

球内一般 HARDY-HENON 方程稳定解的先验估计

J. SILVERIO MARTÍNEZ-BAENA AND SALVADOR VILLEGAS

摘要. 本文致力于研究半稳定径向解 $u \in HB$ 的性质, 其中 $-u |x|^\alpha f u$ in $B \setminus \{0\}$ 是一个一般的非线性项, $f \in C\mathbb{R}$, 且 $\alpha > -$ 和 B 是单位球 $\mathbb{R}^N$, $N >$ 。我们建立了这种解在维度 $\leq N < \alpha$ 上的有界性以及情况 $N \geq \alpha$ 下的精确点估计。此外, 对于这一范围内的维度, 我们提供了一大类半稳定的径向递减无界 HB 解。

1. 介绍

本文讨论了径向解 $u \in H^1(B_1)$ 的半稳定性

$$-\Delta u = |x|^\alpha f(u) \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\}, \quad (\text{P})$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_N)$ 和 B_1 是带有测度 ω_N/N 的单位球 $\mathbb{R}^N$, 适用于 $N > 1$ 。在整个论文中我们假设 $\alpha > -2$, 和 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 。我们处理半稳定径向对称能量解 $u \in H^1(B_1)$ 的正则性问题, 其中涉及 (P)。记为 $r := |x|$, 标准的论证表明这些径向解 $u = u(|x|) \equiv u(r)$ 在 $r \in (0, 1]$ 中是连续的, 并且可以被视为经典解。我们像往常一样用 $u_r := \frac{\leq x, \nabla u \geq}{|x|}$ 表示, 并用大写字母 $C, K, C', K' \dots$ 表示可能在整个讨论和计算过程中变化的常数, 下标确定这些常数与其他参数的关系。

方程 (P) 对应于能量泛函

$$E(u) := \int_{B_1} (|\nabla u|^2 - |x|^\alpha F(u)) dx, \quad (1.1)$$

的欧拉-拉格朗日方程其中 $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ 。由于 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 和 u 是连续的, 则 $f'(u)$ 是连续的。如果能量的二次变分是非负定的, 即对于在 $B_1 \setminus \{0\}$ 中具有紧支集的所有 $\varphi \in C^1(B_1)$, 均有

$$d^2 E(\varphi, \varphi) = \int_{B_1} (|\nabla \varphi|^2 - |x|^\alpha f'(u) \varphi^2) dx \geq 0, \quad (1.2)$$

则称解 $u \in H^1(B_1)$ 半稳定是有意义的。

Key words and phrases. Hardy-Henon 方程, 正则估计, 半稳定解。

2020 数学主题分类: 35B45, 35B35, 35J61.

The authors have been supported by the FEDER-MINECO Grant PID2021-122122NBI00 and by J. Andalusia (FQM-116).

方程 (P) 可以视为所谓的 Hardy-Henon 方程的广义版本, 该方程对应于幂型非线性 $f(u) = |u|^{p-1}u$ 。特别地, 在自主情况下 $\alpha = 0$, 该方程称为 Lane-Emden 方程。另一个命名法用于 $f(u) = e^u$, 即 Henon-Gelfand 问题。

对该问题的研究先于所谓的 Henon 方程的研究, 其起源可追溯到 S. Chandrasekhar 的著名工作 [3, Chapter IV, pp. 87-88], 在天体物理学中关于多态平衡恒星结构的工作。

在自主情况下, $\alpha = 0$ 的开创性贡献归功于 [11], 在那里作者证明了对于幂类型非线性 $f(u) = |u|^{p-1}u$ 并且设定在整个空间 $\mathbb{R}^N$ 上时, 不存在正解 $p \in (1, p_S(N))$, 其中 $p_S(N) := 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$ 如果是 $N \leq 3$ 而 $p_S = +\infty$ 如果是 $N \leq 2$, 则为经典的临界 Sobolev 指数。

对于 $p = p_S(N)$, 已知同样的方程 (在平移和重新缩放下) 有一个唯一的正解, 该解是径向的且显式的 (见 [2])。

令 $p_{JL}(N) > p_S(N)$ 表示所谓的 Joseph-Lundgren 指数:

$$p_{JL}(N) = \begin{cases} +\infty & \text{if } N \leq 10, \\ \frac{(N-2)^2 - 4N + 8\sqrt{N-1}}{(N-2)(N-10)} & \text{if } N \geq 11. \end{cases}$$

此指数可以如下特征化: 对于 $p \geq p_S(n)$, 显式函数 $u_s(x) = C_{p,N}|x|^{-\frac{2}{p-1}}$ 对于一个仅依赖于 p 和 N 的适当常数 $C_{p,N}$ 而言, 是 Lane-Emden 方程的一个奇异解, 并且它稳定当且仅当 $p \geq p_{JL}(N)$ 。在 [9] 中证明了, 当 $1 < p < p_{JL}(N)$, $p \neq p_S(N)$ 时, Lane-Emden 方程没有非平凡的有限 Morse 指数解。通过应用某些爆破分析技术, 这样的 Liouville 型定理意味着一大类半线性椭圆方程解的内正则性: 它们已知等价于解的通用估计

$$-Lu = f(x, u, \nabla u) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.3)$$

其中 L 是一个具有光滑系数的一致椭圆算子, 非线性项 f 对于大值的 u 类似于 $|u|^{p-1}u$ 的比例, 而 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个开集。对于精确的陈述, 请参见次临界设置下的工作 [16], 以及 [6] 对其在超临界情况下的改编。

对于 Henon-Hardy 方程 (即 $\alpha \neq 0$, $f(u) = |u|^{p-1}u$), 也有大量的文献。在 [5] 中, 作者展示了以下内容:

定理 1.1. (舞者, 杜, 郭 [5]). 令 u 为 Henon-Hardy 方程的一个稳定解, 带有 $\alpha > -2$, $\Omega = \mathbb{R}^N$, 并且下列假设之一成立: $2 \leq N \leq 10 + 4\alpha$ 和 $p > 1$; 或者 $N > 10 + 4\alpha$ 和 $1 < p < p_{JL}(N, \alpha)$; 其中我们定义了

$$p_{JL}(N, \alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{if } 2 \leq N \leq 10 + 4\alpha, \\ \frac{(N-2)^2 - 2(\alpha+2)(\alpha+N) + 2\sqrt{(\alpha+2)^3(\alpha+2N-2)}}{(N-2)(N-4\alpha-10)} & \text{if } N > 10 + 4\alpha. \end{cases}$$

那么 $u \equiv 0$ 。相反, 对于 $p \geq p_{JL}(N, \alpha)$, 该方程承认一组径向对称的正稳定解。

这些结果后来在 [18] 中被推广到了变号解的情形, 作者还证明了假设 $0 \in \Omega$, 则不存在弱解 $\alpha \leq -2$ 。如他们在证明中所指出的那样, 该结果对于任何正、凸且非递减的非线性项 f 仍然有效。这表明情况 $\alpha \leq -2$ 具有额外的病态行为, 强调了避免对 α 使用那些值的必要性。对于 $\alpha > -2$, $\Omega = \mathbb{R}^N$, 他们还证明了以下两个结果:

- i) 如果 $2 \leq N < 10 + 4\alpha$, 则 Gelfand-Henon 方程没有弱稳定解。
- ii) 如果 $2 < N < 10 + 4\alpha^-$ 其中 $\alpha^- = \min\{\alpha, 0\}$, 那么 Gelfand-Henon 方程的任何弱解都有无限摩尔斯指标。

备注 1.2. 维度范围 $2 \leq N < 10 + 4\alpha$ 是最优的, 因为对于 $N \geq 10 + 4\alpha$

$$u(x) = -(2 + \alpha) \log |x| + \log[(2 + \alpha)(N - 2)],$$

而言, 它是 Gelfand-Henon 方程的一个径向稳定的弱解。

对于分数阶/非局部设置中的类似近期结果, 我们参考 [8],[10],[12],[13],[14], 甚至在右侧带有 Hardy 位势项 $|x|^{-2s}u$ 的结果 [15], 或关于系统的结果 [4],[7] 及其中的参考文献。

在我们的案例中, 我们主要关注一般 Henon-Hardy 方程的半稳定径向解的正则性, 尽管我们认为我们的结果可以在涉及自控情况下已知内容扩展的几个方向上进一步发展。例如, 研究方程 $-\Delta u = \lambda|x|^\alpha f(u)$ 在适当假设集下关于 α 和 f 的存在性和正则性会很有趣, 在 [1] 的精神指导下。内容通过一系列引理和命题展开, 最终达到证明下一节开头陈述的主要定理。

我们直接陈述论文的主要结果: 分类依赖于维度的半稳定径向解的行为。

2. 主要结果的陈述及证明步骤

我们直接陈述论文的主要结果: 对依赖于维度的半稳定径向解 (P) 的行为进行分类。

定理 2.1. 令 $N \geq 2, f \in C^1(\mathbb{R}), \alpha > -2$ 和 $u \in H^1(B_1)$ 是 (P) 的一个半稳定径向解。则存在一个仅依赖于 α 和 N 的常数 $C_{\alpha, N}$, 使得:

$$i) \text{ 如果 } N < 10 + 4\alpha, \text{ 则 } \|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_{\alpha, N} \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}.$$

$$ii) \text{ 如果 } N = 10 + 4\alpha, \text{ 则 } |u(r)| \leq C_{\alpha, 10+4\alpha} \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})} (|\log r| + 1), \quad \forall r \in (0, 1).$$

$$iii) \text{ 如果 } N > 10 + 4\alpha, \text{ 则 } |u(r)| \leq C_{\alpha, N} \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})} r^{\gamma(N, \alpha)}, \quad \forall r \in (0, 1).$$

其中我们定义了指教 $\gamma(N, \alpha) := 2 - N/2 + \alpha/2 + \sqrt{(\alpha + 2)(\alpha + 2N - 2)}/2$ 。

备注 2.2. 注意到 $\gamma(N, \alpha) = 0$ 当且仅当 $N = 10 + 4\alpha$ 和 $\gamma(N, \alpha) < 0$ 当且仅当 $N > 10 + 4\alpha$, 因此逐点估计 *i*) 和 *ii*) 并不导致 u 的有界性。

我们将把证明分为若干引理和命题。

引理 2.3. 设 $N \geq 2, f \in C^1(\mathbb{R}), \alpha > -2$ 和 $u \in H^1(B_1)$ 是 (P) 的一个半稳定径向解。令 $v \in C^{0,1}(0, 1]$ 使得 $v(1) = 0$ 。则

$$\int_{r_0}^1 t^{N-1} u_r^2(t) \left(v'(t)^2 + \alpha \frac{v'(t)v(t)}{t} + \left(1 - N - \alpha \frac{N}{2} \right) \frac{v(t)^2}{t^2} \right) dt \geq 0, \quad (2.1)$$

对每个 $r_0 \in (0, 1)$ 。

证明. 假设, 第一步是 $v \in C^\infty(0, 1)$ 具有紧支集并且 $v \equiv 0$ 在 $(0, r_0]$ 中 (稍后我们将证明对于任何具有 $v(1) = 0$ 的 $v \in C^{0,1}(0, 1]$ 都成立)。对 (P) 关于 r 求导, 我们得到

$$(-\Delta u)_r = -\Delta u_r + \frac{N-1}{r^2} u_r = \alpha r^{\alpha-1} f(u) + r^\alpha f'(u) u_r.$$

乘以径向函数 $u_r v^2$ 并分部积分得到

$$\int_{B_1} \left(\nabla u_r \nabla (u_r v^2) + \frac{N-1}{r^2} u_r^2 v^2 \right) dx = \int_{B_1} (\alpha r^{\alpha-1} f(u) + r^\alpha f'(u) u_r) u_r v^2 dx.$$

因此

$$\int_{B_1} \left(v^2 |\nabla u_r|^2 + 2 u_r v \nabla u_r \nabla v + \frac{N-1}{r^2} u_r^2 v^2 \right) dx = \int_{B_1} (\alpha r^{\alpha-1} f(u) u_r v^2 + r^\alpha f'(u) u_r^2 v^2) dx. \quad (2.2)$$

另一方面, 由于 u 是稳定的, 我们可以考虑径向函数 $u_r v$ (这是一个在 $B_1 \setminus \{0\}$ 中具有紧支集的 $C^1(B_1)$ 函数), 从而获得

$$\int_{B_1} |\nabla (u_r v)|^2 dx \geq \int_{B_1} r^\alpha f'(u) (u_r v)^2 dx. \quad (2.3)$$

从 (2.2) 减去 (2.3) 我们可以断言

$$\int_{B_1} \left(u_r^2 v_r^2 - \frac{N-1}{r^2} u_r^2 v^2 \right) dx \geq -\alpha \int_{B_1} r^{\alpha-1} f(u) u_r v^2 dx. \quad (2.4)$$

让我们展开最后一项:

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} r^{\alpha-1} f(u) u_r v^2 dx &= \int_{B_1} (-\Delta u) \frac{u_r v^2}{r} dx = \omega_N \int_{r_0}^1 t^{N-1} \left(-u_{rr} - \frac{N-1}{t} u_r \right) \frac{u_r v^2}{t} dt = \\
&= -\frac{\omega_N}{2} \int_{r_0}^1 (t^{2N-2} u_r^2)' t^{-N} v^2 dt = \frac{\omega_N}{2} \int_{r_0}^1 t^{2N-2} u_r^2 (t^{-N} v^2)' dt = \\
&= \omega_N \int_{r_0}^1 t^{N-1} \left(\frac{-N}{2} \frac{u_r^2 v^2}{t^2} + \frac{u_r^2 v v'}{t} \right) dt.
\end{aligned}$$

结合这一点和 (2.4), 我们得到

$$\omega_N \int_{r_0}^1 t^{N-1} \left(u_r^2 v'^2 - \frac{N-1}{t^2} u_r^2 v^2 \right) dt \geq -\alpha \omega_N \int_{r_0}^1 t^{N-1} \left(\frac{-N}{2} \frac{u_r^2 v^2}{t^2} + \frac{u_r^2 v v'}{t} \right) dt,$$

是所期望的结论。

事实上, 通过标准的密度论证, 上述公式在考虑一个在 $(0, r_0] \cup \{1\}$ 处消失的 $C^{0,1}(0, 1]$ 函数时也成立。

现在, 为了说明的清晰起见, 我们记

$$I(a, b; v) := \int_a^b t^{N-1} u_r^2(t) \left(v'(t)^2 + \alpha \frac{v'(t)v(t)}{t} + \left(1 - N - \alpha \frac{N}{2} \right) \frac{v(t)^2}{t^2} \right) dt. \quad (2.5)$$

对于任意在 $t = 1$ 处消失的 $v \in C^{0,1}(0, 1]$, 我们定义一个径向截断函数

$$\bar{v}_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < t < \varepsilon, \\ \frac{v(r_0)}{r_0 - \varepsilon} (t - \varepsilon) & \text{if } \varepsilon \leq t \leq r_0, \\ v(t) & \text{if } r_0 < t \leq 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

对于任意 $0 < \varepsilon < r_0$ 。现在, 将引理的第一步应用到函数 $\bar{v}_\varepsilon$ 上, 我们得到 $I(\varepsilon, 1; \bar{v}_\varepsilon) \geq 0$, 从而得出

$$\begin{aligned}
I(r_0, 1; v) &\geq -I(\varepsilon, r_0; \bar{v}_\varepsilon) \\
&= -\left(\frac{v(r_0)}{r_0 - \varepsilon} \right)^2 \int_\varepsilon^{r_0} t^{N-1} u_r(t)^2 \left[1 + \alpha \frac{t - \varepsilon}{t} + \left(1 - N - \alpha \frac{N}{2} \right) \frac{(t - \varepsilon)^2}{t^2} \right] dt.
\end{aligned}$$

注意到由于 $u \in H^1(B_1)$, 整个右边在 $\varepsilon \in (0, r_0)$ 上是一致有界的。因此,

$$I(r_0, 1; v) \geq -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon, r_0; \bar{v}_\varepsilon) = -\left(\frac{v(r_0)}{r_0} \right)^2 (2 + \alpha) \left(1 - \frac{N}{2} \right) \int_0^{r_0} t^{N-1} u_r(t)^2 dt \geq 0,$$

正如我们所声称的。 $\square$

备注 2.4. 在最后一步中, 表明假设 $u \in H^1(B_1)$ 是本质的。确实, 众所周知 (参见例如 [1]), 存在半稳定弱解到 $-\Delta u = C_{N,q}(1+u)^{\frac{q-2}{q}}$ 在 B_1 中的形式为 $u(x) = |x|^q - 1$ 使得 $u \notin H^1(B_1)$ 在范围 $q \in (-\frac{N}{2} + 2 - \sqrt{N-1}, -\frac{N}{2} + 1]$, $N \geq 3$ 内。

命题 2.5. 设 $N \geq 2, f \in C^1(\mathbb{R}), \alpha > -2$ 和 $u \in H^1(B_1)$ 是 (P) 的一个非常数半稳定径向解。然后 $u_r \neq 0$ 在 $(0, 1]$ 中。

证明. 假设存在 $r_1 \in (0, 1]$ 使得 $u_r(r_1) = 0$ 。从 $u \in H^1(B_1)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ 和径向对称性可知 $u(r) \in C^3((0, 1])$ 。因此, 特别地存在一个常数 $C_{r_1} > 0$, 使得对于任意的 $r \in [r_1/2, r_1]$ 都有 $|u_r(r)| \leq C_{r_1}|r - r_1|$ 。另一方面, 我们采用以下测试函数

$$v(t) = \begin{cases} \frac{t}{r_1 - \varepsilon} & \text{if } 0 < t < r_1 - \varepsilon, \\ \frac{r_1 - t}{\varepsilon} & \text{if } r_1 - \varepsilon \leq t \leq r_1, \\ 0 & \text{if } r_1 < t \leq 1, \end{cases}$$

与 $0 < \varepsilon < r_1/2$ 。应用引理 2.3 我们得到 $-I(r_0, r_1 - \varepsilon; v) \leq I(r_1 - \varepsilon, r_1; v)$ 对任意的 $0 < r_0 < r_1 - \varepsilon$ 成立。因此

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(r_1 - \varepsilon)^2} \int_{r_0}^{r_1 - \varepsilon} t^{N-1} u_r^2(t) (2 + \alpha) \left(1 - \frac{N}{2}\right) dt \\ & \leq \int_{r_1 - \varepsilon}^{r_1} \frac{t^{N-1} u_r^2(t)}{\varepsilon^2} \left[1 - \alpha \frac{(r_1 - t)}{t} + \left(1 - N - \alpha \frac{N}{2}\right) \frac{(r_1 - t)^2}{t^2}\right] dt \\ & \leq K \int_{r_1 - \varepsilon}^{r_1} \frac{u_r^2(t)}{\varepsilon^2} dt \leq K C_{r_1}^2 \int_{r_1 - \varepsilon}^{r_1} \frac{(t - r_1)^2}{\varepsilon^2} dt = \frac{K C_{r_1}^2}{3} \varepsilon. \end{aligned}$$

取极限为 $\varepsilon \rightarrow 0$ 我们有

$$-\frac{1}{r_1^2} (2 + \alpha) \left(1 - \frac{N}{2}\right) \int_{r_0}^{r_1} t^{N-1} u_r^2(t) dt \leq 0,$$

这表明在 $[r_0, r_1]$ 中, 如果 $N > 2$, 则 $u_r \equiv 0$ 由相应的柯西问题的唯一性, $u_r \equiv 0$ 在 $(0, 1]$ 中给出了 $N > 2$ 的矛盾。最后, 如果 $N = 2$ 我们通过

$$v(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{r_1 - \varepsilon}\right)^\beta & \text{if } 0 < t < r_1 - \varepsilon, \\ \frac{r_1 - t}{\varepsilon} & \text{if } r_1 - \varepsilon \leq t \leq r_1, \\ 0 & \text{if } r_1 < t \leq 1, \end{cases}$$

改变测试函数其中 $\beta \in \mathbb{R}$ 稍后选择。通过类似的论证, 我们可以得出

$$-\frac{1}{r_1^{2\beta}} (\beta - 1) (\beta + \alpha + 1) \int_{r_0}^{r_1} t^{N-1+2\beta-2} u_r^2(t) dt \leq 0.$$

选择任意的 $\beta \in (-1 - \alpha, 1)$, 我们得到 $u_r \equiv 0$ 在 $[r_0, r_1]$ 中, 这再次产生了矛盾。 $\square$

引理 2.6. 令 $N \geq 2, f \in C^1(\mathbb{R}), \alpha > -2$ 和 $u \in H^1(B_1)$ 是 (P) 的一个非常数半稳定径向解。然后

$$\int_{r/2}^r u_r^2 dt \leq K_{\alpha, N} \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}^2 r^{3-N+\alpha+\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}},$$

对任意的 $r \in (0, 1]$ 。

证明. 我们首先考虑情况 $0 < r \leq 1/2$ 并定义

$$v(t) = \begin{cases} r^{s-1}t & \text{if } 0 < t < r, \\ t^s & \text{if } r \leq t \leq 1/2, \\ 2^{1-s}(1-t) & \text{if } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

其中 $s \in \mathbb{R}$ 尚待确定。由引理 2.3 对 $r_0 = r/2$ 应用, 我们得到

$$\begin{aligned} 0 &\leq r^{2s-2} \int_{r/2}^r t^{N-1} u_r^2(t) (2+\alpha) \left(1 - \frac{N}{2}\right) dt \\ &\quad + \int_r^{1/2} t^{N-3+2s} u_r^2(t) \left(s^2 + \alpha s + 1 - N - \alpha \frac{N}{2}\right) dt \\ &\quad + \int_{1/2}^1 t^{N-1} u_r^2(t) 2^{2-2s} \left[1 - \alpha \frac{1-t}{t} + \left(1 - N - \alpha \frac{N}{2}\right) \left(\frac{1-t}{t}\right)^2\right] dt. \end{aligned}$$

选择 $s_\alpha = -\alpha/2 - \sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}/2$, 第二项确实为零。因此, 我们推导出

$$\begin{aligned} &-r^{2s_\alpha-2} \int_{r/2}^r t^{N-1} u_r^2(t) (2+\alpha) \left(1 - \frac{N}{2}\right) dt \\ &\leq \int_{1/2}^1 t^{N-1} u_r^2(t) 2^{2-2s_\alpha} \left[1 - \alpha \frac{1-t}{t} + \left(1 - N - \alpha \frac{N}{2}\right) \left(\frac{1-t}{t}\right)^2\right] dt. \end{aligned}$$

结果是

$$\begin{aligned} &-r^{2s_\alpha-2} \int_{r/2}^r \left(\frac{r}{2}\right)^{N-1} u_r^2(t) (2+\alpha) \left(1 - \frac{N}{2}\right) dt \\ &\leq r^{2s_\alpha-2} \int_{r/2}^r t^{N-1} u_r^2(t) (2+\alpha) \left(1 - \frac{N}{2}\right) dt \\ &\leq \int_{1/2}^1 t^{N-1} u_r^2(t) 2^{2-2s_\alpha} \left[1 - \alpha \frac{1-t}{t} + \left(1 - N - \alpha \frac{N}{2}\right) \left(\frac{1-t}{t}\right)^2\right] dt \\ &\leq C \int_{1/2}^1 t^{N-1} u_r^2(t) dt, \end{aligned}$$

最后, 我们得到

$$-\frac{(2+\alpha)\left(1-\frac{N}{2}\right)}{2^{N-1}} r^{2s_\alpha-3+N} \int_{r/2}^r u_r^2(t) dt \leq \frac{C}{\omega_N} \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}^2$$

这就是所期望的结论如果 $N > 2$ 。如果 $N = 2$, 我们将测试函数更改为

$$v(t) = \begin{cases} r^{-1-\alpha-\beta} t^\beta & \text{if } 0 < t < r, \\ t^{-1-\alpha} & \text{if } r \leq t \leq 1/2, \\ 2^{2+\alpha}(1-t) & \text{if } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

其中 $\beta \in (-1-\alpha, 1)$ 如同之前的命题。我们有

$$\begin{aligned} & -r^{-2-2\alpha-2\beta} \int_{r/2}^r t^{-1+2\beta} u_r^2(t) (\beta-1)(\beta+\alpha+1) dt \\ & \leq \int_{1/2}^1 t u_r^2(t) 2^{4+2\alpha} \left[1 - \alpha \frac{1-t}{t} - (1+\alpha) \left(\frac{1-t}{t} \right)^2 \right] dt, \end{aligned}$$

当对最后一个积分应用上述相同的论证时, 得到所期望的结论。

另一方面, 我们称 $R_{\alpha,N}$ 为一个常数, 使得对于所有 $r \in [1/2, 1]$, 都有 $0 < R_{\alpha,N} < r^{3-N-2s_\alpha}$ 。因此, 应用上述结论于 $r = 1/2$

$$\begin{aligned} \int_{r/2}^r u_r^2(t) dt & \leq \int_{1/4}^{1/2} u_r^2(t) dt + \int_{1/2}^1 u_r^2(t) dt \\ & \leq K_{\alpha,N} \left(\frac{1}{2} \right)^{3-N-2s_\alpha} \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}^2 + \frac{1}{\omega_N} \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}^2 \\ & = \left(K_{\alpha,N} \left(\frac{1}{2} \right)^{3-N-2s_\alpha} + \frac{1}{\omega_N} \right) \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}^2 \\ & \leq \frac{1}{R_{\alpha,N}} \left[K_{\alpha,N} \left(\frac{1}{2} \right)^{3-N-2s_\alpha} + \frac{1}{\omega_N} \right] \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}^2 r^{3-N-2s_\alpha}, \end{aligned}$$

再次得出相同的结果。 $\square$

命题 2.7. 令 $N \geq 2, f \in C^1(\mathbb{R}), \alpha > -2$ 和 $u \in H^1(B_1)$ 为非常数半稳定径向解的 (P)。则

$$|u(r) - u(r/2)| \leq K'_{\alpha,N} \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})} r^{2-N/2+\alpha/2+\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}/2},$$

对所有 $r \in (0, 1]$ 成立。

证明。修正 $r \in (0, 1/2)$, 使用 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 2.6, 我们得到以下不等式链:

$$\begin{aligned}
|u(r) - u(r/2)| &= \left| \int_{r/2}^r u_r(t) dt \right| \leq \int_{r/2}^r |u_r(t)| dt \leq \left(\int_{r/2}^r u_r^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{r/2}^r dt \right)^{1/2} \\
&\leq K_{\alpha, N} \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})} r^{\frac{3-N+\alpha+\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}} \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K'_{\alpha, N} \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}^2 r^{\frac{4-N+\alpha+\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}}. \quad \square
\end{aligned}$$

定理 2.1 的证明。遵循 [17] 的推理, 设 $r \in (0, 1]$, 存在 $r_1 \in (1/2, 1]$ 使得对于某个 $m \in \mathbb{N}$ 有 $r = r_1/2^{m-1}$ 。由一维的 Sobolev 嵌入定理可知 $u(r_1) \leq \|u\|_{L^\infty(B_1 \setminus B_{1/2})} \leq \mathfrak{s}_N \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}$ 。因此

$$\begin{aligned}
|u(r)| &\leq |u(r_1) - u(r)| + |u(r_1)| \leq \sum_{k=1}^{m-1} \left| u\left(\frac{r_1}{2^{k-1}}\right) - u\left(\frac{r_1}{2^k}\right) \right| + |u(r_1)| \\
&\leq K'_{\alpha, N} \|\nabla u\|_{L^2(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{r_1}{2^{k-1}}\right)^{2-\frac{N}{2}+\frac{\alpha+\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}} + \mathfrak{s}_N \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})} \\
&\leq \left(K''_{\alpha, N} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{r_1}{2^{k-1}}\right)^{2-\frac{N}{2}+\frac{\alpha+\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}} + \mathfrak{s}_N \right) \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

• 若 $2 \leq N < 10 + 4\alpha$, 我们有 $2 - N/2 + \alpha/2 + \sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}/2 > 0$ 。则

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{r_1}{2^{i-1}}\right)^{2-\frac{N}{2}+\alpha/2+\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}/2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{i-1}}\right)^{2-\frac{N}{2}+\alpha/2+\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}/2},$$

是一个收敛级数。因此, 方程 (2.7) 暗示了定理的陈述 i)。

• 若 $N = 10 + 4\alpha$, 我们有 $2 - N/2 + \alpha/2 + \sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}/2 = 0$ 。从 (2.7) 我们得到

$$\begin{aligned}
|u(r)| &\leq (K'_{\alpha, N}(m-1) + \mathfrak{s}_N) \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})} \\
&= \left(K'_{\alpha, N} \left(\frac{\log r_1 - \log r}{\log 2} \right) + \mathfrak{s}_N \right) \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})} \\
&\leq \left(\frac{K'_{\alpha, N}}{\log 2} + \mathfrak{s}_N \right) (|\log r| + 1) \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})},
\end{aligned}$$

这证明了陈述 ii)。

• 最后, 如果 $N > 10 + 4\alpha$, 我们有 $2 - N/2 + \alpha/2 + \sqrt{(2 + \alpha)(2N - 2 + \alpha)}/2 < 0$ 。那么

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{r_1}{2^{i-1}} \right)^{2 - \frac{N}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}} = \frac{r^{2 - \frac{N}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}} - r_1^{2 - \frac{N}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}}}{(1/2)^{2 - \frac{N}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}} - 1}.$$

由此及 (2.7), 我们可以推导出

$$|u(r)| \leq \left(\frac{K'_{\alpha, N}}{(1/2)^{2 - \frac{N}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}} - 1} + \mathfrak{s}_N \right) r^{2 - \frac{N}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(2+\alpha)(2N-2+\alpha)}}{2}} \|u\|_{H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})},$$

这完成了证明。 $\square$

3. 定理的最优性 2.1

这些先验估计确实是最佳的, 如下例所示:

- 如果 $N = 10 + 4\alpha$, 则函数 $u(x) = |\log |x||$ 是 Hénon-Gelfand 方程

$$-\Delta u = (N - 2)|x|^\alpha e^{u(2+\alpha)} \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\},$$

的一个解, 使得 $|x|^\alpha f'(u) = \frac{(N-2)^2}{4|x|^2}$ 。这表明稳定性不等式 (1.2) 精确达到最优 Hardy 常数, 因此它是一个稳定解。

- 若 $N > 10 + 4\alpha$, 回想我们有对于任意 $\alpha > -2$, $\gamma(\alpha, N) < 0$ 。我们考虑任意

$$\gamma(\alpha, N) \leq \gamma < 0, \tag{3.1}$$

的函数 $u(|x|) = |x|^\gamma - 1$, 它是幂型方程

$$-\Delta u = |x|^\alpha (-\gamma)(\gamma + N - 2)(1 + u)^{1 + \frac{2+\alpha}{-\gamma}} \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\}.$$

的解。在这种情况下

$$|x|^\alpha f'(u) = \frac{(-\gamma + \alpha + 2)(\gamma + N - 2)}{|x|^2}. \tag{3.2}$$

考虑到 (3.1), (3.2) 并再次比较稳定性不等式 (1.2) 与哈代不等式, 常数满足:

$$(-\gamma + \alpha + 2)(\gamma + N - 2) \leq \frac{(N - 2)^2}{4},$$

这表明 u 的稳定性。

REFERENCES

- [1] H. Brezis and J. L. Vázquez, *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, **10** (1997), no. 2, pp. 443–469. 3, 6
- [2] L. A. Caffarelli, B. Gidas, and J. Spruck, *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), no. 3, 271–297. 2
- [3] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover Publications, New York, 1957. 2
- [4] W. Dai and S. Peng, *Liouville theorems of solutions to mixed order Hénon-Hardy type system with exponential nonlinearity*, Adv. Nonlinear Stud. **24** (2024), no. 2, 335–358. 3
- [5] E. N. Dancer, Y. Du, and Z. Guo, *Finite Morse index solutions of an elliptic equation with supercritical exponent*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 8, 3281–3310. 2
- [6] J. Dávila, L. Dupaigne, and A. Farina, *Partial regularity of finite Morse index solutions to the Lane-Emden equation*, J. Funct. Anal. **261** (2011), no. 1, 218–232. 2
- [7] A. T. Duong, *Liouville type theorems for fractional elliptic systems with coupled terms*, Math. Inequal. Appl. **27** (2024), no. 2, 261–272. 3
- [8] L. Dupaigne, J. Dávila, and J. Wei, *On the fractional Lane-Emden equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 9, 8377 – 8424. 3
- [9] A. Farina, *On the classification of solutions of the Lane-Emden equation on unbounded domains of $\mathbb{R}^N$* , J. Math. Pures Appl. **87** (2007), no. 5, 537–561. 2
- [10] M. Fazly, Y. Hu, and W. Yang, *On stable and finite Morse index solutions of the nonlocal Hénon – Gelfand – Liouville equation*, Calc. Var. Partial Differential Equations **60** (2021), no. 11. 3
- [11] B. Gidas and J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **6** (1981), no. 8, 883–901. 2
- [12] S. Hasegawa, N. Ikoma, and T. Kawakami, *On weak solutions to a fractional Hardy – Hénon equation: Part I: Nonexistence*, Commun. Pure Appl. Anal. **20** (2021), no. 4, 1559-1600. 3
- [13] S. Hasegawa, N. Ikoma, and T. Kawakami, *On weak solutions to a fractional Hardy – Hénon equation, Part II: Existence*, Nonlinear Anal. **227** (2023), 113-165. 3

- [14] A. Hyder and W. Yang, *Partial regularity of stable solutions to the fractional Gel'fand – Liouville equation*, Adv. Nonlinear Anal. **10** (2021), no. 1, 1316–1327. 3
- [15] S. Kim and Y. Lee, *Finite Morse Index Solutions of the Fractional Henon–Lane–Emden Equation with Hardy Potential*, Taiwanese J. Math. **26** (2022), no. 2, 251–283. 3
- [16] P. Poláčik, P. Quittner, and P. Souplet, *Singularity and decay estimates in super-linear problems via Liouville-type theorems. I. Elliptic equations and systems*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 3, 555–579. 2
- [17] S. Villegas, *Sharp estimates for semi-stable radial solutions of semilinear elliptic problems*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 3394 – 3408. 9
- [18] C. Wang and D. Ye, *Some Liouville theorems for Hénon type elliptic equations*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no. 4, 1705–1727. 3

J. SILVERIO MARTÍNEZ-BAENA¹ — DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE GRANADA, 18071 GRANADA, SPAIN.

Email address: jsilverio@ugr.es

SALVADOR VILLEGAS² — DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE GRANADA, 18071 GRANADA, SPAIN.

Email address: svillega@ugr.es