统). 令 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 表示一组群序列，并且令 $\{f^{i,j}\}_{i \leq j}$ 表示一组映射，使得

1. $f^{i,j}$ 是从 A_i 到 A_j 的同态，对于所有的 $i \leq j$,
2. $f^{i,i}$ 是所有 i 的恒等映射，并且
3. 对所有 $i \leq j \leq k, f^{i,k} = f^{j,k} \circ f^{i,j}$ 成立。

那么，对偶 $\langle A_i, f^{i,j} \rangle$ 被称为群的直接系统。

定义 2.5 (群的直接极限). 令 $\langle A_i, f^{i,j} \rangle$ 表示一个群的直接系统。然后， $\langle A_i, f^{i,j} \rangle$ 的直接极限，记作 $\varinjlim_i A_i = (A, (\phi_i)_i)$ ，是一个群 A ，连同一组同态 $\phi_i : A_i \rightarrow A$ ，使得：

1. $\phi_j = \phi_i \circ f^{i,j}$ 对所有 $i \leq j$,
2. 对于满足对于所有 $i \leq j$ 均有 $\psi_j = \psi_i \circ f^{i,j}$ 的任意其他群 B 和同态 $\psi_i : A_i \rightarrow B$ ，存在唯一的同态 $u : A \rightarrow B$ 使得对于所有 i 均有 $\psi_i = u \circ \phi_i$ 。

同态 $\{\phi_i\}$ 被称为与直接极限相关的典范同态。

直接极限总是在由阿贝尔群构成的直接系统中存在，并且在同构意义上是唯一的。我们回顾一个由阿贝尔群构成的有向系统的直接极限的标准构造。

令 $\langle A_i, f^{i,j} \rangle$ 表示一个由阿贝尔群构成的直接系统。设 $G = \bigoplus A_i$ 。令 N 是由集合 $\bigcup_i \{x - f^{i,j}(x) | x \in A_i, j \geq i\}$ 生成的 G 的子群。定义 $A := G/N$ 。令 $\phi_i : A_i \rightarrow A$ 表示通过将典范包含 $\mathbf{q} : A_i \rightarrow G$ 与商映射 $G \rightarrow G/N$ 复合而得到的映射。那么，配对 (A, ϕ_i) 是系统 $\langle A_i, f^{i,j} \rangle$ 的直接极限。

引理 2.6. 设 $\langle A_i, f^{i,j} \rangle$ 是一个阿贝尔群的直系，并设 (A, ϕ_i) 表示它的直接极限。令 $g_1, \dots, g_k$ 是 $\bigoplus_i A_i$ 的有限多个元素，使得对于每个 $1 \leq i \leq k$, g_i 属于 A_{m_i} 对某个 m_i 而言。令 $g = g_1 + g_2 + \dots + g_k \in \bigoplus_i A_i$ 。 g 在商空间 $G \rightarrow A$ 下映射到平凡元素，当且仅当存在 M 使得对于所有 $1 \leq i \leq k$ 和 $\sum_{i=1}^k f^{m_i, M}(g_i) = 0$ 都有 $M > m_i$ 。

证明. 命题的“如果”部分是直接明了的。确实，如果存在这样的 M ，那么 $\mathbf{q}(g) = (g_1 - f^{m_1, N}(g_1)) + \dots + (g_k - f^{m_k, N}(g_k)) \in N$ 。

对于逆命题，我们证明该命题对 N 中的所有元素都成立。任意一个元素 $g \in N$ 都是一个有限个形式为 $x - f^{i,j}(x)$ 的元素之和， $g = (x_1 - f^{i_1, j_1}(x_1)) + \dots + (x_t - f^{i_t, j_t}(x_t))$ 。令 $M > i_p, j_p$ 对所有 $1 \leq p \leq t$ 成立。然后，

$$\begin{aligned} & \sum f^{i_1, M}(x_1) - f^{j_1, M}(f^{i_1, j_1}(x_1)) + \dots + f^{i_t, M}(x_t) - f^{j_t, M}(f^{i_t, j_t}(x_t)) \\ &= \sum f^{i_1, M}(x_1) - f^{i_1, M}(x_1) + \dots + f^{i_t, M}(x_t) - f^{i_t, M}(x_t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

我们还回忆链复形的直系统及其直极限的定义。

定义 2.7 (链复形的直接系统). 令 $(A_*^i)_i$ 为链复合体的序列，并且令 $(f^{i,j})_{i \leq j}$ 为一组映射，使得

1. $f^{i,j}$ 是从 A_*^i 到 A_*^j 的链映射对于所有 $i \leq j$,
2. $f^{i,i}$ 是所有 i 的恒等映射，且
3. 对所有 $i \leq j \leq k, f^{i,k} = f^{j,k} \circ f^{i,j}$ 成立。

那么, 序列 $(A_*^i)_i$ 与 $\{f^{i,j}\}$ 一起称为构成链复合体的直系系统。它表示为 $\langle A_*^i, f^{i,j} \rangle$ 。

给定一个链映射 $f : A_* \rightarrow B_*$, 令 f^k 表示其限制到第 k 个链群 $f^k : A_k \rightarrow B_k$ 。给定一个链复形的直系系统 $\langle (A_*^i), f^{i,j} \rangle$, 对于每个 k , 取第 k 个链群 $\{A_k^i\}_i$ 及其上的 $f_{i,j}^k$ 形成一个 Abel 群的直系系统 $\langle (A_k^i)_i, f_{i,j}^k \rangle$ 。令 $A_k := \varinjlim_i A_k^i$ 。令 $\partial : A_k \rightarrow A_{k-1}$ 表示由边界算子 $\partial^i : A_k^i \rightarrow A_{k-1}^i$ 在个体 A_i 上诱导出的自然边界映射。对 ∂ 的更精确描述如下: 令 $\phi_i : A_{k-1}^i \rightarrow A_{k-1}$ 表示从 A_{k-1}^i 到 A_{k-1} 的典型同态。然后, $m^i := \partial^i \circ \phi^i : A_k^i \rightarrow A_{k-1}$ 给出了一组满足 $m^i = m^j \circ f^{i,j}$ 的映射。存在唯一的态射 $\partial : A_k \rightarrow A_{k-1}$ 使得 $\partial \circ \psi_i = \phi_i$ 。这样, 我们得到了一个链复形 (A_*, ∂) , 我们称之为系统 $\langle A_*^i, f^{i,j} \rangle$ 的直极限。

令 $H_k(A_*^i)$ 表示链复形 A_*^i 的 k 阶同调群。令 $H_k(f^{i,j}) : H_k(A_*^i) \rightarrow H_k(A_*^j)$ 表示由 $f^{i,j}$ 在相应的同调群上诱导出的映射。群的集合 $H_k(A_*^i)$ 连同同态 $H_k(f^{i,j})$ 构成了一个群的直接系统。以下定理说明了该系统的直接极限 $\langle H_k(A_k^i), H_k(f^{i,j}) \rangle$ 与 $H_k(A_*)$ 同构。

定理 2.8. 令 $\langle (A_*^i), f^{i,j} \rangle$ 表示链复形的直系系统, 并令 (A_*, ∂) 表示其直接极限。那么,

$$H_k(A_*) \cong \varinjlim_i H_k(A_*^i).$$

2.5 反 Čech 系统

设 X 是一个度量空间。覆盖 X 的一组均匀有界子集 $\mathcal{U}$ 称为良好覆盖, 如果它是局部有限的, 即对于每个 $x \in X$, 集合 $\{U \in \mathcal{U} | x \in U\}$ 是有限的。一个覆盖 $\mathcal{V}$ 被称为另一个覆盖 $\mathcal{U}$ 的细化, 如果每一个元素 $V \in \mathcal{V}$ 包含在某个元素 $U \in \mathcal{U}$ 中。

定义 2.9 (反 Čech 系统). 一个勒贝格数对于度量空间的覆盖 $\mathcal{U}$ 是一个数 $r > 0$, 使得任何直径为 r 的集合都包含在该覆盖的一些成员中。如果每个 $x \in X$ 都包含在至多 k 个 $\mathcal{U}$ 元素中, 那么我们说 $\mathcal{U}$ 的重数至多为 k 。我们回顾渐进维数的定义。

定义 2.10. 设 X 是一个度量空间。我们说渐进维数为 $asdim(X) \leq n$ 如果满足以下条件:

对于每一个 $\lambda > 0$, 存在一个由勒贝格数大于 λ 且重数至多为 $n+1$ 的均匀有界集构成的 X 的覆盖 $\mathcal{U}$ 。

我们说 $asdim(X) = k$ 如果上述条件对于 $n = k$ 成立, 但对于 $n = k - 1$ 不成立。

一个度量空间 X 的良好覆盖序列 $\{\mathcal{U}_i\}$ 。我们将说它们形成一个反 Čech 系统, 如果存在实数序列 $R_n \rightarrow \infty$, 使得对于所有的 n ,

1. 每个集合 U 在 $\mathcal{U}_n$ 中的直径小于或等于 R_n 。
2. 封盖 $\mathcal{U}_{n+1}$ 的勒贝格数大于 R_n 。

上述定义中的两个条件意味着对于每个 $i < j$, $\mathcal{U}_i$ 是 $\mathcal{U}_j$ 的细化。

推论 2.11. 设 X 是一个度量空间, 使得 $asdim(X) = k$ 。则 X 存在一个反 Čech 系统 $\{\mathcal{U}_i\}$, 使得每个覆盖 $\mathcal{U}_i$ 的多重性至多为 $k + 1$ 。

证明. 我们归纳构造一个具有所需性质的覆盖序列 $\{\mathcal{U}_i\}$ 。令 $R_0 = 1$, 并设 $\mathcal{U}_1$ 是多重性至多为 $k + 1$ 的一致有界覆盖, 使得 $\mathcal{U}_1$ 的勒贝格数至少为 R_0 。令 $R_1 = \sup\{diam(U) | U \in \mathcal{U}_1\}$ 。令 $\mathcal{U}_2$ 是一个均匀有界的覆盖, 其重数最多为 $k + 1$, 且勒贝格数至少为 R_1 。通过归纳法可以得到一组覆盖 $\{\mathcal{U}_i\}$, 使得每个 $\mathcal{U}_i$ 的重数最多为 $k + 1$, 并且存在一个趋于无穷大的实数序列 R_n , 对于每一个 i , $\mathcal{U}_i$ 中的每个集合直径小于或等于 R_i , 且覆盖 $\mathcal{U}_{i+1}$ 的勒贝格数大于或等于 R_i 。□

定义 2.12 (覆盖的神经丛). 令 X 是一个度量空间, $\mathcal{U}$ 是由一致有界集覆盖 X 的。 $\mathcal{U}$ 的神经, 记为 $N(\mathcal{U})$, 定义如下:

1. 零骨架 $N(\mathcal{U})^{(0)}$ 是 $\mathcal{U}$ 。
2. 若一个 $(n + 1)$ 元组 $(U_0, U_1, \dots, U_n)$ 构成一个 n 单纯形, 当且仅当交集 $U_0 \cap U_1 \cdots \cap U_n$ 非空。

我们还回顾了单纯复形 X 的局部有限同调 $H_n^{lf}(X)$ 的定义。设 X 是一个单纯复形, 并且令 $C_n^{lf}(X)$ 表示由所有形式和 $\alpha = \sum_{\sigma \in X^{(n)}} a_\sigma \sigma, a_\sigma \in \mathbb{Z}$ 组成的阿贝尔群, 使得每个 $\beta \in X^{(n-1)}$, β 的星集与 $st_X(\beta)$ 和 α 的支撑集之间的交集是有限的。请注意, 如果 X 是局部有限的, 则此条件会自动满足。然后, $C_*^{lf}(X)$ 是一个链复形, 其中边界映射 $\partial : C_n^{lf}(X) \rightarrow C_{n-1}^{lf}(X)$ 按照以下表达式在单个单纯形上定义:

$$\partial[x_0, \dots, x_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

并在线性扩展到所有 $C_n^{lf}(X)$ 上。 n -阶同调群的 C_* 被称为 X 的局部有限同调, 并记为 $H_n^{lf}(X)$ 。

命题 2.13. 令 X 是一个度量空间, 并且 $\{\mathcal{U}_i\}$ 和 $\{\mathcal{V}_i\}$ 是 X 的任意两个反 Čech 系统。令 $\{N(\mathcal{U}_i)\}$ 和 $\{N(\mathcal{V}_i)\}$ 是对应的局部有限单纯复形的直接系统。然后,

$$\varinjlim_i H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i)) \cong \varinjlim_i H_k^{lf}(N(\mathcal{V}_i)).$$

证明. 证明分为两部分。首先, 我们表明该陈述对任何反 Čech 系统 $\{\mathcal{U}_i\}$ 及其子序列 $\{\mathcal{U}_{j(i)}\}$ 都成立。在第二部分中, 我们表明给定任意两个反 Čech 系统 $\{\mathcal{U}_i\}$ 和 $\{\mathcal{V}_i\}$, 可以构造一个反 Čech 系统 $\{\mathcal{W}_i\}$, 使其包含 $\{\mathcal{U}_i\}$ 的子序列和 $\{\mathcal{V}_i\}$ 的子序列。这实际上表明了 $\varinjlim_i H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i))$ 和 $\varinjlim_i H_k^{lf}(N(\mathcal{V}_i))$ 都与 $\varinjlim_i H_k^{lf}(N(\mathcal{W}_i))$ 同构, 因此它们彼此同构。

设 $\{\mathcal{U}_i\}$ 是一个反 Čech 系统, 并设 $\{\mathcal{U}_{j(i)}\}$ 是它的一个子序列。然后, 存在一个自然的包含映射 $i: \bigoplus_j H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_{j(i)})) \hookrightarrow \bigoplus_i H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i))$ 。令 N_1 表示子群 $\langle \bigcup_i \{x - p_{j(i)}^{j(k)}(x) | x \in H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_{j(i)})), i < k\} \rangle$, 并令 N_2 表示子群 $\langle \bigcup_i \{x - p_i^k(x) | x \in H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i)), i < k\} \rangle$ 。 N_1 自然是一个子群 N_2 。因此, 我们得到一个同态 $q: \bigoplus_j H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_{j(i)}))/N_1 \rightarrow \bigoplus_i H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i))/N_2$ 。我们声称 q 是一个同构。

q 是满射: $\bigoplus_i H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i))/N_2$ 由形式为 $\bigoplus \alpha_i$ 的元素生成, 使得 α 的所有分量 α_i 都是平凡的, 除了一个。设 $\alpha = \bigoplus \alpha_i$ 是一个元素, 使得 $\alpha_k = x$ 和 $\alpha_i = 0$ 对于 $i \neq k$ 成立。设 m 是子序列 $j(i)$ 中的一个元素, 使得 $m \geq k$ 。考虑元素 $\beta = \bigoplus_{j(i)} \beta_{j(i)} \in \bigoplus_{j(i)} H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_{j(i)}))/N_1$, 使得对于所有 $j(i) \neq m$ 均有 $\beta_m = p_k^m(x)$ 和 $\beta_{j(i)} = 0$ 。然后, $q(\beta) = \alpha$ 。

q 是单射: 设 $g \in \ker(q)$ 。设 $\bigoplus_i g_{j(i)} \in \bigoplus_i H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_{j(i)}))$ 是 g 的一个代表。根据定义, 存在有限多个指标 $m_1, \dots, m_k$, 使得 $g_{j(i)} \neq 0$ 当且仅当 $j(i) \in \{m_1, \dots, m_k\}$ 。由于 $q(g) = 0$, 根据引理 2.6 的“仅当”部分, 存在一个 M 使得对于所有的 $j(i) \in \{m_1, \dots, m_k\}$ 和 $\sum_{i=1}^k p_{j(i)}^M(g_{j(i)}) = 0$ 均有 $M > j(i)$ 。令 M' 为子序列 $j(i)$ 中的一个元素, 使得 $M' > M$ 。然后, $\sum_{i=1}^k p_{j(i)}^{M'}(g_{j(i)}) = \sum_{i=1}^k p_{j(i)}^{M'} \circ p_{j(i)}^M(g_{j(i)}) = p_{j(i)}^{M'}(\sum_{i=1}^k p_{j(i)}^M(g_{j(i)})) = 0$ 。利用引理 2.6 的“如果”部分, 我们有 $g = 0$ 。

给定两个反 Čech 系统 $\{\mathcal{U}_i\}$ 和 $\{\mathcal{V}_i\}$, 我们构造一个反 Čech 系统 $\{\mathcal{W}_i\}$, 使得 $\{\mathcal{W}_i\}$ 包含 $\{\mathcal{U}_i\}$ 的一个子序列和 $\{\mathcal{V}_i\}$ 的一个子序列。令 $\mathcal{W}_1 = \mathcal{U}_1$ 和令 $\lambda_1 = \sup_{W \in \mathcal{W}_1} \text{diam}(W)$ 。对于某个指标 i , 覆盖 $\mathcal{V}_i$ 的勒贝格数将大于或等

于 λ_1 , 并令 j 是这样的最小指标。然后我们定义 $\mathcal{V}_j$ 为序列中的下一个项, $\mathcal{W}_2 = \mathcal{V}_j$ 。通过归纳法, 假设我们已经构造了前 N 个元素 $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_N$ 的序列。设 $\lambda_N = \sup_{W \in \mathcal{W}_N} \text{diam}(W)$ 。如果 N 是偶数, 我们定义 $\mathcal{W}_{N+1}$ 为 $\mathcal{V}_i$, 其中 i 是使得覆盖 $\mathcal{V}_i$ 的勒贝格数大于 λ_N 的最小指标。如果 N 是奇数, 我们定义 $\mathcal{W}_{N+1}$ 为 $\mathcal{U}_i$, 其中 i 是使得覆盖 $\mathcal{U}_i$ 的勒贝格数大于 λ_N 的最小指标。序列 $\mathcal{W}_i$ 在元素 $\{\mathcal{U}_i\}$ 和 $\{\mathcal{V}_i\}$ 之间交替。这是通过构造得到的一个反 Čech 系统。这完成了证明。 $\square$

3 定理 1.1 的证明

在本节中, 我们给出定理 1.1 的证明。我们首先证明定理 3.1, 该定理允许我们使用反 Čech 系统计算空间的粗同调。

以下定理可以在 S.M. Hair 的博士论文 [3] 中找到, 尽管没有给出证明。它也在 [5] 中被陈述, 在那里它被视为粗同调的定义, 而不是一个定理。为了完整起见, 我们在这里提供一个证明。

定理 3.1. 设 X 是一个度量空间, $\{\mathcal{U}_i\}$ 是 X 的反 Čech 系统。则存在同构

$$\text{HX}_k(X) \cong \varinjlim_i H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i))$$

证明. 鉴于命题 2.13, 只需展示任何反 Čech 系统 $\{\mathcal{U}_i\}$ 中 $\text{HX}_k(X)$ 和 $\varinjlim_i H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i))$ 之间的同构。证明分为两个步骤。第一步, 我们将链复形 $\text{CX}_*(X)$ 表达为子复形的直接系统的直接极限 $\langle \text{CX}_*^{\lambda_i}(X), c_{i,j} \rangle$ 。在第二步中, 我们证明了直接系统 $\langle \text{CX}_*^{\lambda_i}(X), c_{i,j} \rangle$ 与特定的 Anti-Čech 系统 $\{\mathcal{U}_i\}$ 中的直接系统 $\langle C_*^{lf}(N(\mathcal{U}_i)), p_i^j \rangle$ 同构。

设 $\{\lambda_i\}$ 是一个单调递增的正实数序列, 使得 $\lambda_i \rightarrow \infty$ 。令 $\text{CX}_*(X)$ 如第 2.2 节所定义, 令 $\text{CX}_*^{\lambda_i}(X)$ 表示子复形 $\text{CX}_*(X)$ 中的链 $\alpha = \sum_{\sigma \in X^{(n+1)}} a_\sigma \sigma$, 满足:

1. 对于 X 的任何有界子集 B , 只存在有限多个单形 σ 使得 $a_\sigma \neq 0$ 和 σ 的所有顶点都在 B 中, 并且
2. 对于任意的 $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \text{supp}(\alpha)$, 存在 $y \in X$ 使得对于所有的 $0 \leq i \leq n$ 均有 $y \in B_{\lambda_i}(x_i)$ 。

我们用 ∂^{λ_i} 表示 $CX_*^{\lambda_i}(X)$ 的边界映射。显然, ∂^{λ_i} 只是将 $CX_*(X)$ 的边界映射 ∂ 限制到子复形 $CX_*^{\lambda_i}(X)$ 上。请注意存在自然包含映射 $c_{i,j}^k : CX_k^{\lambda_i}(X) \rightarrow CX_k^{\lambda_j}(X)$ 对于所有 $i < j$ 和所有 k 成立。不难看出 $c_{i,j}^k$ 与边界算子交换并扩展为链映射 $c_{i,j} : CX_*^{\lambda_i}(X) \rightarrow CX_*^{\lambda_j}(X)$ 。这导致了一个链复合的直接系统 $\langle CX_*^{\lambda_i}(X), c_{i,j} \rangle$ 。此外, 对于每个 k , 集合 $\langle CX_k^{\lambda_i}(X), c_{i,j}^k \rangle$ 是阿贝尔群的直系系统, 并且这个系统的直接极限自然同构于 $CX_k(X)$ 。系统 $\langle CX_*^{\lambda_i}(X), c_{i,j} \rangle$ 的直接极限是通过取阿贝尔群 $CX_k(X)$ 及其边界映射 (由边界的直接极限获得) 而得到的链复形, 该边界映射来自 ∂^{λ_i} , $\delta := \varinjlim_i (\partial^{\lambda_i})$ 。可以很容易地验证映射 δ 与原始边界映射 ∂ 相符。

链映射 $c_{i,j}$ 在相应的同调群 $H_k(c_{i,j}) : H_k(CX_*^{\lambda_i}(X)) \rightarrow H_k(CX_*^{\lambda_j}(X))$ 上诱导出一个映射 $H_k(c_{i,j})$ 。对于每个 k , 群的集合 $\langle H_k(CX_*^{\lambda_i}(X)), H_k(c_{i,j}) \rangle$ 形成一个直系系统。根据定理 2.8, 直极限 $\varinjlim_i H_k(CX_*^{\lambda_i}(X))$ 与复形 $CX_*(X)$ 的 k 阶同调群同构, 即 $HX_k(X) \cong \varinjlim_i H_k(CX_*^{\lambda_i}(X))$ 。

令 $\mathcal{U}_i$ 表示由半径为 λ_i 的球组成的 X 的覆盖。然后 $\{\mathcal{U}_i\}$ 形成一个反 Čech 系统。令 $C_*^{lf}(N(\mathcal{U}_i))$ 表示在 $N(\mathcal{U}_i)$ 上的局部有限链的链复形。对于所有 n , 存在一种自然的一一对应关系, 这种关系是在 $N(\mathcal{U}_i)$ 中的 n -单纯形与单纯形 $\sigma \in X^{(n+1)}$ 之间的, 它将 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ 映射到单纯形 $(B_{\lambda_i}(x_0), B_{\lambda_i}(x_1), \dots, B_{\lambda_i}(x_n))$ 。这个双射诱导了一个同构

$$\theta_n^i : CX_n^{\lambda_i}(X) \rightarrow C_n^{lf}(N(\mathcal{U}_i))$$

对于所有的 n 。同构 p_n 可扩展为链映射

$$\theta^i : CX_*^{\lambda_i}(X) \rightarrow C_*^{lf}(N(\mathcal{U}_i)).$$

p 被视为链同伦等价, 通过考虑由 $N(\mathcal{U}_i)$ 中 n -单纯形与单纯形 $\sigma \in X^{(n+1)}$ 之间双射的逆所诱导的映射即可轻易看出。因此, 相应的同调群是同构的:

$$H_k(\theta^i) : H_k(CX_*^{\lambda_i}(X)) \xrightarrow{\sim} H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i)).$$

接下来需要证明同构 $H_k(p)$ 可以扩展为直接系统 $\langle H_k(CX_*^{\lambda_i}(X)), H_k(c_{i,j}) \rangle$ 和 $\langle H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i)), H_k(p_i^j) \rangle$ 之间的同构。可以很容易验证以下图表对于所有 $i \leq j$ 都是可交换的,

$$\begin{array}{ccc} H_k(CX_*^{\lambda_i}(X)) & \xrightarrow{H_k(\theta^i)} & H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i)) \\ H_k(c_{i,j}) \downarrow & & \downarrow H_k(p_i^j) \\ H_k(CX_*^{\lambda_j}(X)) & \xrightarrow{H_k(\theta^j)} & H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_j)) \end{array}$$

由此得出相应的直接极限也是同构的,

$$\mathrm{HX}_k(X) \cong \varinjlim_i H_k(\mathrm{CX}_*^{\lambda_i}(X)) \cong \varinjlim_i H_k^{lf}(N(\mathcal{U}_i)).$$

□

推论 3.2. 令 X 是一个度量空间, 使得 X 具有有限的渐进维数。那么,

$$\mathrm{asdim}(X) \geq \sup\{k | \mathrm{HX}_k(X) \neq 0\}.$$

证明. 令 $\mathrm{asdim}(A) = n$ 。然后, 由推论 2.11, 存在一个反 Čech 系统 $\{\mathcal{U}_i\}$ 对于 X , 使得每个覆盖 $\mathcal{U}_i$ 具有重数 $n+1$ 。因此, 相应的神经元 $N(\mathcal{U}_i)$ 的维度均不超过 n 。根据定理 3.1 可知, 对于所有 $i > n$, $\mathrm{HX}_i(X)$ 均为零。 □

最后, 我们给出定理 1.1 的证明:

证明. 令 X 为一个粗糙的 $PD(n)$ 空间。令 A 为 X 的一个子空间, 使得 A 分离 X 。由命题 2.2 和定理 2.3, $\mathrm{HX}_{n-1}(A) \cong \mathrm{HX}^1(X-A) \neq 0$ 。推论 3.2 的一个应用告诉我们, A 的渐进维数至少为 $n-1$ 。 □

参考文献

- [1] Arka Banerjee and Boris Okun. Coarse cohomology of the complement. *arXiv preprint arXiv:2308.13965*, 2023.
- [2] Oussama Bensaid, Anthony Genevois, and Romain Tessera. Coarse separation and large-scale geometry of wreath products. 2024.
- [3] Steven Hair. Homological methods in coarse geometry. *PhD Thesis*, 2010.
- [4] Michael Kapovich and Bruce Kleiner. Coarse Alexander duality and duality groups. *Journal of Differential Geometry*, 69(2):279 – 352, 2005.
- [5] John Roe. Lectures on coarse geometry. 2003.
- [6] Panagiotis Tselekidis. Coarsely separation of groups and spaces, 2024.