关于布朗交错的可视窗口、泊松圆柱和布尔模型

YINGXIN MU AND ARTEM SAPOZHNIKOV

摘要. 我们研究在 $\mathbb{R}^d$ 中三种模型的空隙集内的可见性，这些模型具有空间相关性的缓慢衰减：布朗互连、泊松圆柱和泊松-布尔模型。设 Q_x 为每个点都从 通过其中一种模型的空隙集可见的最大球的半径 x。我们证明，在条件 x 可以从 可见的情况下，随着 $x \to \infty$，$Q_x \delta_{\|x\|}$ 弱收敛到一个具有明确强度的指数分布，该强度依赖于相应模型的参数。缩放函数 δ_r 是引入的可见窗口 [9]，在距离 为 r 处可见集合的相关长度尺度。

1. 介绍

令 $\mathcal{C}$ 是一个具有旋转不变分布的随机闭子集 $\mathbb{R}^d$。我们将集合 $\mathcal{C}$ 视作一个非透明障碍物的随机场，并且说如果线段 $[0,x]$ 不与 $\mathcal{C}$ 相交，则点 $x \in \mathbb{R}^d$ 是从 0 的可见的。关于可见性的第一个数学研究可以追溯到 Pólya[10]。在由泊松布尔模型给出障碍物的情况下，对远距离可见性的概率进行了研究，在 [4] 中进行了讨论；而在由布朗交错给出障碍物的情况下，则在 [5] 中进行了研究。当障碍物是由布朗交错、泊松圆柱或泊松布尔模型给出时，在 [9] 中得到了远距离可见性概率的精确界限。在双曲空间的设置下，可见性问题在 [2, 13, 3] 中进行了探讨。

在本文中，我们继续研究布朗交错、泊松圆柱和泊松-布尔模型的空虚集中的可见性问题，在 [9] 中。在 [9] 中，我们引入了可见窗口 δ_r ，这是距离 0 为 r 处可见集合的相关长度尺度，并计算了这三个障碍模型中的该值：

- (布朗粒子交错)

$$\delta_r = \delta_{\mathrm{BI}}(r) = \begin{cases} r^{-1} & d \geq 4 \\ r^{-1}\log^2 r & d = 3 \end{cases}$$

- （泊松圆柱）

$$\delta_r = \delta_{\mathrm{PC}}(r) = \begin{cases} r^{-1} & d \geq 3 \\ 1 & d = 2 \end{cases}$$

- (泊松-布尔模型)

$$\delta_r = \delta_{\mathrm{BM}}(r) = r^{-1}.$$

在这里，我们研究这三种模型中可视窗口的另一个方面。令 Q_x 为以 x 为中心的最大的球体的半径，该球体内每一点都能从 0 处看到，

$$Q_x = \inf\{q > 0 \,:\, \text{every } y \in B(x,q) \text{ is visible from } 0\}. \tag{1.1}$$

本文的主要结果是，对于这三个模型中的每一个，在条件上 x 能从 0 处看到的情况下，$Q_x/\delta_{\|x\|}$ 当 $x \to \infty$ 时弱收敛于强度为 $\lambda > 0$ 的指数分布，该分布显式依赖于相应模型的参数。

我们现在简要描述这三个模型，并参考论文 [12, 14] 和 [7] 中关于泊松点过程的精确描述。实际上，为了本文的目的，我们只需要通过函数[1]来刻画它们的定律

$$T(K) = \mathsf{P}[\mathcal{C} \cap K \neq \emptyset], \quad \text{for compact } K \subset \mathbb{R}^d.$$

布朗交错：对于 $\alpha > 0$，令 $\mathcal{I}^\alpha$ 是在 $\mathbb{R}^d$（$d \geq 3$）中具有强度 α 的双无穷布朗运动的泊松汤的范围。它是一个随机闭子集，记为 $\mathbb{R}^d$，其规律由关系式

$$\mathsf{P}\big[\mathcal{I}^\alpha \cap K = \emptyset\big] = e^{-\alpha \mathrm{cap}(K)}, \quad \text{for compact } K \subset \mathbb{R}^d, \tag{1.2}$$

（参见 [12, Proposition 2.5]）所刻画，其中 $\mathrm{cap}(K)$ 是 K 的牛顿容量，详见 (2.3)。布朗交错集在水平 α 上具有半径 ρ 是闭的 ρ-邻域的 $\mathcal{I}^\alpha$，

$$\mathcal{I}^\alpha_\rho = \bigcup_{x \in \mathcal{I}^\alpha} B(x, \rho). \tag{1.3}$$

泊松圆柱体：对于 $\alpha > 0$，设 $\mathcal{L}^\alpha$ 是在 $\mathbb{R}^d$（$d \geq 2$）中具有强度 α 的泊松线汤的范围。为了描述 $\mathcal{L}^\alpha$ 的规律，设 ν 是拓扑群 SO_d 上唯一的哈尔测度，该拓扑群是由 $\mathbb{R}^d$ 中的刚性旋转组成的，并且具有 $\nu(SO_d) = 1$，记 π 为超平面 $\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 = 0\}$ 上的正交投影。由 [14, (2.8)] 可知，随机闭集 $\mathcal{L}^\alpha$ 的分布由以下关系刻画

$$\mathsf{P}\big[\mathcal{L}^\alpha \cap K = \emptyset\big] = e^{-\alpha \mu(K)}, \quad \text{for compact } K \subset \mathbb{R}^d, \tag{1.4}$$

其中

$$\mu(K) = \int_{SO_d} \lambda_{d-1}\big(\pi(\phi(K))\big)\, \nu(d\phi). \tag{1.5}$$

泊松圆柱模型在级别 α 下，半径为 ρ 是 $\mathcal{L}^\alpha$ 的闭 ρ 邻域，

$$\mathcal{L}^\alpha_\rho = \bigcup_{x \in \mathcal{L}^\alpha} B(x, \rho). \tag{1.6}$$

泊松-布尔模型：对于 $\alpha > 0$ 和一个在 $\mathbb{R}_+$ 上的概率分布 Q，令 $\omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(x_i, r_i)}$ 是一个在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ (d \geq 2)$ 上具有强度测度 $\alpha dx \otimes \mathsf{Q}$ 的泊松点过程。*Poisson*-布尔模型，强度为 α，半径分布为 Q 是 $\mathbb{R}^d$ 的闭子集，定义为

$$\mathcal{B}^\alpha_{\mathsf{Q}} = \mathcal{B}^\alpha_{\mathsf{Q}}(\omega) = \bigcup_{i \geq 1} B(x_i, r_i).$$

这个集合与 $\mathbb{R}^d$ 不一致当且仅当

$$\mathsf{E}[\varrho^d] < \infty, \tag{1.7}$$

[1]关于此主题的更多内容，我们参考 [6, Chapter 2]。

其中 ϱ 是具有分布律 Q 的随机变量（见 [7, Proposition 3.1]）。与紧集 K 相交的球的数量是一个参数为

$$\int_{(x,r)\,:\,B(x,r)\cap K\neq\emptyset} \alpha dx \otimes \mathsf{Q}(dr) = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{P}\big[\varrho \geq d(x,K)\big]\,dx = \alpha\,\mathsf{E}\big[\lambda_d\big(B(K,\varrho)\big)\big],$$

的泊松随机变量，其中 $B(K,\varrho)$ 是 K 的闭 ϱ 邻域；特别地，$\mathcal{B}^\alpha_{\mathsf{Q}}$ 的分布由关系

$$\mathsf{P}\big[\mathcal{B}^\alpha_{\mathsf{Q}} \cap K = \emptyset\big] = e^{-\alpha\,\mathsf{E}[\lambda_d(B(K,\varrho))]}, \quad \text{for compact } K \subset \mathbb{R}^d. \tag{1.8}$$

所刻画。

我们现在精确地陈述我们的主要结果。

定理 1.1. 设 $\alpha > 0$ 和 $\rho > 0$，设 Q 是 $\mathbb{R}_+$ 上的概率测度。令 $\mathcal{C}$ 为以水平 α 和半径 ρ（$d \geq 3$）的布朗交错，或以水平 α 和半径 ρ（$d \geq 2$）的泊松圆柱，或是强度为 α 且半径分布为 Q（$d \geq 2$）满足 (1.7) 的泊松-布尔模型。存在依赖于模型及其参数的 $\lambda > 0$，使得在 x 可以从 0 看到的条件下，

$$\frac{Q_x}{\delta_{\|x\|}} \textit{ converges weakly to the exponential distribution with intensity } \lambda\ ,$$

作为 $x \to \infty$，其中 δ_r 是模型各自的可见窗口。参数 λ 对每个模型都是明确的，参见 (2.6)，(3.1) 和 (4.1)。

我们分别对三个模型证明定理 1.1：在第 2 节中对于布朗交错，第 3 节中的泊松-布尔模型以及第 4 节中的泊松圆柱。

我们通过固定一些在整个证明过程中使用的常见符号来结束这个介绍。令 $x \in \mathbb{R}^d$，$q > 0$ 和 $K \subset \mathbb{R}^d$。我们将 $B(x,q)$ 表示为以 x 为中心，半径为 q 的闭欧几里得球，并记作 $B(q) = B(0,q)$。我们用 $B(K,q)$ 表示 K 的闭 q 邻域，即 $B(K,q) = \bigcup_{x\in K} B(x,q)$。我们用 ℓ_x 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的线段 $[0,x]$，并定义 $\ell_x(q) = B(\ell_x,q)$。此外，对于 $\epsilon > 0$，我们定义

$$\ell^\epsilon_x = \bigcup_{y\in B(x,\epsilon)} \ell_y \quad \text{and} \quad \ell^\epsilon_x(q) = B(\ell^\epsilon_x,q) = \bigcup_{y\in B(x,\epsilon)} \ell_y(q). \tag{1.9}$$

最后，记 λ_n 为 n 维勒贝格测度，并且记 κ_n 为单位球在 $\mathbb{R}^n$ 中的体积（回忆一下 $\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$）。

2. 定理 1.1 的证明对于布朗交错过程

我们从关于布朗运动和容量的一些预备知识开始，以及证明定理 1.1 的两个关键要素—关于长圆柱体容量精确渐近性的引理 2.1 和关于布朗运动未击中长圆柱体的尖锐概率边界的引理 2.2。定理 1.1 的证明在第 2.2 节给出。

2.1. **布朗运动和位势理论.** 设 W 是 $\mathbb{R}^d$ 中的布朗运动。我们用 P_x 表示 W 在 $W_0 = x$ 下的分布，并且我们将 P_ν 写为 $\int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{P}_x[\cdot]\nu(dx)$。对于闭集 $K \subset \mathbb{R}^d$，令 $H_K = \inf\{t \geq 0 : W_t \in K\}$ 为 W 进入 K 的首次到达时间。经典地，对于任意的 $R_1 < R_2$ 和 $y \in \mathbb{R}^d$ 满足 $R_1 < \|y\| < R_2$，

$$\mathsf{P}_y\big[H_{\partial B(R_2)} < H_{\partial B(R_1)}\big] = \begin{cases} \frac{\log R_1 - \log\|y\|}{\log R_1 - \log R_2} & d = 2 \\ \frac{R_1^{2-d} - \|y\|^{2-d}}{R_1^{2-d} - R_2^{2-d}} & d \geq 3 \end{cases} \tag{2.1}$$

（参见例如 [8, Theorem 3.18]），特别是当 $d \geq 3$ 时，

$$\mathsf{P}_y\big[H_{\partial B(R_1)} = \infty\big] = 1 - \frac{\|y\|^{2-d}}{R_1^{2-d}}\,. \tag{2.2}$$

令 σ_R 为在 $\partial B(R)$ 上的均匀分布，并定义 $\mu_R = \frac{2\pi^{d/2}R^{d-2}}{\Gamma(d/2-1)}\sigma_R$。对于任何紧集 K 在 $\mathbb{R}^d(d \geq 3)$ 中，以及任何 R 满足 $K \subset B(R)$，平衡测度 μ_K 和容量 $\mathrm{cap}(K)$ 由 K 定义为（见 [11, Theorem 3.1.10]）

$$\mu_K = \mathsf{P}_{\mu_R}\big[H_K < \infty, W_{H_K} \in \cdot\big] \quad \text{resp.} \quad \mathrm{cap}(K) = \mu_K(K) = \mathsf{P}_{\mu_R}\big[H_K < \infty\big]. \tag{2.3}$$

因此，根据强马尔可夫性质，对于任何紧集 $K' \subseteq K$，

$$\mu_{K'} = \mathsf{P}_{\mu_K}\big[H_{K'} < \infty, W_{H_{K'}} \in \cdot\big] \quad \text{and} \quad \mathrm{cap}(K') = \mathsf{P}_{\mu_K}\big[H_{K'} < \infty\big]; \tag{2.4}$$

特别是，$\mu_K(K') \leq \mathrm{cap}(K')$。容量是等距下的不变量，并且在紧集上是单调函数，$\mathrm{cap}(\rho K) = \rho^{d-2}\mathrm{cap}(K)$ 和 $\mathrm{cap}(K) = \mathrm{cap}(\partial K)$（见 [11, Proposition 3.1.11]）。

由 [11, Proposition 3.3.4]，存在 $c_i = c_i(d,\rho)$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 且 $\|x\| \geq 2$，圆柱的容量 $\ell_x(\rho)$ 满足

$$c_1\Big(\mathbb{1}_{d=3}\frac{\|x\|}{\log\|x\|} + \mathbb{1}_{d\geq 4}\|x\|\Big) \leq \mathrm{cap}\big(\ell_x(\rho)\big) \leq c_2\Big(\mathbb{1}_{d=3}\frac{\|x\|}{\log\|x\|} + \mathbb{1}_{d\geq 4}\|x\|\Big). \tag{2.5}$$

在下一个引理中，我们得到了圆柱体 $\ell_x(\rho)$ 容量的确切渐近性。

引理 2.1. 对于任何 $d \geq 3$，

$$\mathrm{cap}\big(\ell_x(\rho)\big) = \varkappa_d \rho^{d-3}\Big(\mathbb{1}_{d=3}\frac{\|x\|}{\log\|x\|} + \mathbb{1}_{d\geq 4}\|x\|\Big)(1+o(1)), \quad as\ x \to \infty,$$

其中 $\varkappa_3 = \pi$ 和 $\varkappa_d = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-3}{2})}$ 用于 $d \geq 4$。

证明. 由于 $\mathrm{cap}\big(\ell_x(\rho)\big) = \rho^{d-2}\mathrm{cap}\big(\ell_{\rho^{-1}\|x\|e_1}(1)\big)$，只需证明引理对 $x = re_1$ 和 $\rho = 1$ 成立。令 $K_r = \ell_{re_1}(1)$ 和 $k_r = \ell_{re_1}$。令 $r \geq 2$。

由 [11, Theorem 3.2.1] 可知，对于每一个 $y \in k_r$，

$$1 = \int_{\partial K_r} G(y,z)\mu_{K_r}(dz),$$

其中 G 是标准布朗运动的格林函数，

$$G(y,z)=\gamma_d\|y-z\|^{2-d},\quad \text{with } \gamma_d=\frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{2\pi^{d/2}}$$

（参见例如 [11, (3.1)]）。对段落 k_r 进行积分给出

$$r=\gamma_d\int_{\partial K_r}\mu_{K_r}(dz)\int_{k_r}\|y-z\|^{2-d}dy.$$

令 $K_r'=\left\{z\in K_r: z_1\in\left[\frac{r}{\log r}, r-\frac{r}{\log r}\right]\right\}$ 和 $K_r''=K_r\setminus K_r'$。注意
存在

- 存在 $C=C(d)$ 使得对于所有的 $z\in\partial K_r$，

$$\int_{k_r}\|y-z\|^{2-d}dy\le C\big(\mathbb{1}_{d=3}\log r+\mathbb{1}_{d\ge4}\big);$$

- 在 $z\in\partial K_r\cap K_r'$ 上一致，

$$\begin{aligned}\int_{k_r}\|y-z\|^{2-d}dy &= \int_0^{z_1}(1+u^2)^{\frac{2-d}{2}}du+\int_0^{r-z_1}(1+u^2)^{\frac{2-d}{2}}du\\ &= 2(1+o(1))\Big(\mathbb{1}_{d=3}\log r+\mathbb{1}_{d\ge4}\int_0^\infty(1+u^2)^{\frac{2-d}{2}}du\Big)\\ &= 2\beta_d(1+o(1))\big(\mathbb{1}_{d=3}\log r+\mathbb{1}_{d\ge4}\big),\end{aligned}$$

  其中 $\beta_3=1$ 和 $\beta_d=\frac{1}{2}\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{d-3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d-3}{2})}{2\Gamma(\frac{d-2}{2})}$ 对于 $d\ge4$ 成立，参见 [1, 6.2.1]；

- 由 (2.5)，存在 $C'=C'(d)$ 使得

$$\mu_{K_r}(\partial K_r\cap K_r'')\le \mathrm{cap}(K_r'')\le C'\big(\mathbb{1}_{d=3}\tfrac{r}{\log^2 r}+\mathbb{1}_{d\ge4}\tfrac{r}{\log r}\big).$$

因此

$$r=2\beta_d\gamma_d(1+o(1))\big(\mathbb{1}_{d=3}\log r+\mathbb{1}_{d\ge4}\big)\mathrm{cap}(K_r)+o(r),$$

作为 $r\to\infty$，结果随之而来 $\varkappa_d=(2\beta_d\gamma_d)^{-1}$。 □

在下一个引理中，我们得到了圆柱非命中概率的精确界限。对于 $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$，令 $\widetilde{x}=(x_2,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^{d-1}$。

引理 2.2. 令 $d\ge3$ 和 $\rho>0$。对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $r_0=r_0(d,\rho,\varepsilon)<\infty$ 和 $\delta_0=\delta_0(d,\rho,\varepsilon)\in(0,1)$，使得对于所有的 $r\ge r_0$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$ 满足 $x_1\in\left[\frac{r}{\log^2 r}, r-\frac{r}{\log^2 r}\right]$ 和 $\rho<\|\widetilde{x}\|<\rho+\delta_0$，

$$1-\varepsilon\le\frac{\mathsf{P}_x\big[H_{\ell_{re_1}(\rho)}=\infty\big]}{\frac{\|\widetilde{x}\|-\rho}{\rho}\big(\mathbb{1}_{d=3}\frac{1}{\log r}+\mathbb{1}_{d\ge4}(d-3)\big)}\le1+\varepsilon.$$

证明. 令 $\varepsilon > 0$. 令 r 足够大，并选择 x 如引理所述。对于 $s > 0$，设 $L(s) = B(\mathbb{R}e_1, s)$ 是一个半径为 s 且轴向量为 e_1 的双无穷柱体。

我们从下界开始。由强马尔可夫性质，

$$\mathsf{P}_x\big[H_{\ell_{re_1}(\rho)} = \infty\big] \ge \mathsf{P}_x\big[H_{\partial L(r\log r)} < H_{L(\rho)}\big] \inf_{y\in\partial L(r\log r)} \mathsf{P}_y\big[H_{\ell_{re_1}(\rho)} = \infty\big].$$

注意，布朗运动 W 在超平面 $\{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = 0\}$ 上的正交投影是一个标准的 $(d-1)$ 维布朗运动，并且圆柱体 $L(s)$ 在超平面上的投影是半径为 s 的 $(d-1)$ 维欧几里得球。因此，由 (2.1) 可知，如果 r 足够大且 $\|\widetilde{x}\| - \rho$ 足够小，则

$$\mathsf{P}_x\big[H_{\partial L(r\log r)} < H_{L(\rho)}\big] \ge (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\tfrac{\|\widetilde{x}\|-\rho}{\rho}\big(\mathbb{1}_{d=3}\tfrac{1}{\log r} + \mathbb{1}_{d\ge4}(d-3)\big).$$

此外，由 (2.2) 可知，如果 r 足够大，则

$$\inf_{y\in\partial L(r\log r)} \mathsf{P}_y\big[H_{\ell_{re_1}(\rho)} = \infty\big] \ge \inf_{y\in\partial L(r\log r)} \mathsf{P}_y\big[H_{B(r+\rho)} = \infty\big] \ge 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

将这两个界限结合在一起给出了所需的下界。

我们继续进行上界的计算。令 $s_r = \frac{r}{\log^4 r}$。我们有

$$\mathsf{P}_x\big[H_{\ell_{re_1}(\rho)} = \infty\big] \le \mathsf{P}_x\big[H_{\partial L(s_r)} < H_{L(\rho)}\big] + \mathsf{P}_x\big[H_{\ell_{re_1}(\rho)} = \infty, H_{\partial L(s_r)} > H_{L(\rho)}\big].$$

正如在下界证明中，根据 (2.1)，如果 r 足够大且 $\|\widetilde{x}\| - \rho$ 足够小，则

$$\mathsf{P}_x\big[H_{L(s_r)} < H_{L(\rho)}\big] \le (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon)\tfrac{\|\widetilde{x}\|-\rho}{\rho}\big(\mathbb{1}_{d=3}\tfrac{1}{\log r} + \mathbb{1}_{d\ge4}(d-3)\big).$$

为了限制第二个概率，注意到布朗运动的旋转对称性和 (2.2)，对于任意的 $y \in L(s_r)$，从 y 开始的布朗运动在击中 $B(y_1e_1,\rho)$ 或 $\partial L(s_r)$ 之前离开球 $B(y_1e_1, 2s_r)$ 的概率上限为 $\min\big(C\frac{(\|\widetilde{y}\|-\rho)_+}{\rho}, 1-c\big)$，对于某些 $C = C(d) < \infty$ 和 $c = c(d) \in (0,1)$。如果第二个概率中的事件发生，由于 $x_1 \in [s_r\log^2 r, r - s_r\log^2 r]$，从 x 开始的布朗运动将在触及 $B(x_1e_1,\rho)$ 或 $\partial L(s_r)$ 之前离开球 $B(x_1e_1, s_r\log^2 r)$。因此，通过从球体 $B(x_1e_1, 2s_rk)$,$1 \le k \le \frac{1}{2}\log^2 r - 1$ 和

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_x\big[H_{\ell_{re_1}(\rho)} = \infty, H_{\partial L(s_r)} > H_{L(\rho)}\big] &\le C'\tfrac{\|\widetilde{x}\|-\rho}{\rho}(1-c)^{\frac{1}{2}\log^2 r}\\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon\tfrac{\|\widetilde{x}\|-\rho}{\rho}\big(\mathbb{1}_{d=3}\tfrac{1}{\log r} + \mathbb{1}_{d\ge4}(d-3)\big),\end{aligned}$$

退出时间的强马尔可夫性质，对于上述的一些 $C' = C'(d) < \infty$ 和 $c \in (0,1)$。将这些界组合起来给出了所需的上界。 □

2.2. **定理 1.1 的证明.** 固定正数 α 和 ρ，并记 $\mathsf{P}_{\alpha,\rho}$ 为水平 α 下具有半径 ρ 的布朗交错的律。回忆一下，对于 $d=3$ 的 $\delta_r=\frac{\log^2 r}{r}$ 和对于 $d\geq 4$ 的 $\delta_r=\frac{1}{r}$。我们旨在证明对于每一个 $s>0$,

$$\lim_{r\to\infty}\mathsf{P}_{\alpha,\rho}\big[Q_{re_1}>s\delta_r\,|\,re_1 \text{ is visible from } 0\big]=\exp\big(-\lambda_{\mathrm{BI}}s\big)$$

其中

$$\lambda_{\mathrm{BI}}=\frac{1}{2}\alpha\varkappa_d\rho^{d-4}\big(\mathbb{1}_{d=3}+\mathbb{1}_{d\geq 4}(d-3)\big)=\begin{cases}\frac{\alpha\pi}{2\rho} & d=3\\ \frac{\alpha\rho^{d-4}\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-3}{2})} & d\geq 4\end{cases}\tag{2.6}$$

而 $\varkappa_d$ 是来自引理 2.1 的常数。

根据 (1.1) 的定义，Q_{re_1},(1.2),(1.3) 和 (1.9),

$$\mathsf{P}_{\alpha,\rho}\big[Q_{re_1}>s\delta_r\,|\,re_1 \text{ is visible from } 0\big]=\frac{\mathsf{P}_{\alpha,\rho}[\text{every } x\in B(re_1,s\delta_r) \text{ is visible from } 0]}{\mathsf{P}_{\alpha,\rho}[re_1 \text{ is visible from } 0]}$$
$$=\frac{\mathsf{P}[\mathcal{I}^\alpha_\rho\cap\ell^{s\delta_r}_{re_1}=\emptyset]}{\mathsf{P}[\mathcal{I}^\alpha_\rho\cap\ell_{re_1}=\emptyset]}=\frac{\mathsf{P}[\mathcal{I}^\alpha\cap\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)=\emptyset]}{\mathsf{P}[\mathcal{I}^\alpha\cap\ell_{re_1}(\rho)=\emptyset]}=\exp\big(-\alpha\big[\mathrm{cap}\big(\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)\big)-\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}(\rho)\big)\big]\big).$$

因此，只需证明

$$\lim_{r\to\infty}\big[\mathrm{cap}\big(\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)\big)-\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}(\rho)\big)\big]=\frac{\lambda_{\mathrm{BI}}}{\alpha}s.$$

我们将 μ_r 分别记为 $\ell_{re_1}(\rho)$ 的平衡测度，将 μ^s_r 记为 $\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)$ 的平衡测度。由 (2.4)，由于 $\ell_{re_1}(\rho)\subset\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)$,

$$\mathrm{cap}\big(\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)\big)-\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}(\rho)\big)=\int_{\partial\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)}\mathsf{P}_x[H_{\ell_{re_1}(\rho)}=\infty]\,\mu^s_r(dx).$$

令

$$\partial'=\big\{x\in\partial\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)\,:\,\tfrac{r}{\log^2 r}\leq x_1\leq r-\tfrac{r}{\log^2 r}\big\}\quad\text{and}\quad\partial''=\partial\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)\setminus\partial'.$$

由于每个 $x\in\partial\ell^{s\delta_r}_{re_1}(\rho)$ 到一个包含于 $\ell_{re_1}(\rho)$ 的半径为 ρ 的球 B_x 的距离至多为 $s\delta_r$，根据 (2.2),

$$\int_{\partial''}\mathsf{P}_x[H_{\ell_{re_1}(\rho)}=\infty]\,\mu^s_r(dx)\leq\int_{\partial''}\mathsf{P}_x[H_{B_x}=\infty]\,\mu^s_r(dx)\leq Cs\delta_r\,\mu^s_r(\partial'')\leq Cs\delta_r\,\mathrm{cap}(\partial''),$$

对于某个 $C=C(d,\rho)$。由 (2.5)，$\delta_r\,\mathrm{cap}(\partial'')\to 0$ 作为 $r\to\infty$。因此，只需证明

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\partial'}\mathsf{P}_x[H_{\ell_{re_1}(\rho)}=\infty]\,\mu^s_r(dx)=\frac{\lambda_{\mathrm{BI}}}{\alpha}s.$$

由引理 2.2，由于对每个 $x\in\partial'$,$\|\widetilde{x}\|\leq\rho+s\delta_r$ 对所有大的 r,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\int_{\partial'}\mathsf{P}_x[H_{\ell_{re_1}(\rho)}=\infty]\,\mu^s_r(dx)&=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\rho}\big(\mathbb{1}_{d=3}\tfrac{1}{\log r}+\mathbb{1}_{d\geq 4}(d-3)\big)\int_{\partial'}\big(\|\widetilde{x}\|-\rho\big)\,\mu^s_r(dx)\\&=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\rho}\big(\mathbb{1}_{d=3}\tfrac{1}{\log r}+\mathbb{1}_{d\geq 4}(d-3)\big)\int_{\partial'}\big(\frac{s\delta_r}{r}x_1\big)\,\mu^s_r(dx).\end{aligned}$$

现在,

$$\int_{\partial'} x_1\, \mu_r^s(dx) = \int_{\partial'} \Big(\int_0^{x_1} dy \Big)\, \mu_r^s(dx) = \int_0^r \mu_r^s\big(x \in \partial' : x_1 > y\big)dy.$$

因此,

$$\frac{\delta_r}{r}\Big| \int_{\partial'} x_1\, \mu_r^s(dx) - \int_0^r \mu_r^s\big(x \in \ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho) : x_1 > y\big)dy\Big| \le \frac{\delta_r}{r} r\mathrm{cap}(\partial'') \to 0, \quad \text{as } r \to \infty,$$

并且只需证明

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\delta_r}{r}\big(\mathbb{1}_{d=3}\tfrac{1}{\log r} + \mathbb{1}_{d\ge4}(d-3)\big)\int_0^r \mu_r^s\big(x \in \ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho) : x_1 > y\big)dy = \frac{\lambda_{\mathrm{BI}}\rho}{\alpha}.$$

注意到通过 μ_r 的对称性,

$$\int_0^r \mu_r\big(x \in \ell_{re_1}(\rho)\,:\, x_1 > y\big)dy = \int_0^r \mu_r\big(x \in \ell_{re_1}(\rho)\,:\, x_1 < y\big)dy = \frac{r}{2}\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}(\rho)\big),$$

并通过引理 2.1 和 δ_r 的定义,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\delta_r}{r}\big(\mathbb{1}_{d=3}\tfrac{1}{\log r} + \mathbb{1}_{d\ge4}(d-3)\big)\,\frac{r}{2}\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}(\rho)\big) = \frac{1}{2}\varkappa_d\rho^{d-3}\big(\mathbb{1}_{d=3} + \mathbb{1}_{d\ge4}(d-3)\big) = \frac{\lambda_{\mathrm{BI}}\rho}{\alpha}.$$

因此，要完成证明，只需显示

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\delta_r}{r}\int_0^r \Big(\mu_r^s\big(x \in \ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho) : x_1 > y\big) - \mu_r\big(x \in \ell_{re_1}(\rho) : x_1 > y\big)\Big)dy = 0. \tag{2.7}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^r \Big(\mu_r^s\big(x \in \ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho) : x_1 > y\big) - \mu_r\big(x \in \ell_{re_1}(\rho) : x_1 > y\big)\Big)dy\\ &\le 2\rho\,\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)\big) + \int_0^{r-2\rho} \Big(\mu_r^s\big(x \in \ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho) : x_1 > y+2\rho\big) - \mu_r\big(x \in \ell_{re_1}(\rho) : x_1 > y\big)\Big)dy.\end{aligned}$$

由平衡测度的定义 (2.4),

$$\begin{aligned}&\mu_r^s\big(x \in \ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho) : x_1 > y+2\rho\big) - \mu_r\big(x \in \ell_{re_1}(\rho) : x_1 > y\big)\\ &\qquad\le \int_{\partial\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)} \mathbb{1}_{x_1>y+2\rho}\,\mathsf{P}_x\big[H_{\ell_{re_1}(\rho)} < \infty, (W_{H_{\ell_{re_1}(\rho)}})_1 \le y\big]\,\mu_r^s(dx).\end{aligned}$$

注意到对于每个 $x \in \partial\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)$ 与 $x_1 > y+2\rho$，存在一个半径为 ρ 的球 $B_x \subset \ell_{re_1}(\rho)$ 在距离 x 至多 $s\delta_r$ 处，使得如果从 x 开始的布朗运动首次在具有 x_1 坐标为 $\le y$ 的点上击中 $\ell_{re_1}(\rho)$，那么该布朗运动必须在触碰 B_x 之前从 B_x 的 ρ 邻域退出。因此，由 (2.1)，积分下的概率从上方被 $Cs\delta_r$ 所限制，对于某个 $C = C(d,\rho)$。因此,

$$\int_0^r \Big(\mu_r^s\big(x \in \ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho) : x_1 > y\big) - \mu_r\big(x \in \ell_{re_1}(\rho) : x_1 > y\big)\Big)dy \le \big(2\rho + Cs\delta_r r\big)\,\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)\big).$$

类似地，

$$\int_0^r \Big(\mu_r^s\big(x\in\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho):x_1>y\big)-\mu_r\big(x\in\ell_{re_1}(\rho):x_1>y\big)\Big)dy$$
$$\geq -2\rho\,\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}(\rho)\big)+\int_0^{r-2\rho}\Big(\mu_r^s\big(x\in\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho):x_1>y\big)-\mu_r\big(x\in\ell_{re_1}(\rho):x_1>y+2\rho\big)\Big)dy,$$

其中，由 (2.4) 和 (2.1)，

$$\mu_r^s\big(x\in\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho):x_1>y\big)-\mu_r\big(x\in\ell_{re_1}(\rho):x_1>y+2\rho\big)$$
$$\geq -\int_{\partial\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)}\mathbb{1}_{x_1\leq y}\,\mathsf{P}_x\big[H_{\ell_{re_1}(\rho)}<\infty,(W_{H_{\ell_{re_1}(\rho)}})_1>y+2\rho\big]\,\mu_r^s(dx)\geq -Cs\delta_r\,\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)\big).$$

从而，

$$\Big|\int_0^r\Big(\mu_r^s\big(x\in\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho):x_1>y\big)-\mu_r\big(x\in\ell_{re_1}(\rho):x_1>y\big)\Big)dy\Big|\leq\big(2\rho+Cs\delta_r r\big)\,\mathrm{cap}\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)\big),$$

并且 (2.7) 由引理 2.1 及 δ_r 的定义得出。证明完成。 □

3. 定理 1.1 的证明对于泊松布尔模型

固定 $\alpha>0$ 和一个在 $\mathbb{R}_+$ 上的概率分布 Q，并用 $\mathsf{P}_{\alpha,\mathsf{Q}}$ 表示强度为 α 且半径分布为 Q 的泊松-布尔模型的规律。回忆一下，对于所有的 $d\geq 2$，都有 $\delta_r=\frac{1}{r}$。我们旨在证明对于每一个 $s>0$，

$$\lim_{r\to\infty}\mathsf{P}_{\alpha,\mathsf{Q}}\big[Q_{re_1}>s\delta_r\,|\,re_1\text{ is visible from }0\big]=\exp\big(-\lambda_{\mathrm{BM}}s\big)$$

其中

$$\lambda_{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\alpha(d-1)\kappa_{d-1}\mathsf{E}[\varrho^{d-2}],\tag{3.1}$$

ϱ 是一个具有分布律 Q 的随机变量（回想一下 $\mathsf{E}[\varrho^d]<\infty$）。

根据 (1.1) 的定义，Q_{re_1}，(1.8) 和 (1.9)，

$$\mathsf{P}_{\alpha,\mathsf{Q}}\big[Q_{re_1}>s\delta_r\,|\,re_1\text{ is visible from }0\big]=\frac{\mathsf{P}_{\alpha,\mathsf{Q}}[\text{every }x\in B(re_1,s\delta_r)\text{ is visible from }0]}{\mathsf{P}_{\alpha,\mathsf{Q}}[re_1\text{ is visible from }0]}$$
$$=\frac{\mathsf{P}[\mathcal{B}_{\mathsf{Q}}^{\alpha}\cap\ell_{re_1}^{s\delta_r}=\emptyset]}{\mathsf{P}[\mathcal{B}_{\mathsf{Q}}^{\alpha}\cap\ell_{re_1}=\emptyset]}=\exp\Big(-\alpha\big[\mathsf{E}\big[\lambda_d\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\varrho)\big)\big]-\mathsf{E}\big[\lambda_d\big(\ell_{re_1}(\varrho)\big)\big]\big]\Big).$$

因此，只需证明

$$\lim_{r\to\infty}\big[\mathsf{E}\big[\lambda_d\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\varrho)\big)\big]-\mathsf{E}\big[\lambda_d\big(\ell_{re_1}(\varrho)\big)\big]\big]=\frac{\lambda_{\mathrm{BM}}}{\alpha}s.\tag{3.2}$$

注意对于每一个 $t>0$，

$$\lambda_d\big(\ell_{re_1}(t)\big)=\kappa_d t^d+\kappa_{d-1}t^{d-1}r.\tag{3.3}$$

此外，如果 β_r 是 $\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)$ 的开口角，则 $\sin\beta_r = \frac{s\delta_r}{r} = \frac{s}{r^2}$ 和

$$\begin{aligned} \lambda_d\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(t)\big) &= \kappa_d t^d + \kappa_{d-1}\int_0^r \Big(t + y\sin\beta_r\Big)^{d-1} dy + R_1 \\ &= \kappa_d t^d + \kappa_{d-1} t^{d-1} r + \kappa_{d-1}(d-1)t^{d-2}\frac{r^2}{2}\sin\beta_r + R_2 \\ &= \kappa_d t^d + \kappa_{d-1} t^{d-1} r + \frac{1}{2}\kappa_{d-1}(d-1)t^{d-2} s + R_2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $|R_1|, |R_2| \le C\max(t^{d-1}, 1)\delta_r$ 对于某个 $C = C(d, s)$，由此得出 (3.2)。 □

4. 定理 1.1 的证明对于泊松圆柱体

固定正数 α 和 ρ，并记 $\mathsf{P}_{\alpha,\rho}$ 为水平 α 下泊松圆柱的分布，其半径为 ρ。回忆一下，$\delta_r = 1$ 对于 $d = 2$ 和 $\delta_r = \frac{1}{r}$ 对于 $d \ge 3$。我们的目标是证明对于每一个 $s > 0$，

$$\lim_{r\to\infty} \mathsf{P}_{\alpha,\rho}\big[Q_{re_1} > s\delta_r \,|\, re_1 \text{ is visible from } 0\big] = \exp\big(-\lambda_{\mathrm{PC}} s\big)$$

满足

$$\lambda_{\mathrm{PC}} = \begin{cases} \alpha & d = 2 \\ \frac{1}{2}\alpha(d-2)\kappa_{d-2}\rho^{d-3}\mathsf{E}[\|\xi\|] & d \ge 3 \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 ξ 是在 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球面上均匀分布的点到超平面 $\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 = 0\}$ 的正交投影，并且 $\mathsf{E}[\|\xi\|] = \frac{\mathrm{Beta}(\frac{1}{2}, \frac{d}{2})}{\mathrm{Beta}(\frac{1}{2}, \frac{d-1}{2})}$。

根据定义 (1.1)，Q_r，(1.4)，(1.6) 和 (1.9)，

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{\alpha,\rho}\big[Q_{re_1} > s\delta_r \,|\, re_1 \text{ is visible from } 0\big] &= \frac{\mathsf{P}_{\alpha,\rho}[\text{every } x \in B(re_1, s\delta_r) \text{ is visible from } 0]}{\mathsf{P}_{\alpha,\rho}[re_1 \text{ is visible from } 0]} \\ = \frac{\mathsf{P}[\mathcal{L}_\rho^\alpha \cap \ell_{re_1}^{s\delta_r} = \emptyset]}{\mathsf{P}[\mathcal{L}_\rho^\alpha \cap \ell_{re_1} = \emptyset]} = \frac{\mathsf{P}[\mathcal{L}^\alpha \cap \ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho) = \emptyset]}{\mathsf{P}[\mathcal{L}^\alpha \cap \ell_{re_1}(\rho) = \emptyset]} &= \exp\big(-\alpha\big[\mu\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)\big) - \mu\big(\ell_{re_1}(\rho)\big)\big]\big). \end{aligned}$$

因此，只需证明

$$\lim_{r\to\infty}\big[\mu\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)\big) - \mu\big(\ell_{re_1}(\rho)\big)\big] = \frac{\lambda_{\mathrm{PC}}}{\alpha} s. \tag{4.2}$$

根据定义 (1.5)，μ，

$$\mu\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)\big) - \mu\big(\ell_{re_1}(\rho)\big) = \int_{SO_d}\big[\lambda_{d-1}\big(\pi(\ell_{r\phi(e_1)}^{s\delta_r}(\rho))\big) - \lambda_{d-1}\big(\pi(\ell_{r\phi(e_1)}(\rho))\big)\big]\,\nu(d\phi).$$

如果 $d = 2$，那么 $\lambda_{d-1}\big(\pi(\ell_{r\phi(e_1)}^{s\delta_r}(\rho))\big) - \lambda_{d-1}\big(\pi(\ell_{r\phi(e_1)}(\rho))\big) = s\delta_r = s$，因此 (4.2) 成立。

令 $d \ge 3$。注意 $\pi(\ell_{r\phi(e_1)}^{s\delta_r}(\rho)) = \ell_{r\pi(\phi(e_1))}^{s\delta_r}(\rho) \cap H$ 和 $\pi(\ell_{r\phi(e_1)}(\rho)) = \ell_{r\pi(\phi(e_1))}(\rho) \cap H$，其中 H 是超平面 $\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 = 0\}$。此外，如果 ϕ 满足 ν 的分布律，则 $\phi(e_1)$

在以 0 为中心的 $\mathbb{R}^d$ 维单位球 S 上均匀分布。因此，如果 ξ 是在 S 上均匀分布的点到 H 的正交投影，则

$$\mu\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)\big) - \mu\big(\ell_{re_1}(\rho)\big) = \mathsf{E}\big[\lambda_{d-1}\big(\ell_{r\xi}^{s\delta_r}(\rho)\cap H\big) - \lambda_{d-1}\big(\ell_{r\xi}(\rho)\cap H\big)\big].$$

类似于体积公式 (3.3) 和 (3.4)，我们得到

$$\lambda_{d-1}\big(\ell_{r\xi}(\rho)\cap H\big) = \kappa_{d-1}\rho^{d-1} + \kappa_{d-2}\rho^{d-2}r\|\xi\|$$

和

$$\lambda_{d-1}\big(\ell_{r\xi}^{s\delta_r}(\rho)\cap H\big) = \kappa_{d-1}\rho^{d-1} + \kappa_{d-2}\rho^{d-2}r\|\xi\| + \frac{1}{2}\kappa_{d-2}(d-2)\rho^{d-3}s\|\xi\| + R,$$

其中 $|R| \le C\delta_r$ 对于某个 $C = C(d,s,\rho)$。因此，

$$\lim_{r\to\infty}\big[\mu\big(\ell_{re_1}^{s\delta_r}(\rho)\big) - \mu\big(\ell_{re_1}(\rho)\big)\big] = \frac{1}{2}\kappa_{d-2}(d-2)\rho^{d-3}s\,\mathsf{E}\big[\|\xi\|\big],$$

这证明了 (4.2)。最后，我们计算 $\mathsf{E}[\|\xi\|]$。使用球面坐标 $\varphi_1,\dots,\varphi_{d-1}$，其中 φ_1 是与 e_1，$\varphi_1,\dots,\varphi_{d-2}\in[0,\pi]$ 和 $\varphi_{d-1}\in[0,2\pi]$ 的角度，我们得到

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[\|\xi\|\big] &= \frac{\int\big(\sin\varphi_1\big)\big(\sin^{d-2}\varphi_1\ \dots\ \sin\varphi_{d-2}\big)d\varphi_1\dots d\varphi_{d-1}}{\int\big(\sin^{d-2}\varphi_1\ \dots\ \sin\varphi_{d-2}\big)d\varphi_1\dots d\varphi_{d-1}}\\ &= \frac{\int_0^\pi \sin^{d-1}\varphi_1\,d\varphi_1}{\int_0^\pi \sin^{d-2}\varphi_1\,d\varphi_1} = \frac{\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{d}{2})}{\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{d-1}{2})},\end{aligned}$$

参见例如 [1, 6.2.1]。证明完成。 □

致谢

感谢 Jean-Baptiste Gouéré 建议我们研究 $Q_x/\delta_{\|x\|}$ 的条件分布。两位作者的研究得到了德国研究基金会优先资助计划 2265“随机几何系统”（项目编号 443849139）的支持。

References

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.) (1972) *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* 10th printing. Dover, New York.

[2] I. Benjamini, J. Jonasson, O. Schramm and J. Tykesson (2009) Visibility to infinity in the hyperbolic plane, despite obstacles. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **6**, 323–342.

[3] T. Bühler, D. Hug and Ch. Thaele (2025) Intersection density and visibility for Boolean models in hyperbolic space. arXiv:2501.13447

[4] P. Calka, J. Michel and S. Porret-Blanc (2009) Visibilité dans le modéle booléen. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **347 (11-12)**, 659–662.

[5] O. Elias and J. Tykesson (2019) Visibility in the vacant set of the Brownian interlacements and the Brownian excursion process. *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **16**, 1007–1028.

[6] G. Matheron (1975) *Random sets and integral geometry.* Wiley & Sons, New York-London-Sydney.

[7] R. Meester and R. Roy (1996) *Continuum percolation.* Cambridge University Press, Cambridge.

[8] P. Mörters and Y. Peres (2010) *Brownian motion.* Cambridge University Press, Cambridge.

[9] Y. Mu and A. Sapozhnikov (2023) Visibility in Brownian interlacements, Poisson cylinders and Boolean models. To appear in AIHP, arXiv:2304.10298.

[10] G. Pólya (1918) Zahlentheoretisches und wahrscheinlichkeitstheoretisches über die sichtweite im walde. *Arch. Math. Phys* **27**, 135–142.

[11] S.C. Port and C.J. Stone (1978) *Brownian motion and classical potential theory.* Academic Press, New York-London.

[12] A.-S. Sznitman (2013) On scaling limits and Brownian interlacements. *Bull. Braz. Math. Soc., New Series*, **44(4)**, 555–592. Special Issue *IMPA 60 years*.

[13] J. Tykesson and P. Calka (2013) Asymptotics of visibility in the hyperbolic plane. *Adv. in Appl. Probab.* **45(2)**, 332–350.

[14] J. Tykesson and D. Windisch (2012) Percolation in the vacant set of Poisson cylinders. *Probab. Theory Relat. Fields* **154**, 165–191.

Yingxin Mu, University of Leipzig, Institute of Mathematics, Augustusplatz 10, 04109 Leipzig, Germany.
Email address: yingxin.mu@uni-leipzig.de

Artem Sapozhnikov, University of Leipzig, Institute of Mathematics, Augustusplatz 10, 04109 Leipzig, Germany.
Email address: artem.sapozhnikov@math.uni-leipzig.de